目　　录

第四章　梁的内力

一根杆件受到垂直于杆轴的横向力作用时，就要产生弯曲变形。工程上，凡是在外力作用下产生弯曲变形的杆件都称为梁。例如屋梁、吊车梁以及铁路桁架桥中的纵梁、横梁等等，都是梁的例子。

工程中常用的梁，其横截面多数都具有纵对称轴。例如图（4—1）中所示各截面图形中的y轴均为各截面的对称轴。

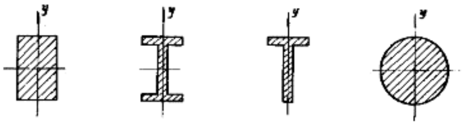

图 4—1

对于横截面具有纵对称轴的梁，当外力作用于梁的纵向对称平面内，并垂直于杆轴时，梁弯曲后，其轴线将在纵向对称平面内弯成一条平面曲线，如图（4—2）所示。象这种弯曲后梁的轴线仍与外力作用平面相重合的弯曲变形，称为平面弯曲。

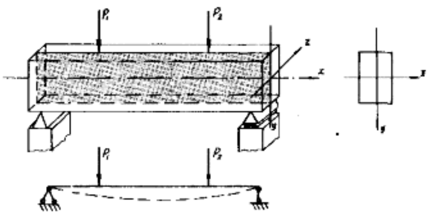

图 4—2

平面弯曲是弯曲问题中最简单和常见的情况。本章和下面两章都只限于讨论梁的平面弯曲问题。

由于弯曲问题内容较多，因此将分作三个部分来讨论：

（一）梁的内力；

（二）梁的应力；

（三）梁的变形。

本章先研究梁的内力。

§4—1 剪力和弯矩

与拉压、扭转问题一样，求梁的内力仍用截面法。下面结合一简单例子来说明。

图4—3表示一两端铰支的简支梁，受一集中力P作用。两端的支座反力已求得为

$$R_A=\frac{Pb}{l},\quad R_B=\frac{Pa}{l}$$

现求距A端为x处的1—1横截面上的内力。

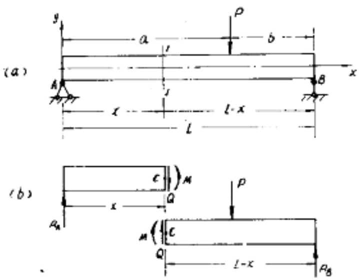

图 4—3

用一假想平面沿1—1截面把梁切开，分为左、右两部分。取左边部分为分离体（图4—3b）。由图看出，外力R_A有使左段梁沿y方向移动的趋势，因此，在1—1截面上必须有一个与R_A平行、反向的内力Q存在，才能与R_A相平衡。根据平衡条件

