

第十四篇

磨潤工程

目 錄

第一章 概 說

1.1 磨潤含意.....	14-1
1.2 磨潤的發展原因.....	14-1
1.3 磨潤基本介紹.....	14-2
1.4 磨潤應用介紹.....	14-3
1.5 磨潤工程推廣展望.....	14-4

第二章 磨潤基本

2.1 磨擦.....	14-5
2.1.1 概說.....	14-5
2.1.2 表面形態.....	14-5
2.1.3 表面組織.....	14-6
2.1.4 磨阻生成.....	14-7
2.1.5 磨擦理論.....	14-7
1 塑性變形磨擦基本理論.....	14-8
2 彈性變形磨擦基本理論.....	14-12
3 滾動磨擦.....	14-14
2.2 磨損.....	14-15
2.2.1 概說.....	14-15
2.2.2 磨損分類.....	14-17
2.2.3 磨損理論.....	14-18
1 粘附轉移磨損理論.....	14-18
2 腐蝕膜層磨損理論.....	14-21
3 切削磨損理論.....	14-21

4 變形磨損理論	14-23
5 疲勞磨損理論	14-24
2.2.4 磨損控制	14-27
2.3 潤滑	14-27
2.3.1 概說	14-27
2.3.2 潤滑基本	14-28
1 物體潤滑面特徵	14-28
2 潤滑面抗負荷效應之生成	14-28
2.3.3 潤滑分類	14-31
2.3.4 潤滑理論	14-32
1 界面潤滑理論	14-32
2 混合潤滑	14-37
3 流體膜層潤滑	14-37
(a) 液動潤滑理論	14-37
(b) 液靜潤滑	14-46
(c) 熱力潤滑	14-46
(d) 磁液潤滑	14-47
(e) 彈液動力潤滑	14-48
(f) 塑液動力潤滑	14-51
2.4 潤滑劑	14-51
2.4.1 潤滑機能	14-51
2.4.2 潤滑劑分類	14-54
1 傳統潤滑劑	14-55
2 非傳統潤滑劑	14-57
2.4.3 潤滑劑物理性質	14-60
2.4.4 潤滑劑試驗	14-69

第三章 磨潤應用

3.1 軸承潤滑	14-74
3.1.1 概說	14-74
3.1.2 軸承分類	14-74
3.1.3 軸承特徵	14-75

3.1.4 潤滑方法	14-85
3.1.5 軸承材料	14-97
1 滑動軸承材料	14-97
2 滾動軸承材料	14-107
3.2 齒輪磨潤	14-108
3.2.1 概說	14-109
3.2.2 齒輪磨潤特徵	14-109
3.2.3 齒輪擦損簡介	14-110
3.2.4 齒輪潤滑技術	14-114
1 間歇式	14-114
2 連續式	14-119
3.3 金屬加工潤滑	14-121
3.3.1 概說	14-121
3.3.2 有屑加工潤滑	14-125
3.3.3 無屑加工潤滑	14-128
1 金屬變形加工潤滑目的	14-128
2 金屬變形加工潤滑技術	14-129
參考資料	14-139
名詞術語中英對照 (按首定筆畫)	
名詞術語英中對照 (按字母順序)	

第十四篇

磨潤工程

李 克 讓

第一章 概 說

1.1 磨潤的含意

「磨潤」，是「磨擦、磨損和潤滑」的總稱；「磨潤學」，則是研究分析物體面間，作相對運動時，發生於銜接面上，包括如上述諸項的交關現象科學。「磨潤學」相當的英文名稱為：「TRIBOLOGY」^{(1)*}，是公元一九六六年英國的科學家們所倡出的一新稱呼，此字一般字典尚不得見，其係來自「磨擦」的希臘字：「TRIBO」：

「磨擦」，是物體面間發生相對運動時，一種不可逆性能量消耗自然現象；「磨損」，則是物體面因「磨擦」結果，所導致的表面材料損失，是另一種自然現象；至於「潤滑」，則是純粹人爲的一種技巧，是利用一種具極低抗剪阻力的物質、所謂「潤滑劑」的，添加在要發生相對運動的磨擦面間，分隔兩物不使作直接的碰觸，讓相對運動時的磨擦剪切，落在潤滑劑膜層內部，從而達到降低「磨擦」和「磨損」的「潤滑」目的。

