数学竞赛习题集

（一）

齐齐哈尔市数学学会

前　言

本分册各习题选自《莫斯科数学比赛大会习题集》（俄文）一书，是为迎接数学竞赛在很短的时间内译编的，加之译编者学识浅薄，错误和疏漏已属难免，欢迎同志们批评指正。来信请寄：齐齐哈尔师范学院数学系转交。

周晓中　潘家锐

1978年5月

目　　录

竞 赛 练 习 题

一、代 数 部 分

§1. 证明恒等式:

证明恒等式:

1. $\left[\dfrac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right]=\left[\dfrac{a}{bc}\right]$.

2. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}-\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{5}-3+2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}+3-2\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$.

4. $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

5. $\dfrac{1}{2\sin 10^0}-2\sin 70^0=1$.

6. $C_n^{m-1}+2C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+2}^{m+1}$.

§2. 有限序列的求和

证明恒等式:

7. $\left[\dfrac{n}{k}\right]+\left[\dfrac{n+1}{k}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n+k-1}{k}\right]=n$

8. $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\cdots+\frac{1}{\log_n x}=\frac{1}{\log_{n!} x}$.

9. $\frac{1}{\log_x 2\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\log_x 8}+\cdots+$

$+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2$.

10. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+$

$+\cdots+\frac{1}{2n}$.

11. $\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\right.$

$\left.\frac{1}{n-2}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)=$

$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

12. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=$

$=-\frac{1}{2}$.

13. $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\cdot\sin\frac{m\pi}{2m+1}=$

$=\sqrt{\frac{2m+1}{2^m}}$.

14. $C_m^0-\frac{1}{3}C_m^1+\frac{1}{5}C_m^2-\cdots+(-1)^m\frac{1}{2m+1}C_m^m=$

$=\frac{m!\,2^m}{(2m+1)!!}$.

15. $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \cdots + \operatorname{arcctg}(2n+1) =$

$= \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \dfrac{3}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3} + \cdots + \operatorname{arctg} \dfrac{n+1}{n} -$

$- n \operatorname{arctg} 1$.

16. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

计祘下列各式之和

17. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

18. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots +$

$+ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

19. $\dfrac{1}{1\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

20. $\dfrac{0}{1} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!}$.

21. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$.

22. $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots +$

$+ \left(x^n - \dfrac{1}{x^n}\right)^2$.

23. $n! + \dfrac{(n+1)!}{1} + \dfrac{(n+2)!}{2!} + \cdots +$

$+ \dfrac{(n+p-1)!}{(p-1)!}$.

24. $a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \cdots +$

$+ (a+nd)q^n$.

25. $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$.

26. $nx+(n-1)x^2+\cdots+2x^{n-1}+x^n$.

27. $1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+\cdots+n\cdot 2+(n+1)$.

28. $1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n\text{个}}$.

29. $1\cdot2\cdot2^n+2\cdot3\cdot2^{n-1}+\cdots+n(n+1)2+$
$+(n+1)(n+2)$.

30. $\sin\varphi+\sin2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.

31. $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$.

32. $\sin\varphi+2\sin2\varphi+\cdots+n\sin n\varphi$.

33. $1+C_n^1\cos\varphi+C_n^2\cos2\varphi+\cdots+C_n^n\cos n\varphi$.

34. $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\cdots+C_n^kC_m^0$.

§3. 证明不等式

证明下列不等式：

35. 如果a, b, c, d>0, $c+d\leqslant a$, $c+d\leqslant b$, 则 $ad+bc\leqslant ab$.

36. $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$.

37. $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$, 如果$x+y+z=1$.

38. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2$, 如果$ab>0$.

39. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1$.

40. $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

41. $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$.

42. $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$.

43. 如果$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$，则$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant 1$.

44. 如果$a_1a_2\cdots a_n=1$，a_1，a_2，$\cdots$，$a_n>0$，则$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$.

45. $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$，如果$a+b\geqslant 1$.

46. $|\log_a b|+|\log_b a|\geqslant 2$.

47. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<3$.

49. $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

50. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}<2$；此处$a_k=a_{k-1}+a_{k-2}$，$K=3$，$4\cdots$.

51. $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}<2$.

52. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,

其中$a_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$.

53. $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$,

其中$a_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$.