$$\Sigma Y=0,\quad R_A-Q=0,$$

可得
$$Q = R_A = \frac{Pb}{l}. \tag{a}$$

但是，Q与R_A又将组成一力偶，它有使左段梁在xy平面内发生转动的趋势，因此，在1—1截面上还必须有一个内力偶M存在，以抵抗这种转动。根据平衡条件

$$\Sigma M_C = 0, \quad M - R_A \cdot x = 0,$$

可得
$$M = R_A \cdot x = \frac{Pb}{l}x. \tag{b}$$

上述内力Q称为横截面上的剪力，内力偶M称为横截面上的弯矩。

由上例可知，梁在弯曲时横截面上的内力通常有两个：一个是剪力，另一个是弯矩。

当然，根据作用与反作用定律，如果取截面右边部分为分离体，也将求得相同的结果。下面就来考虑右段梁的平衡。由平衡条件

$$\Sigma Y = 0, \quad Q - P + R_B = 0,$$

得
$$Q = P - R_B. \quad \text{规律1.} \tag{c}$$

由
$$\Sigma M_C = 0, \quad R_B(l - x) - P(a - x) - M = 0,$$

得
$$M = R_B(l - x) - P(a - x) \quad \text{规律2.} \tag{d}$$

将 $R_B = \frac{Pa}{l}$ 分别代入(c)、(d) 两式，展开并化简后可得

$$Q = \frac{Pb}{l},$$

$$M = \frac{Pb}{l}x.$$

由此可见，无论从梁的左段或右段来考虑分离体的平衡，所得的内力数值是完全相同的。我们从 (a)、(c) 及 (b)、(d) 式中可以得出以下规律：

1)梁内任一截面剪力的大小，必等于此截面以左（或以右）各横向外力的代数和。

2)梁内任一截面弯矩的大小，必等于此截面以左（或以右）各外力对此截面形心的力矩的代数和。

以上结论对于各种形式的梁和各种荷载情况都是适合的。

下面来规定剪力和弯矩的正负号。

从以上的分析可知：在求某一截面的内力时，分别以此截面左边部分和右边部分为分离体，由平衡条件所求得的内力在数值上是完全相等的，但剪力的方向或弯矩的转向则相反。

因此，为了使截面两边内力的正负号相一致，就需要根据梁的变形情况对内力的正负号作统一的规定

1.剪力的正负号：如果某一截面两侧的外力，使该截面左边部分相对于右边部分产生左上右下的错动趋势时，此截面上的剪力为正号（如图4—4 *a*所示），反之为负（如图4—4 *b*所示）。

根据上述规则，以所求截面为准，在该截面左边向上作用的外力（将使左部分向上移动）和右边向下作用的外力（将使右部分向下移动），在此截面上均产生正剪力。

2.弯矩的正负号：如果假想所求截面相对地固定不动，则当外力（包括力偶）使该截面以左（或以右）部分产生凹向上的弯曲变形时，此截面上的弯矩为正号（如图4—5 *a* 所示），反之为负（如图4—5 *b*所示）。

例如，图4—3中1—1截面的剪力和弯矩都是正的。

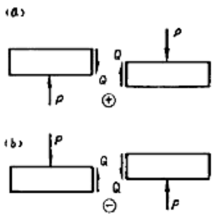

图 4—4

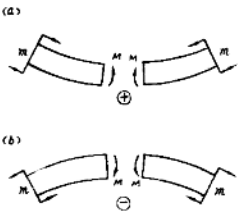

图 4—5

以上总结了求任一截面内力大小的规律，并规定了内力的正负号，今后在计算梁的内力时，应用这些规律和原则，就可以直接地写出任一截面内力的表达式，不必再列出平衡方程式。现举例说明如下。

例4—1　外伸梁CAB受力如图4—6所示。CA段承受均布荷载作用，跨中作用有一集中力偶m。试求图示 1—1、2—2及3—3截面的剪力和弯矩。

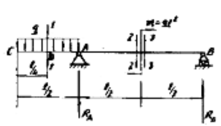

图 4—6

解： 1)求支反力

由 $\quad \Sigma M_B = 0, \quad R_A l + \frac{ql}{2} \times \left(l + \frac{l}{4}\right) - m = 0,$

得 $\quad R_A = \frac{3}{8} ql\ (\downarrow)$。

由 $\quad \Sigma M_A = 0, \quad R_B l - m + \frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} = 0,$

得 $\quad R_B = \frac{7}{8} ql\ (\uparrow)$。

2)求各指定截面的内力

1—1截面　此截面左边只有均布荷载作用，其合力为$\frac{ql}{4}$，作用于CD段的中点(即距C端为$\frac{l}{8}$处)。由此得1—1截面的剪力、弯矩分别为

$$Q_{1-1} = -\frac{ql}{4},$$

$$M_{1-1} = -\frac{ql}{4} \times \frac{l}{8} = -\frac{ql^2}{32}.$$

2—2截面　截面左边均布荷载的合力为$\boxed{\frac{ql}{2}}$，此外还有支反力R_A，因此，截面的剪力、弯矩分别为

$$Q_{2-2} = -\frac{ql}{2} - R_A = -\frac{ql}{2} - \frac{3ql}{8} = -\frac{7ql}{8},$$

$$M_{2-2} = -\frac{ql}{2} \times \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{2}\right) - \frac{3}{8} ql \times \frac{l}{2} = -\frac{9ql^2}{16}.$$

3—3截面　截面左边除均布荷载及反力R_A外，还包括集中力偶m。所以此截面的剪力、弯矩为

$$Q_{3-3} = -\frac{ql}{2} - \frac{3ql}{8} = -\frac{7ql}{8}.$$

$$M_{3-3} = -\frac{ql}{2} \times \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{2}\right) - \frac{3ql}{8} \times \frac{l}{2} + m$$

$$= -\frac{3ql^2}{8} - \frac{3ql^2}{16} + ql^2 = \frac{7ql^2}{16}.$$

注意，由于力偶m在任意轴上的投影都为零，所以在剪力表达式中不能包括力偶m。另外在本例中，若以3—3截面右边的外力来计算3—3截面的剪力和弯矩将比左边更为简

使，读者可以自己验证。

例4—2 简支梁受力及尺寸如图（4—7）所示。试计算1—1、2—2及3—3各截面的剪力和弯矩。

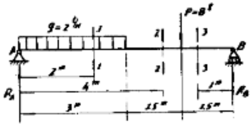

图 4—7

解： 求支反力 ?