1.2 磨潤的發展原因

一般機械裝置、器具設施，在正常使用情況下的損壞方式有三，即「腐蝕」、「疲勞」和「磨損」；「腐蝕」和「疲勞」，以今日科技進步情形來說，祇要設計者、製造者以及使用維護者，都能認真注意，可以說已有能力完全避免，惟獨是「磨損」例外；因為「磨擦」是機械作功基本憑藉，於是由「磨擦」所引生

*括弧號碼，指參考資料，詳見文尾參考資料頁；以下皆同。

的「磨損」，也就難免。至於怎麼樣來控制和減低「磨損」，可以說這就是促使「磨潤科技」產生和發展的一個主要原因。

在工業革命初期，人們所要求於「機械」的，僅祇是「機能」，祇希望沒成的「機器」能運動作功就行了！但如今，可不再如是單純。今天所希望的機械，將不僅祇是有作功的「機能」，更要有好的「效率」和高的「可靠度」，尤當舉世遭逢能源艱困時刻，對新添裝置的「經濟效益」，更是特別被重視。以上所說不論是「機能」、「效率」、「可靠」或「經濟」，以減低「磨擦」為主要宗旨的「潤滑」，是無不具有直接關連的。

1.3 磨潤基本介紹

「磨潤」的理論基礎，是建立在物理、化學、材料、力學、以及諸專門性工程科目上，並且尚包括了生態、生物、經濟、社會等等，是一種學域廣潤並且交互相關的新科學。它所欲解決的問題，部份早已存在，但新問題依然層出不窮；例如具輻射性的機械裝置，傳統的潤滑不能使用，必須開創新理論技術。其它如諸項極端境域下的機械動轉，欲使其作功運動平順，則磨擦潤滑問題，必須先予適當安排方可。

