

攻读硕士学位研究生

高等数学试题选解

1978—1981

上册

44
陕西科学技术出版社

攻读硕士学位研究生

高等数学试题选解

(1978—1981)

上册

游兆
张文

江苏工业学院图书馆
藏书章

陕西科学技术出版社

DV50/08

内 容 提 要

《高等数学试题选解》是攻读硕士学位研究生的入学考试中的题目和解答。它来源于全国一百多所高等院校几年来的部分考题。所选题目有一定代表性和典型性。全书分为高等数学、数学分析、线性代数、计算方法、概率论与数理统计，以高等数学为主。它既适合于报考研究生的同志复习参考，也可供大学生自学和练习。

编 者 的 话

本书习题选自一九七八年至一九八一年全国一百多所高等院校的硕士研究生入学考试的高等数学试题。全书共五部分，主要有：高等数学、数学分析、线性代数、计算方法、概率论和数理统计。约 500 多题，均作了较为详细解答。由于题目来源广泛，形式多样，既有一定的代表性，又有一定的难度；既包括了基本概念、基本理论和基本方法，又包括了具有各种技巧的综合性题目。可供报考研究生的同志参考，也可作为大学学生及自学高等数学的同志复习和练习之用。

参加本书解题和编写工作的还有西安交通大学数学系 1978~1980 年度的研究生：程正兴、徐成贤、赵汝怀、凌永祥、吴可法、徐宗本、林熙、朱林户、谢昌芸、陈小君、罗俊明、姜宗乾、徐瑜等同志。

由于我们水平所限，不足和错误之处望批评指正。

编 者 1981年12月

于西安交通大学

目 录

上 册

I、高等数学	1
一、函数、极限、连续	1
二、导数及其应用	21
三、积分及其应用	55
四、多元函数的导数及其应用	99
五、重积分及线面积分	132
六、级数	188
七、微分方程	257
八、杂题	302
九、习题	338

I、高等数学

一、函数、极限、连续

1. 求下列函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}; \quad (2) u = \arccos \frac{x}{x+y}.$$

解: (1) 要使 y 有意义, 须 $\lg \frac{5x - x^2}{4} \geq 0$,

即 $\frac{5x - x^2}{4} \geq 1$, 就是 $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$, 解之, 得 $1 \leq x \leq 4$,
于是得到函数 y 的定义域。

$$(2) u \text{ 有意义时, } \left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1,$$

即

$$x^2 \leq (x+y)^2,$$

$$0 \leq y(y+2x),$$

故当 $y \geq 0$ 时, $y \geq -2x$; $y \leq 0$ 时, $y \leq -2x$, 为所求的定义域。

$$2. \text{ 已知 } f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1, \text{ 求 } f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = ?$$

$$\text{解: } f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1 = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{故 } f(x) = 2 - 2x^2. \quad f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2 - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

3. 若 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$, 并且已知当 $y=1$ 时有

$z = x$, 试求函数 $f(x)$ 的分析表达式以及 z 的分析表达式.

解: 将条件 $y = 1$ 时 $z = x$ 代入 z 的表达式

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1),$$

得 $x - 1 = f(\sqrt[3]{x} - 1) \quad (1)$

设 $\sqrt[3]{x} - 1 = t$, 则 $x = (1+t)^3$ 代入 (1) 得

$$f(t) = (1+t)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t,$$

从而得 $f(x)$ 的分析表达式为

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x,$$

由 (1) 得 z 的分析表达式为

$$z = \sqrt{y} + x - 1.$$

4. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 必可以表示成偶函数 $H(x)$ 与奇函数 $G(x)$ 之和的形式, 且这种表示法是最唯一的.

证: 令 $H(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

则 $H(x)$ 与 $G(x)$ 分别为定义在 $(-l, l)$ 内的偶函数与奇函数, 且 $f(x) = H(x) + G(x)$.

如果还存在偶函数 $H_1(x)$ 与奇函数 $G_1(x)$, 使

$$f(x) = H_1(x) + G_1(x),$$

则有: $H(x) + G(x) = H_1(x) + G_1(x),$

从而: $H(x) - H_1(x) = G_1(x) - G(x). \quad (1)$

以 $-x$ 代入 (1) 式得: $H(-x) - H_1(-x) = G_1(-x) - G(-x)$

即 $H(x) - H_1(x) = G(x) - G_1(x). \quad (2)$

(1) + (2) 得 $2H(x) - 2H_1(x) = 0$, 即 $H(x) = H_1(x)$, 于是, 由(1)得 $G(x) = G_1(x)$, 唯一性得证.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 内必有 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

证明: 设 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大值为 A , 最小值为 a , 则有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{A + A + \cdots + A}{n} = A,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{a + a + \cdots + a}{n} = a.$$

即有 $a \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq A. \quad (1)$

设 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 中最大值为 M , 最小值为 m , 且设 $f(x_i) = m, f(x_j) = M$, 由不等式(1)有

$$f(x_i) = m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M = f(x_j),$$

由介值定理, 在 x_i 与 x_j 之间(从而在 $[x_1, x_n]$)存在一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

6. 设 $2 \geq u_1 > 0, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, n = 1, 2, \cdots$.