由 $\sum M_B = 0$， 得 $R_A = \dfrac{2\times3\times4.5+8\times1.5}{6} = 6.5t$.

由 $\sum M_A = 0$， 得 $R_B = \dfrac{8\times4.5+2\times3\times1.5}{6} = 7.5t$.

1—1截面 考虑左边可得

$$Q_{1-1} = R_A - q\times2 = 6.5-2\times2 = 2.5t\ .$$

$$M_{1-1} = R_A\times2-(q\times2)\times\frac{2}{2} = 6.5\times2-2\times2 = 9t\text{-}m\ .$$

2—2截面 考虑左边可得

$$Q_{2-2} = R_A - q\times3 = 6.5-2\times3 = 0.5t\ .$$

$$M_{2-2} = R_A\times4 - q\times3\times(4-1.5) = 6.5\times4-2\times3\times2.5 = 11t\text{-}m$$

3—3截面 考虑右边比较简单

$$Q_{3-3} = -R_B = -7.5t\ .$$

$$M_{3-3} = R_B\times1 = 7.5t\text{-}m\ .$$

§4—2 剪力图和弯矩图

从上节的讨论可看出，在外力作用下，梁中各横截面的剪力和弯矩一般均随截面位置不同而变化。而最大剪力及最大弯矩所在的截面往往是梁的危险截面。因此，在进行梁的设计时，就需要知道内力沿梁长的变化规律，以便根据最大弯矩和最大剪力进行梁的强度计算。为此，我们取梁的一端为坐标原点，距原点为x处的任意截面的剪力、弯矩可以写成x的函数，即

$$\boxed{\begin{aligned}Q &= Q(x),\\ M &= M(x)\end{aligned}}$$

这两个方程分别称为剪力方程和弯矩方程。

为了清楚地表明内力沿梁长各截面的变化情况，可以根据剪力方程和弯矩方程将内力的变化用图形表示出来。这样的图形分别叫做剪力图和弯矩图。

作图时，取梁轴方向为横坐标。以横坐标表示各截面的位置，以纵坐标表示各截面的内力（剪力或弯矩）。通常把剪力的正值画在横坐标的上边，负值画在下边；而把弯矩的正值画在横坐标的下边（即画在梁的受拉面一边），负值画在上边。以下举例说明。

例4—3 图（4—8 a）表示一悬臂梁，在自由端受一集中力P作用。求作此梁的剪力图和弯矩图。

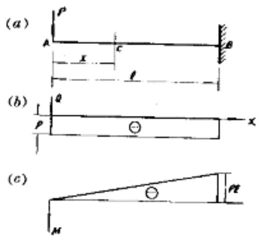

图 4—8

解： 1)作剪力图

取梁的左端为坐标原点，距左端为x处任取一截面，其剪力方程为

$$Q = -P \qquad (a)$$

现在来作剪力图。方程（a）表明Q与x无关，即剪力为一常数。所以剪力图是一条与梁轴平行的水平线。如图（4—8b）所示。

2)作弯矩图

上述截面的弯矩方程为

$$M = -Px \qquad (b)$$

方程（b）表明M是x的一次函数，所以M图是一条斜直线。确定此直线上任意两点的数值便可作图。例如

在A点，　　$x = 0$，　$M = 0$。

在B点，　　$x = l$，　$M = -Pl$。

连结这两点便得弯矩图如图（4—8 c）所示。

例4—4 简支梁AB在C处受一集中力P作用，如图4—9 a所示。作此梁的剪力图和弯矩图。

解： 1)求支反力

由平衡条件$\Sigma M_B = 0$和$\Sigma M_A = 0$求得

$$R_A = \frac{Pb}{l},$$

$$R_B = \frac{Pa}{l}.$$

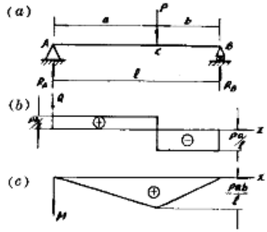

图 4－9

2）作剪力图

由于梁上C截面处有集中力P作用，所以AC段和CB段的内力方程需分段列出。

AC段　$Q = R_A = \frac{Pb}{l}$，　　$(0<x<a)$

CB段　$Q = R_A - P = -\frac{Pa}{l}$。　$(a<x<l)$

以上方程表明，AC段Q值为一正常数，CB段Q值为一负常数，所以剪力图应是由两条水平线组成的阶梯形，如图（4－9b）所示。而在集中力作用点处，剪力发生突变，该点左边和右边两截面剪力的绝对值之和等于P。当$a>b$时，$Q_{max} = \frac{Pa}{l}$。