附圖 1-1，代表磨潤系統的基本元件和作用要素。有兩物體在以相對速度 U 作運動，垂直負荷 W 作用其上，面間由固、液或氣態物質的潤滑劑分隔，於此的物

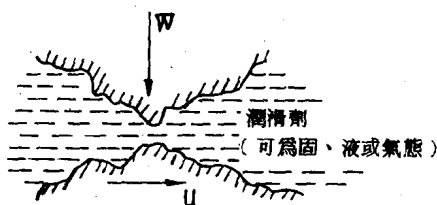


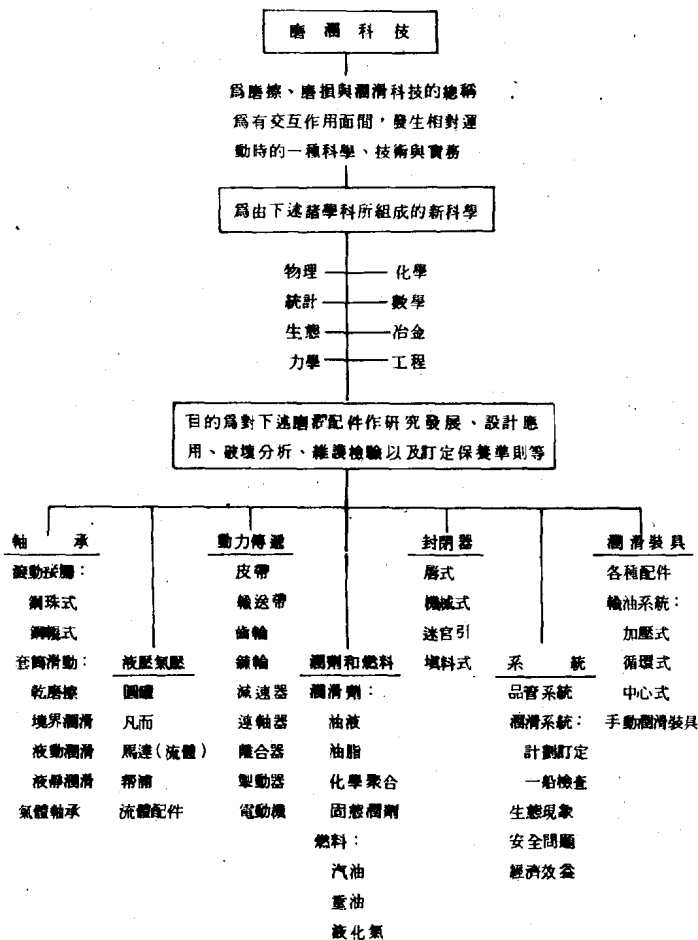
圖 1.1 磨潤系統基本元件

體、速度、負荷和潤滑劑，是謂磨潤系統基本元件及要素。

磨潤基本將要介紹的：包括了物體磨擦和磨損的本質；潤滑原理；潤滑劑的機能、分類、性質及試驗等理論性說明；磨潤應用部份，則將偏重實際應用。

1.4 磨潤應用介紹

表 1-1 磨潤科技包括範圍



「磨潤工程」，為前述「磨潤科學」的應用。把「磨擦、磨損和潤滑」諸現象科學的基本分析予以綜合，經工程設計製造，轉變成具體實物。並對運動時的磨擦潤滑予以控制，使機械中的磨潤系統，能經濟有效的實現設計者所交付的任務。

我們常說：「工程師所面對的，都是些力量傳遞的問題」。「磨潤工程」亦不例外。但却尚附有許多其它工作，譬如：減磨、散熱、防銹、防塵、封口、清潔、減震、……等等。而它的應用地方和對象可以說涵蓋所有具相對運動的部位，而非僅祇軸承潤滑。附表1.1，敘述磨潤科技包括範圍，可見廣潤之一斑。

1.5 磨潤工程推廣展望

磨潤問題的出現，自人類歷史始；但磨潤科技的產生，則為近數十年事。「磨潤」的前身，是「潤滑」；而「潤滑」的前身，則是「潤滑劑」，也就是說在那個時代，僅知道能選擇一種適當的潤滑劑，即算解決了機械裝具磨擦運動問題。但今天的「磨潤」，却已經演變成為動態機件重要設計遵則之一，成為新興機具能否發揮機能效率的重要關鍵。

過去的「潤滑」，其功能為降低「磨擦」；但今後的「磨潤」發展，則是在如何控制「磨擦」、去除「磨擦」。例如可懸浮的「磁性承體」，氣墊式的車輪與軌，如今皆已發展成功，運動面間的「磨擦阻力」，幾可全部去除，如是結果，顯然已往許多受磨擦限制的機具效率，以為不可能的一些夢想，都將成真。「磨潤」科技對人類生活社會，將帶來是禍抑福，固然無法預測，但其所造成突破傳統的「震盪」，極不應該再予忽視。

第二章 磨潤基本

2.1 磨 擦*

2-1-1 概 說

大凡所謂高品質的「機械」，不僅指其「機能」好「效率」高，並且還要「可靠」；也就是說好「機械」，必須能長時間保持住它的高「效率」和好「機能」。

「機械」的本質，是運動作功，是希望把輸入的「能」充份轉移成有用的「功」。其轉移方式雖然多，但憑藉物體間相對運動以傳遞的本質，則如一，相對運動的產生，依賴「磨擦」，而「磨擦」的結果，却會引生起「磨損」致使「機械」損壞。是故如何對「磨擦」予適當控制，是機械工程師們的一項重要的工作。

「磨擦」屬一導引科學，導引自物理、化學、力學和金相等等。就中任一學科有新發展，皆會影響到對「磨擦」的評註分析，是故在研討之先，應該有此認識，準備好隨時可能遇到修正舊理論變革的發生。

2-1-2 表面形態

金屬物質經機械削、銑、鉋、磨，其致精磨拋光之後，其表面肉眼（巨觀）視之，已是相當平整光滑，但用顯微鏡作微觀觀察，則却是峰谷起伏猶同地球表面。此點目前業已有三種儀器可作證明：即粗度儀，電子顯微鏡和光干涉儀**。表 2.1⁽¹⁰⁾，為一般經機械加工後的物體表面，實際測得所得粗糙數據：