54. $\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{2n}}{a+a^2+\cdots+a^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}$，如果$a>0$.

55. $\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n$,

如果$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$.

56. $2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot\cdots\cdot(2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$.

57. $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \geqslant 1+\operatorname{ctg}\varphi$，如果$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

58. $\left|\frac{\cos k\alpha\cos m\beta-\cos m\alpha\cos k\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}\right| \leq \left|k^2-m^2\right|$,

k和m是整数，$\alpha \neq \pm\beta+2n\pi$.

59. $(n!)^2>n^n$，当$n>2$.

60. $ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$，如果$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, a, b, p, q>0$；

数p和q是有理数.

61. $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

62. $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$.

63. $(3n)!>n^{3n}$.

64. $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+\frac{s}{1!}+$

$+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}$, 其中$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$; $a_i>0$,

$i=1,2,\cdots,n$.

§4.解方程和方程组

解下列方程:

65. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

66. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=b^4$.

67. $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x+$

$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x=2^{1+\frac{x}{4}}$.

68. $9^x-6^x=4^{x+\frac{1}{2}}$.

69. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.(求所有实数解).

70. $|z|-z=1+2i$.

71. $\sin ax-\cos bx=2$.

72. $(\mathrm{tg}x)^{\sin x}=(\mathrm{ctg}x)^{\cos x}$.

解下列方程组:

73. $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=a,\\ \frac{xz}{x+z}=b,\ (abc\neq 0)\\ \frac{yz}{y+z}=c.\end{cases}$

74. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -x_4 + 2x_5 - x_6 = 1, \\ -x_5 + 2x_6 = 1. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0, \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 100x_{100} = 0, \\ x_1 + 2^2 x_2 + \cdots + 100^2 x_{100} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1 + 2^{100} x_2 + \cdots + 100^{100} x_{100} = 0. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} x(y+z) = 5, \\ y(x+z) = 10, \\ z(x+y) = 13. \end{cases}$$

79. $\begin{cases} x+y-z=7, \\ x^2+y^2-z^2=37, \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$

80. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ xy+4y^2=115. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=c+\dfrac{1}{c}. \end{cases}$

84. а) $\begin{cases} x^2-yz=a, \\ y^2-xz=b, \\ z^2-yx=c. \end{cases}$ б) $\begin{cases} u+v=a, \\ ux+vy=b, \\ ux^2+vy^2=c, \\ ux^3+vy^3=d. \end{cases}$

85. $\begin{cases} xy=a^2, \\ (\lg x)^2+(\lg y)^2=\dfrac{5}{2}(\lg a^2)^2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \sin 2x+\sin 2y=\sin 2\alpha. \end{cases}$

求下列方程的整数解：

87. $xy=x+y.$

88. $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

89. $2^{\frac{x-y}{y}} - \frac{3}{2}y = 1$.

90. $pq + pr + qr - pqr = 2$, $(p, q, r > 0)$.

91. $1! + 2! + \cdots x! = y^2$.

92. $\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}$.

93. $3^x - 2^y = 1$.

§5.研究方程、方程组和不等式

94. a, b, c, d是正数，如果不等式组

$$\left.\begin{array}{r} ax - by < 0, \\ -cx + dy < 0 \\ x > 0, \\ y > 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

有解，则下一条件

$$ad - bc < 0 \qquad (2)$$

成立，反之，如果条件（2）满足，则组（1）有解，试证明之。

95. 解不等式$|\sin x| > |\cos x|$.

96. 证明，只要$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$，则方程

$(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \cdots + (a_n x - b_n)^2 = 0$

不能有两个不同的实数解。

97. 证明：如果形为$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$的方

程有根m，则它也有根$\frac{1}{m}$.

98. 证明：当p是整数且大于2时，方程$x^3-px+1=$ $=0$没有有理根。

99. 证明：如果p和q是奇数，则方程$x^{10}+px^7+q=0$没有整数解。

100. 对怎样的自然数a和b，方程
$x^2-abx+a+b=0$的根都是整数.

101. 证明：如果方程$ax^2+bxy+cy^2=z^2$（a，b，c是整数）有非零整数解，则它有无穷多两两不成比例的整数解.