3）作弯矩图

同上理由，先分别列出AC段、CB段的弯矩方程

AC段　　$M = R_A \cdot x = \frac{Pb}{l} \cdot x$。　　$(0 \leqslant x \leqslant a)$

CB段　　$M = R_A \cdot x - P(x-a)$

$$= \frac{Pb}{l} x - P(x-a)。\qquad (a \leqslant x \leqslant l)$$

由方程看出，两段的弯矩图都是斜直线。

$x=0$时，　$M=0$，

$x=a$时，　$M = \frac{Pab}{l}$，

$x=l$时，　$M=0$。

所以弯矩图是由两条斜直线组成，如图（4－9c）所示。其顶点位于集中力P作用点处，该截面的弯矩值最大，其值为

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}.$$

应该指出，在集中力作用点C处，剪力图发生突变，这是由于假想集中力作用于一点上的缘故。实际上，所谓集中力总是要分布在梁的一定长度内。因此，如果把它看作是分布在

一微段内的均布荷载（图 4 —10b），则此微段的剪力图应为一段斜直线而不是竖线；弯矩图应是一段抛物线而不是折线，分别如图（4 —10c、d）所示。

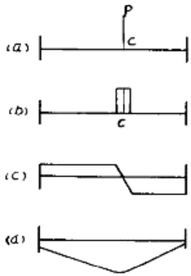

图 4 —10

例4—5 简支梁AB，在C点处受一集中力偶m作用，如图（4—11a）所示。求作此梁的剪力图和弯矩图。

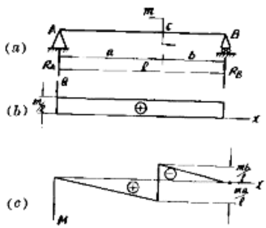

图 4 —11

解：1)求支反力

$$\Sigma M_B = 0, \qquad R_A = \frac{m}{l}(\uparrow).$$

$$\Sigma M_A = 0, \qquad R_B = -\frac{m}{l}(\downarrow).$$

2)作剪力图

作用在C点的集中力偶不影响剪力方程，故全梁只需列一个剪力方程，即

$$Q = R_A = \frac{m}{l}. \qquad (0 < x < l)$$

剪力图如图（4—11，b）所示。

3)作弯矩图

由于梁上有集中力偶m作用，AC段与CB段的弯矩方程将是不同的。

AC段 $$M = R_A x = \frac{m}{l}x. \qquad (0 \leqslant x < a)$$

CB段 $$M = R_A x - m = \frac{m}{l}x - m. \qquad (a < x \leqslant l)$$

由以上方程可得

$$x = 0, \qquad M = 0.$$

$$x = a_{左}, \qquad M = \frac{m}{l}a.$$

$$x = a_{右}, \qquad M = \frac{m}{l}a - m = -\frac{m}{l}b.$$

$$x = l, \qquad M = 0$$

弯矩图由两条平行的斜直线组成，如图（4—11c）所示。在集中力偶m作用处，C点的左、右两个截面弯矩值是不同的，它们的绝对值之和等于此面上的集中力偶m。这种情况称为弯矩图的突变。当$a > b$时，$M_{max} = \dfrac{ma}{l}$.

例4—6 简支梁受均布荷载作用如图（4—12a）所示。求作此梁的剪力图和弯矩图。

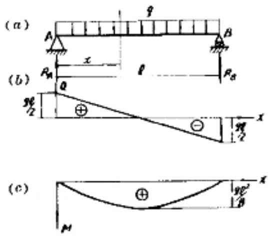

图 4—12

解：1)求支反力

由荷载的对称性可知

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

2)作剪力图

以左端A为坐标原点，距原点为x的任意截面的剪力方程为

$$Q = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx. \qquad (0 < x < l) \qquad (a)$$

上式为x的一次式，故剪力图是一条斜直线。

$$x=0,\qquad Q=\frac{ql}{2},$$

$$x=l,\qquad Q=-\frac{ql}{2}.$$

连此两点可得剪力图如图（4—12，b）所示。剪力的最大值发生在两端支座内侧截面处，其绝对值为 $\left|Q_{max}\right|=\frac{ql}{2}$.