*「磨擦」係指一物理現象；其所形成對現象的實質影響，可予因次以形容的，稱作「磨阻」，為一單純的力量。

**外來名詞術語，在全文尾附有中英對照人可供參照。除人名、較重要或新興術語，或難譯外文名詞外，本文內欄不加括弧附帶。

表 2.1 機械加工面精度範圍

加工方式	μ_{in}	
	h_{max}	h_{min}
碑、鑄造物等極粗表面	$> 40,000$	
粗車面	$10^4 \sim 10^5$	$> 10^3$
可見痕跡的中級車削及粗磨	$2,000 \sim 10,000$	> 400
不見痕跡的精車及精磨	$200 \sim 400$	$30 \sim 100$
極精磨	$20 \sim 200$	$5 \sim 30$
磨磨	$40 \sim 80$	$2 \sim 10$
拋光研究	$2 \sim 40$	< 4
精密金相拋光	< 10	< 2
金屬劈裂面	< 1	

金屬原子空間約為 $0.01 \mu_{in}$ ($2.5 \text{ \AA}$)

經過極精細拋光後金屬面平度可達 $5 \mu_{in}$ ($1,270 \text{ \AA}$)

由表 2.1 可見，經機械加工後的金屬物體，縱然目視光滑平整，但兩面接觸時，實際上將僅祇是小部份的凸峰尖在碰觸，如附圖 2.1 所示，微小的尖端，很容



圖 2.1 二平面接觸實際情況示意

易承托不住外力而發生塑性流，使接觸尖端面積增大，直到面積和材料抗壓強度的乘積，和外力相當為止。此時的接觸點等於熔融成一體。其後如有相對運動發生，部分運動能量需先消耗於熔融點的剪斷上，是為「磨擦阻力」生成原因之一說⁽¹¹⁾。

2.1.3 表面組織

附圖 2.2 為一般金屬物體表層斷面。通常在金屬母材的表面，有一透明薄氧化層 ($0.01 \sim 0.1 \mu m$ 厚 $\sim 100 \text{ \AA}$)，呈顯裂縫和孔洞，常有水分子、氧氣或滑脂



圖 2.2 金屬表面的組織

之類物質，微弱的貼附其上。氧化物層之下，金屬母材之上，會有一組織改變的金屬和氧化物混合一起，硬度會非常大的另一層，大約有 $0.1\ \mu\text{m}$ 厚；再往下，則是加工硬化層，大約 $1\sim 10\ \mu\text{m}$ 厚；再下面才是真正金屬母材。

根據上述，可以瞭解和金屬物質作接觸以及發生相對運動時，影響「磨擦」現象因子的複雜。不過概括的也可以用物體表面的「粗度」和「潔度」兩重要因子來歸納，「粗度」僅代表物體面粗糙程度；但「潔度」包括項目則極廣泛。而磨擦現象，則和粗度潔度發生直接關連。

2-1-4 磨阻生成

在表面形態的介紹裏，已經提到過磨擦生成原因之一，說是由於物體表面峰尖接觸，承受不了負荷作用，而發生塑性流，使接觸點融熔一起，當相對運動發生時，需消耗部份能量於剪斷融點上，因而造成「磨擦阻力」，或簡稱「磨阻」。於此，若把「磨擦」視作一種自然的物理現象時，則「磨阻」應為此現象中，一項具有力量因次的物理量。這裏所解釋的融熔，即所謂塑性變形。

兩物體接觸，也可能為峰尖和對方的深谷作犬齒形交互錯接，物體保持彈性，此時若起相對運動，物質分子會產生應變，使結晶格子也起彈性變形，於是乎將有部份輸入能量，消耗於此變形恢復的過程裏，形成了磨阻生成的另一原因。

2-1-5 磨擦理論

我們人類，從上古就知道要移動一物，必須施以外力，並且使原本靜止的物體開始運動，要比已運動的物體繼續保持其運動所施的力要大。茲介紹過去對磨擦的科學分析諸成果如下⁽¹¹⁾：