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 存在否?

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = ?$$

解: (1) 用归纳法易证 $2 \geq u_n > 0$, 有界

再由 $u_n^2 - u_{n+1}^2 = u_n^2 - u_n^2 - 2 = (u_n - 2)(u_n + 1) \leq 0$, 可知 $u_n \leq u_{n+1}$, 根据单调数列极限存在准则, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 存在.

单调

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A$, 则

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + A}$$

$$\therefore A^2 = 2 + A$$

$$\therefore A = 2 \text{ 或 } -1, \text{ 但 } A = -1 \text{ 不可能, 故 } A = 2.$$

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a 和 b .

(1)

解: 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b + 1}{x + 1} = 0$$

$$\text{必须} \begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \text{ 解得 } a=1, b=-1$$

8. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$$

解: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{12x} = \frac{1}{12}.$$

9. 求下列各极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}}$

解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x-5}{x^3}}{\sin \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3 - 3x^2(3x-5)}{x^6}}{\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)\left(-2\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 + 15\frac{1}{x}}{-2\cos \frac{1}{x^2}} = 3.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{x/100}}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{x/100}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{100}e^{x/100}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{\left(\frac{1}{100}\right)^2 e^{x/100}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6(100)^3}{e^{x/100}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{x/100}} = -\infty$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{x/100}}$ 不存在。

10. 计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{a+b+b^2+\dots+b^n} \quad |a| < 1, |b| < 1.$$

解:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{a+b+\dots+b^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{a+\frac{b(1-b^n)}{1-b}} \\ &= \frac{\frac{1}{1-a}}{a+\frac{b}{1-b}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-b}{(1-a)(a-ab+b)} \cdot$$

11. 求下列各极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{x-5}$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - (x-4)}{(x-5)(1 + \sqrt{x-4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{1 + \sqrt{x-4}} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

12. 研究 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。

13. 求极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin x - x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{- \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x \sin x}{- \cos x} = -2 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} - (n)}{x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) + (x^4 - 1) + \dots + (x^{2n} - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [(x+1) + (x^3 + x^2 + x + 1) + \dots + \\ &\quad + (x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x + 1)] \\ &= 2 + 4 + \dots + 2n = 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \end{aligned}$$

14. 求极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x^\alpha} (\alpha > 0, k \text{ 为正整数}),$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + \sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) = 2;$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin^2 x + 2x \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2 \cos x} = -\frac{1}{3},$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k \ln^{k-1} x}{\alpha x^\alpha}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(k-1) \ln^{k-2} x}{\alpha^2 x^\alpha} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k!}{\alpha^k x^\alpha} = 0.$$

(3) 令 $y = (\sin x)^x$, 则 $\ln y = x \ln \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad \text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1$$

15. 已知: $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}.$

求: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 显然 $x_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

$$x_2 - x_1 = \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{故 } x_2 > x_1$$

设 $x_k > x_{k-1}$ 则:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \left(1 + \frac{x_k}{1+x_k}\right) - \left(1 + \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right) \\ &= \frac{x_k}{1+x_k} - \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}} \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} > 0 \end{aligned}$$

所以 $x_{k+1} > x_k$ 故 $\{x_n\}$ 单调增加, 又

$$x_n \leq 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2$$

故 $\{x_n\}$ 有上界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a > 0$ 对

$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得:

$$a = 1 + \frac{a}{1+a}$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

所以: $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (因 a 非负, 故根号前取正号)

$$\text{即: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \sqrt{t + \frac{1}{t}} dt}{x\sqrt{x}} = ?$$

解: 在 $[1, \infty)$ 上恒有 $\sqrt{t + \frac{1}{t}} > \sqrt{t}$

且有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \sqrt{t} dt = \infty$, 所以, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \sqrt{t + \frac{1}{t}} dt = \infty$

显然, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\int_1^x \sqrt{t + \frac{1}{t}} dt}{x\sqrt{x}}$ 属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 故可用罗彼塔法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$17. \text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t dt}{x^2}$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t \cdot \arctg t \Big|_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt^2}{1+t^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}$$

18. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

解: 由罗彼塔法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]'$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2 + x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{x(2+3x)}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2+3x} = -\frac{e}{2}$$

19. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$