102. 确定a，使得方程

$$x^2-\frac{15}{4}x+a=0$$

的一个根是另一个根的平方。

103. p_0，p_1，p_2是满足条件$p_0+p_1+p_2=1$的正数.如果方程

$$p_0+p_1x+p_2x^2=x \qquad (1)$$

有满足条件

$$0<x_0<1 \qquad (2)$$

的根x_0，则成立不等式

$$p_1+2p_2>1. \qquad (3)$$

反之，如果条件（3）成立，则方程（1）有满足条件（2）的根x_0.试证明之.

104. 求一整系数的方程，使之有根$x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

105. （1）给定两个方程：

$x^2-ax+1=0$，$x^2-x+a=0$.

确定出系数a的那些值，使得在那些值之下这两个方程至少有一个公根。

（2）确定a使得方程$x^2+x+a=0$，$x^2+ax+1=0$有一个公根.

106. 数x_1，x_2，…，x_7中的每一个可以独立地取值0和1. 是否存在如下的数a_{ij}，每一个是0或1，使得对于任何非负整数b_1，b_2，…，b_6而言，方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{17}x_7=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{27}x_7=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{61}x_1+a_{62}x_2+\cdots+a_{67}x_7=b_6 \end{cases}$$

有不多于一个解？

107. 方程$\log x=\sin x$有多少个解？

108. 证明，如果$z>0$，$0<x<k$，$0<y<k$，k是正整数，则不存在整数x，y，z使$x^k+y^k=z^k$.（较易的《费写大定理》）

109. 证明：如果$n>2$以及

$$z<1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1},$$

则方程$x^n+y^n=z^n$没有正整数解.

110. 如果x_1和x_2是方程$x^2-6x+1=0$的根，则对任何整数n而言，$x_1^2+x_2^2$是整数并且不能被5整除。试证明之.

111.在解二次方程$x^2+px+q=0$时，将常数项q舍入了0.00001，试估计，答案可能变化多少？

112.给定方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=N$，其中N是正整数.试证明：它的相异非负整数解的数目等于C_{N+n-1}^{n-1}.

113.证明：对一切实数υ，方程

$(2\upsilon^2-2\upsilon+1)Z^3+(\upsilon^2-\upsilon+3)Z^2+3(\upsilon^2-\upsilon+1)Z+(\upsilon+2)=0$的根$Z_1, Z_2, Z_3$的实部都是负的.

114.证明：如果n是大于2的奇数，则方程

$$\cos\pi x=\frac{1}{n}$$

的所有根都是无理数.

115.证明：任何一对整数x，y，如果它们满足方程$x+y\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$中的一个，则它们也满足方程$x^2-5y^2=1$，反之亦然。

§6.多项式

116.如果多项式$a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2+a_7x^4+a_8y^4+a_9x^2y^2+a_{10}xy^3+a_{11}x^3y$的任何一个系数都不等于零，则它不能是x的一个多项式和y的一个多项式的乘积.试证明之.

117. a）求将表达式

$$(1-3x+2x^2)^{743}\cdot(1+3x-2x^2)^{744}$$

打开括号并合并同类项后所得到的多项式的系数之和.

b）证明：如果两个给定的多项式中的每一个的系数之和都等于1，则将这两个多项式相乘所得到的多项式其

系数之和也等于1.

118．证明：若a，b是整数，则多项式

$$(x-a)^2(x-b)^2+1$$

不能分解成两个整系数多项式之积.

119．证明：如果成立恒等式

$$x^m+x^{m-1}+\cdots+x+1\equiv$$
$$\equiv(x^K+a_1x^{K-1}+\cdots+a_K)(x^s+b_1x^{s-1}+\cdots+b_s)$$

而且右端两个多项式的系数是非负数，则这些系数中的每一个或者等于零或者等于1.

120．证明：对素数p，多项式

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

不能分解成具有非负系数的多项式之积.

121．实系数的多项式

$$ax^2+bx+c,\ a>0,$$

有纯虚根.证明：它可以表为如下形式

$$(Ax+B)^2+(Cx+D)^2,$$

其中A，B，C，D——实数.

122．求整数a，使得多项式

$$(x-a)(x-10)+1$$

被分解成两个因子的乘积$(x+b)(x+c)$，其中b，c是整数.

123．多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_na_0\neq 0)$ 有根x_1，x_2，$\cdots$，x_n.问：下面二多项式各有怎样的根：

a) $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^na_n$;

b) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$.