十五世紀達文西 (de Vinci) 的筆記，曾寫着：「磨阻」和施加的外力成正比；和面積無關。

阿芒通 (Amonton) 在公元 1699 年介紹了表面峰谷交互錯接以產生「磨阻」

的理論。

庫倫 (Coulomb) 在公元 1785 年說：靜磨擦為負荷作用時時間的函數，比動磨擦大。

毛命 (Morin) 公元 1834 年說，當試件予以振動刺激時，可降低其靜磨阻。

伊文 (Evin) 公元 1892 年倡出了物質表面分子吸引，會造成磨阻說。

哈德 (Hardy) 在公元 1920 年時，即已進行過材料磨損和膠執實驗。

至於新的科學研究，則開始於 1930 年，但由於對重要影響因子的忽略，以致此期間無特殊成果收穫，並且實驗也多不具重複性，使研究發生混淆。其後英國保登 (Bowden) 教授等一組人進行實驗，發現了表面粗度和潔度等，對磨擦的影響；1935 年再證明磨擦面有微融點產生；1939 年保登和休斯 (Hughes) 又發現在高溫和高真空下，金屬磨擦有高出平常廿餘倍的磨擦係數產生，並且說運動都是以非連續的形態存在。膠執現象，此時已可以隨着設備的進步，出現於實驗室裏。物體發生膠執現象後，如果想使其分離，必須施加和材料本身強度相同大小的法線力方可，並且分離而也並非原始面。

這些實驗觀察，也證實了表面粗度和潔度對磨擦的影響，指出為何初期觀察常會導致混淆的原因。

綜觀前述，對物體作滑行相對運動現象分析，所得到的關係如下*：

1. $F_{\text{阻}} \propto W$ ，是為一通常現象。
2. $w \propto W$ ，表面性質需要穩定，不起變化。
3. $F_{\text{阻}}$ 和 w 與接觸虛（視）面積無關。

就中 $F_{\text{阻}}$ ：磨阻； W ：外負荷； w ：磨損率；虛面積為物體接觸時的外觀面積，因為實際接觸的，可能僅屬虛面積極微小部份，如圖 2.3 所示。

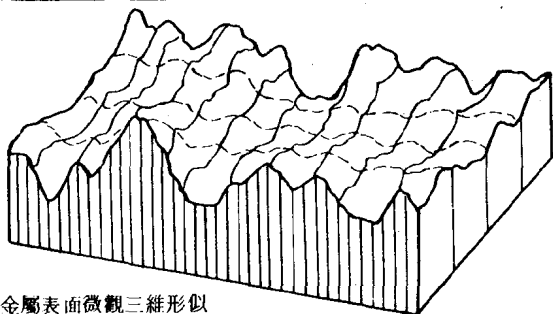
以下，將摘要介紹兩項磨擦基本定律，一為塑性變形的粘附理論，一為彈性變形的磨擦學說。

(a) 塑性變形磨擦基本理論

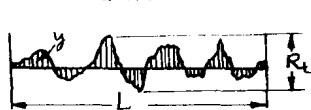
設想有硬質鋼柱端而成半球形，和一軟質銅平面接觸配偶，設 E_1 ， E_2 為接觸部位二物體的楊氏係數，由外力 W 作用使兩物接觸，起先，軟質銅平面將面下式發生彈性變形⁽¹⁷⁾：

$$a = 1.1 \left\{ \frac{WR}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right\}^{1/3} \quad (2.1)$$

* 1、3 為阿芒達定律。



1. 加工後金屬表面微觀三維形似



$$\begin{aligned} \text{cla} &= \frac{1}{L} \int_0^L |y| dL ; \text{rms} \\ &= \left(\frac{1}{L} \int_0^L |y|^2 dL \right)^{1/2} \end{aligned}$$

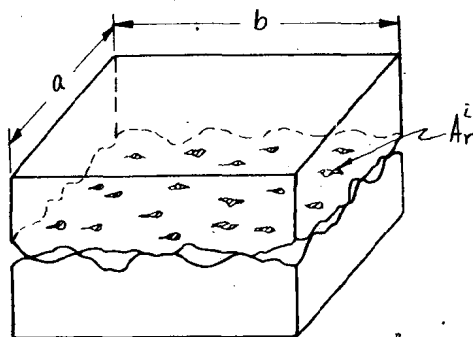
2 虛面積 $A_0 = a \cdot b \gg$ 真實接觸面 $A_r = \sum_{i=1}^n A_i$