3)作弯矩图

距原点为x的任意截面的弯矩方程为 $X=\frac{l}{2}$ 时 $M=\frac{ql^2}{8}$

$$M=R_A\cdot x-\frac{qx^2}{2}=\frac{q}{2}(lx-x^2),\qquad (0\leqslant x\leqslant l)\qquad (b)$$

弯矩方程(b)是x的二次式，因此弯矩图是一条二次抛物线。在画这条曲线时，至少应定出三点。现取

A点 $\qquad x=0,\qquad M=0,$

中点 $\qquad x=\frac{l}{2},\qquad M=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{4}\right)=\frac{ql^2}{8},$

B点 $\qquad x=l,\qquad M=0.$

过这三点作抛物线即得弯矩图如图（4—12，c）所示。

由于横截面的弯矩是截面位置坐标x的连续函数，为了求得弯矩的最大值，可以利用高等数学求函数极值的方法，将弯矩方程(b)对x求导数，可得

$$\frac{dM}{dx}=R_A-qx=Q.\qquad (c)$$

由式(c)看出，$M(x)$对x的一阶导数等于剪力Q。令$\frac{dM}{dx}=0$(即$Q=0$)，可得

$$x=\frac{l}{2}.$$

由此得知在$x=\frac{l}{2}$处，弯矩有极值，其值即为跨中截面上的弯矩，所以得

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}.$$

§4—3 弯矩、剪力和分布荷载之間的关系

在上节例4—6的讨论中，我们得知：弯矩M对x的一阶导数等于横截面上的剪力Q，即

$$\frac{dM}{dx}=R_A-qx=Q$$

如果将Q对x求导数，则有

$$\frac{dQ}{dx}=-q\ 。$$

上述关系表明：梁的弯矩、剪力和分布荷载之间存在着内在的联系。但是，这种关系是否具有普遍意义呢？下面我们再拿一个较一般的例子来讨论。

设在简支梁AB上作用有任意分布荷载$q(x)$，如图（4—13a）所示。从梁中取出长为dx的一微段来研究（图4—13b）。作用在此微段上的分布荷载可以认为是均匀分布的。微段左、右两边截面上的剪力、弯矩都假设为正号。左侧截面的剪力为Q，弯矩为M；右侧截面的剪力为Q＋dQ，弯矩为M＋dM，dQ与dM分别为右侧截面剪力、弯矩的增量。

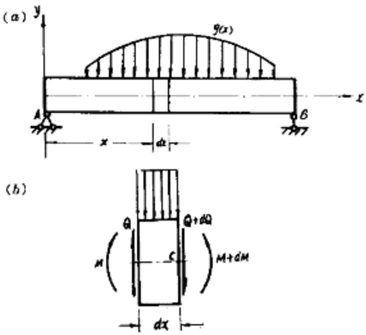

图 4—13

由微段的平衡条件

$$\Sigma Y=0,\qquad Q-q(x)dx-(Q+dQ)=0,$$

得

$$\frac{dQ}{dx}=-q(x)\ 。\tag{4—1}$$

$$\Sigma M_c=0,\qquad M+Qdx-q(x)\cdot\frac{dx^2}{2}-(M+dM)=0,$$

略去二阶微量$q(x)\dfrac{dx^2}{2}$，可得

$$\frac{dM}{dx}=Q,\tag{4—2}$$

再从式（4—1）及（4—2）又得

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2}=-q(x)}\ .\tag{4—3}$$

由此证明：剪力Q对坐标x的一阶导数等于分布荷载$q(x)$，而弯矩M对坐标x的一阶导数则等于该截面的剪力Q。这是一个普遍的规律。

根据导数的几何意义，由上述关系可看出：剪力图上某点切线的斜率就等于梁上相应点处的分布荷载$q(x)$（如果分布荷载为向下作用时，则在$q(x)$前应加一负号）；弯矩图上某点切线的斜率等于剪力图上相应点处的剪力值。根据这些关系可以得出以下规律：

（一）当梁上受有均布荷载作用时，$q(x)$ = 常数，则$Q(x)$为x的线性函数，$M(x)$为x的二次函数。因而剪力图应是一条倾斜的直线，而弯矩图则是二次抛物线。这从例4—6中的剪力图和弯矩图就可以看出来。