圖 2.3 表面粗度和真實接觸面

a 為接觸面的半徑， R 為峰端半徑，上方程式出自赫茲公式。由是可見接觸面積 $(A_2)_n$ 和負荷之間的關係為：

$$(A_2)_n \propto \pi a^2 \propto W^{2/3}$$

$(A_2)_n$ 於此，代表發生接觸的單一峰端，變形亦係彈性方式。若為塑性，則需知通過單點接觸面的平均壓力 (p_m) ，其定義為：

$$p_m = \frac{W}{\pi a^2} \quad (2.3)$$

和 (2.2) 式對照，得

$$p_m \propto W^{1/3} \quad (2.4)$$

設軟質平板的降伏強度為 Y 。根據材力理論，軟質的材料當 $p_m = 1.1 Y$ 時，將在表面 $0.6 a$ 以下處，開始塑性變形。若負荷繼續加高，則接觸點的周圍材料，將形成不可逆式的降伏，直到新面積增加到能支持住外負荷為止，其為：

$$p_m \approx 3Y \quad (2.5)$$

(2.5) 式為形成完全塑性流的一條件。應注意此時的 p_m 和 W 間無關連，意思是一旦負荷增加到某程度，使 p_m 大於 $3Y$ ，將僅低發生接觸面的增加， p_m 則成為常數。由於塑性變形，可因工作硬化關係，而使 Y 增高，是故此項實驗不易實施。

如果想把上述的一點接觸理論，應用到多點接觸，如同一般的滑動面，則必須先作如下的假設：

- (1) 前述單點接觸理論亦可用之於多點接觸面。
- (2) 多點接觸面接點周圍材料，亦皆超出材料的彈性限。
- (3) p_m 係整個接觸點的平均壓力。

所以此時的 p_m 應為：

$$p_m = \frac{W}{(A_1)_m} \quad (2.6)$$

$(A_1)_m$ 為多點接觸的總面積。

設 W_L 為使所有接點達到降伏所需負荷，應用 (2.1) 和 (2.3) 式：

$$W_L = 13.1 p_m^2 R^2 \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right\} \quad (2.7)$$

已知銅的降伏強度 Y 為 200 N mm^{-2} ； p_m 在塑性流區為 $1.1 Y$ ；銅的楊氏係數 (Young's modulus) 為 $1.2 \times 10^5 \text{ N mm}^{-2}$ ；鋼為 $2 \times 10^5 \text{ N mm}^{-2}$ ，故可以計算為峰尖函數的 W_L ；若取 $R = 10^{-3} \text{ mm}$ ，則 W_L 約為 $2.5 \times 10^{-3} \text{ N}$ 。

上述結果足可證實，除非有成千上萬的點在作接觸，否則在普通情況下，接觸面大部份的接觸點，已經發生充份的降伏 ($p_m \times 3Y$)。此分析，證實了先前述及的磨阻生成原因第一說的確實。

前述三項假設中，第一項的目的是為了分析簡便，第二假設尚符合一般情況，至於第三項，實際可稱之為對物體接觸時，真接觸面積 $(A_1)_m$ 的一定義，自 (2.6) 式可見

$$(A_1)_m = \frac{W}{p_m} \quad (2.8)$$

先前已談到，在作單峰點接觸時，一旦接點到達完全塑性，則接觸壓力 p_m 將與負荷 W 無關。如果同意此點，則前述 (1)，(2) 假設自然可行。自 (2.8) 式也可以說

在多接觸點情況，真接觸面和負荷成正比，而和使接觸端點完全進入塑性流時的平均壓力 p_m ，成反比；或者說是和軟質材料的平均降伏強度成反比。意思也說明兩物體接觸時，較硬的一方壓入軟材料內，直到真實接觸面已大到足以承當起負荷時為止。在靜態力作用時，此現象被稱之謂相互配偶峰端的「熔接」。保登和泰寶爾 (Tabor) 首先解釋說要剪斷金屬接觸所形成的融點，其力和「靜磨阻力」 F_{stat} 直接有關。他們也說此種焊接現象，就是在物體作滑動運行時，依然會產生。這種把運動中生成的熔點再剪斷，並能使滑行作等速進行的力，是謂「動磨阻力」 F_{kin} 。至於物體相對運動中，硬質峰端能挖起軟質物表面材料的所謂「犁耕」作用，則未包括在磨擦生成原因中。

設 S 為剪斷熔點時的切線平均剪應力，如是

$$F_{kin} = (A_1)_n S \quad (2.9)$$

自 (2.8)，(2.9) 二式得：

$$F_{kin} = \frac{WS}{p_m} \quad (2.10)$$

(2.10) 式亦即代表來自經驗的磨擦定律，即「磨阻」和施加負荷 W 成正比，並和虛面積無關。

茲設 μ_{kin} 為動磨擦係數，自 (2.10) 式得

$$\mu_{kin} = \frac{F_{kin}}{W} = \frac{S}{p_m} = \frac{\text{熔點抗剪強度}}{\text{軟材的降伏壓力}} \quad (2.11)$$

由於剪切作用通常是發生在軟質材料內，故 μ_{kin} 又可寫作

$$\mu_{kin} = \frac{\text{軟材的抗剪強度}}{\text{軟材的降伏壓力}} \quad (2.11')$$

自 (2.11') 式知 μ_{kin} 為一種材料的兩強度比，是故也可以瞭解，為何 μ_{kin} 數值，在一般材料中，範圍窄狹的原因。例如金屬， $0.6 < \mu < 1.2$ ，保、泰二氏也曾說過此二強度——抗剪和降伏，通常例如受溫度等改變而變化時，二強度一起變化，是故對磨擦係數講，不發生影響。此點已有實驗印證。

平常磨擦痕跡尚可作硬度試驗，例如勃倫奈 (Brinell) 球，在其周圍的 p_m ，即可取來代替軟質材料的硬度。

如同 2.1.3 段所稱，「磨阻」係和物體面的「粗度」和「深度」有關；先前所述，似乎僅祇注意到「粗度」，而未顧及到「深度」，是故保、泰二氏於 1964 年又有修正解釋，說

$$\mu_{kin} = \frac{\text{銜接面的臨界剪應力}(S_s)}{\text{底層金屬的塑性降伏壓力}(p_m)} \quad (2.12)$$

原因是他們懷疑先前所謂熔點抗剪強度和軟材的抗剪強度會相同，以及抗剪強度和降伏壓力，皆和材料強度無關的說法。

另外關於所謂的銜界面，也並不一定是金屬和金屬。因為金屬表面，如同前附圖 2.3 所示，其上可能有吸附層、氧化層，甚至會有其它附着雜物，是故選擇底層金屬的剪應力，將不適合。不過 (2.12) 式和 (2.11') 兩式，在本質上則是一致的。至於當銜界面不再均勻等齊，譬仿已遭受破壞，則情況將成為混合接觸形態，對臨界應力 S_i (未破壞的銜面膜材料) 和微小熔點的 p_m ，何者將生降伏，至難分辨。

以上所介紹的，僅不過衆多磨擦理論中較被廣泛接受者之一，至於接觸面係彈性變形理論、峰谷作大齒錯接的耕犁作用磨阻、表面分子吸附理論以及其它等等尚多。本文不擬一一介紹；以下，擬就和塑性變形相對立的彈性變形磨擦理論，以及滾動磨擦，摘要敘述俾供參考。

(b) 彈性變形磨擦基本理論⁽¹⁷⁾：

英人阿爾查 (Archard) 於公元 1953 年首創，1961 年再予補充而完成此理論。如附圖 2.4 所示，為此理論多接觸面模型。當負荷輕時，僅少數峰端和平面接觸；但當負荷加大，接觸面數也隨之增多，不僅接觸點的數目增加，接觸面