（二）在没有荷载作用的一段梁上，$q(x) = 0$，则该段内$Q(x)$ = 常数，$M(x)$为x的线性函数。因而，这一段梁的剪力图是一条水平的直线，弯矩图则是一条倾斜的直线。这从例4—4和例4—5中可以看出来。

应用上述微分关系，就可以根据某区段内荷载分布情况来确定该区段弯、剪图的形状，作图时不必列方程，只需求出梁上某几个控制点（截面）的内力值，就可以画出内力图。

下面举两个例子。

例4—7 作图4—11（a）所示梁的内力图。

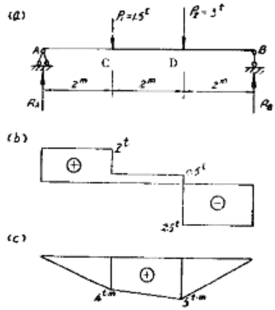

图 4—11

解：1)求支反力

由梁的平衡条件求得

$$R_A = 2t$$

$$R_B = 2.5t$$

2)作剪力图

根据外力情况，该梁应分成三段，即AC、CD、DB三段。这三段内均无分布荷载，即$q = 0$，故Q图都是水平线。选$A_{右}$、$C_{右}$、$D_{右}$为控制点。

$$Q_{A右} = R_A = 2t,$$

$$Q_{C右} = R_A - P_1 = 2 - 1.5 = 0.5t,$$

$$Q_{D右} = -R_B = -2.5t \text{ 。}$$

剪力图如图（4—14b）所示，在C、D截面处剪力发生突变。

3）作弯矩图

根据外力情况，仍应分成三段（AC、CD、DB）。因各段无分布荷载，故各段M图为斜直线。分段处M图发生转折。因此只需计算A、C、D、B四个截面的弯矩值便可画出弯矩图。

$$M_A = 0 \text{ 。}$$

$$M_C = 2 \times 2 = 4\boxed{t-m}$$

$$M_D = 2.5 \times 2 = 5\boxed{t-m} \text{ 。}$$

怎写无单位.?

$$M_B = 0 \text{ 。}$$

在M图上定出四个控制点的M值，再把四点联成折线，即得M图如图 4—14（c）所示。

例4—8 作图 4—15（a）所示外伸梁的内力图。

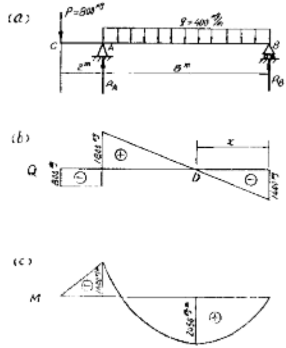

图 4—15

解：1）求支反力

由梁的平衡条件得

$$R_A = 2600\text{kg} \text{ 。}$$

$$R_B = 1400\text{kg} \text{ 。}$$

2）作剪力图

根据外力情况将梁分成CA和AB两段。CA段$q=0$，Q图为水平线。AB段q＝常数，Q图为斜直线。选 $C_{右}$、$A_{右}$、$B_{左}$ 三点为控制点。这三点的Q值分别为：

$$Q_{C右} = -800\text{kg} \text{ 。}$$

$$Q_{A右} = -800 + 2600 = 1800\text{kg} \text{ 。}$$

$$Q_{B左} = -1400\text{kg} \text{ 。}$$

剪力图如图 4—15b所示。

3）作弯矩图

根据外力情况将梁分成两段。CA段$q=0$，故M图为一条斜直线；AB段q＝负常数，故M图为一条向上凹的二次抛物线。C、A、B三点为控制点，各点所在截面的弯矩值分别为：

$$M_C = 0,$$

$$M_A = -800 \times 2 = -1600 \text{kg-m},$$

$$M_B = 0.$$

又因为AB段的弯矩图是二次抛物线，还要找出M的极值才能画这段梁的弯矩图。从剪力图可见AB段截面D的剪力$Q_D = 0$，由$\frac{dM}{dx} = Q$知，这个D截面的弯矩必为极值。设截面D距B点为x，该截面的剪力方程为：

$$Q_D = -R_B + qx,$$

令

$$Q_D = 0,$$

即

$$-R_B + qx = 0,$$

得

$$x = \frac{R_B}{q} = \frac{1400}{400} = 3.5\text{m}.$$

因而D截面的弯矩为：

$$M_D = 1400 \times 3.5 - \frac{400}{2} \times 3.5^2 = 2450 \text{kg-m}$$

根据C、A、D、B四点的弯矩值画弯矩图如图4—15c所示。