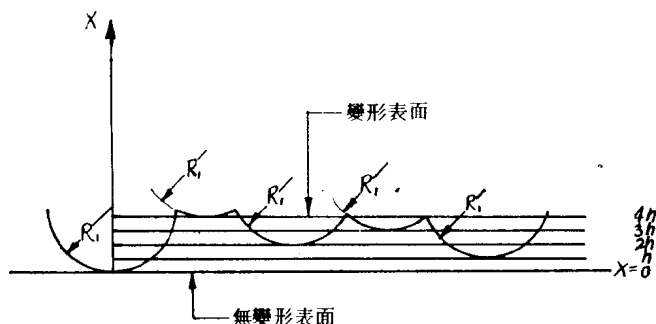


圖 2.4 多接觸面型式

的面積也加大，而此一面積的增大，係作有理性的分佈。如圖 2.4，包括一完全不變形的平整面，和有變形可能數目很多的球形峰端，曲度半徑為 R_i 。假設峰端很平均的在 x 一方向分佈，即為一層次 $x = 0, h, 2h, \dots$ ，有一峰端接觸。當有負荷作用時，總接觸面積 $(A_z)_m$ ，也就是說無變形面移動了 $x = Nh$ 距離，於

是增加了 N 個峰端的接觸，其結果為：

$$(A_2)_m = \sum_{r=1}^{r=N} \delta A_r \quad (2.13)$$

上式 δA_r ，為接觸達到第 r 個平面上時，峰端的總接觸面積。同前， m 則為用來代表作彈性變形多峰端接觸時的接觸面積。當一球形端點半徑為 R_1 ，發生 rh 距離的彈性變形，接觸面積為：

$$\delta A_r = 2\pi R_1 rh \quad (2.14)$$

上述關係，係得自沙季陶 (Sagittal) 公式的應用， $(2R_1 - rh)rh = a_r^2$ ，就中 $rh \ll 2R_1$ ， a_r 為接觸面的半徑。從 (2.13) 和 (2.14) 式，得

$$(A_2)_m = 2\pi R_1 h \sum_{r=1}^{r=N} r \quad (2.15)$$

當 N 極大時，上式改為：

$$(A_2)_m = \pi R_1 h N^2 = \frac{h R_1 x^2}{h} \quad (2.16)$$

阿爾查引入單位深度 ($1/h$ ，以 M 代) 的峰端數，(2.16) 式改為：

$$(A_2)_m = M\pi R_1 x^2 = Bx^2 \quad (2.17)$$

上式 $B = M\pi R_1$ 。

應用方程 (2.1)，配合如上分析，可以得到多而接觸時，發生彈性變形的負荷 $(W_2)_m$ ，其為：

$$(W_2)_m = 0.86 ER_1^{1/2} M x^{3/2} = Cx^{3/2} \quad (2.18)$$

上式： $C = 0.86 ER_1^{1/2} M$ ； $E = E_1 = E_2$ ，為簡單計，取 E 皆等值，(2.17) 和 (2.18) 二式合併，可以求取 $(W_2)_m$ 和 $(A_2)_m$ 間的關係：

$$(A_2)_m \propto (W_2)_m^{4/3} \quad (2.19)$$

如果設想半徑為 R_1 的球形端面，再生出半徑為 R_2 的突出面時，而 $R_1 \gg R_2$ ，阿爾查說此時接觸面和負荷間，當為彈性變形關係時，為：

$$(A_2)_m \propto (W_2)_m^{14/15} \quad (2.20)$$

至於再設想 R_2 的突出球上，復有 R_3 的再突出面時，而 $R_2 \gg R_3$ ，則

$$(A_2)_m \propto (W_2)_m^{44/45} \quad (2.21)$$

阿氏的實驗顯示，愈考慮接觸面的微觀實際情況，就愈見作彈性變形的總接觸面積和負荷成直接比例關係的加強。

如果承認磨擦阻力和真實接觸面積係成比例關係時，則阿氏配合實際的假設、表面模型和以上分析，會使人相信物體作彈性變形接觸時，真實接觸面的磨擦阻力和負荷亦成正比關係。