

连续相变临界指数的骨架图展开*

于 录 郝柏林

(中国科学院物理研究所)

提 要

本文讨论了空间维数 d 任意的经典 n 标量场四端顶角的骨架图展开和临界指数 γ, α, η 的计算, 给出了 γ^{-1} 按 $\epsilon = 4 - d$ 展开到三次项的表达式。

一、引 言

相变是自然界中量变转化为质变这一辩证规律的典型表现, 是统计物理学中的一个重要课题。早在近一百年前恩格斯就曾经指出: “...每种气体都有其临界点, 在这一点上相当的压力和冷却能使气体变成液体。一句话, 物理学的所谓常数, 大部分不外是这样一些关节点的名称, 在这些关节点上, 运动的量的增加或减少会引起该物体的状态的质的变化, 所以在这些关节点上, 量转化为质。”(《自然辩证法》)恩格斯在这里所说的正是液体和气体的相变点。

热力学函数及其一阶导数连续, 而高阶导数有奇异性的相变通常叫作连续相变。它包括相图上的临界点和二类相变, 本文统称为临界点。为描述热力学量在临界点附近的行为, 引入了各种临界指数。以本文涉及的三个指数为例, α 反映比热在临界点附近的奇异性,

$$c_p \sim (T - T_c)^{-\alpha} \quad (T \geq T_c); \quad (1.1)$$

η 描述自旋(或密度)关联函数在临界点的行为, 可由关联函数的傅氏分量表示为

$$G(P \rightarrow 0, T = T_c) = P^{-2+\eta}; \quad (1.2)$$

而起始磁化率(或等温压缩率)的临界指数 γ 出现在同一关联函数的另一极限中:

$$\chi_T \sim G(P = 0, T \rightarrow T_c + 0) \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (1.3)$$

各种平均场理论给出相同的临界指数: $\alpha = 0$ (有限断裂), $\gamma = 1$, $\eta = 0$ 。

最近十年连续相变的研究发展很快。精细的测量和晶格统计模型的数值解都表明, 平均场理论在离临界点很近时是不适用的。临界指数系统地偏离平均场理论, 但仍有明显的内在规律性。在分析这些规律性的基础上提出了标度律(Scaling Law)和普适性(Universality)假设。标度律是说, 由于在临界点关联长度趋向无穷, 热力学函数应满足一些标度变换, 由此推得各临界指数之间的若干关系式, 因而只有两、三个临界指数是独立的。普适性假设认为物理系统按其空间维数和有序参数的分量数目(可能还有力程长短)分类, 每类中临界指数相同, 与相互作用的性质、晶体对称等细节无关(详情可参阅总

* 1973年12月5日收到。

结性文献[1]).

这样,临界指数就成为理论分析和实验测量的主要对象.由于热力学函数在临界点不解析,多年来除少数二维模型的严格解给出几个与平均场不一样的临界指数外,没有其它超乎平均场理论的处理方法.最近 K. G. Wilson 等人^[2,3]把重整化群的概念与配分函数的变换结合,发现对于四维以上体系平均场理论严格成立,乃提出按空间维数差 $\varepsilon = 4 - d \ll 1$ 展开计算临界指数的方法.随后有人^[4]试图不借助重整化群概念,直接把标度关系与微扰论骨架图比较,计算临界指数.他们的方法具体依赖于玻色系统的图解规则,结果相当于 $n = 2$,不能简单地推广到一般 n 和高阶的情形,特别是在临界点上没有给出有效的分析方法.我们研究了与这个统计问题等价的经典 n 标量场理论的微扰论和骨架图结构,得到了一般 n 情形下骨架图分析的系统方法.用此法计算临界指数的高阶修正,没有任何原则困难.作为具体应用的例子,我们计算了临界指数 γ 和 η 到 ε^3 项,以及 α 到 ε^2 项的展开式.后两者是已知的结果^[5].但本文计算方法更直接地表明了各物理量与理论中的动量截断无关,因为一切积分都出现在与截断无关的组合中.这个方法还提供了按系统内部自由度数目展开求临界指数的可能性,这是今后要继续研讨的问题之一.

二、临界点附近统计问题的经典场论表述

我们采用 Wilson^[3] 的模型,考虑 d 维格点上有 n 个分量的经典自旋的相互作用.这里“自旋”就是连续相变理论中的有序参数.计算统计配分函数时只对最近邻格点上自旋的一切状态 $\{S\}$ 求和

$$Z = \sum_{\{S\}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) = \sum_{\{S\}} \exp\left(\frac{K}{2} \sum_{m,i} S_m^\alpha S_{m+i}^\alpha\right), \quad K = \frac{J}{kT}, \quad (2.1)$$

这里 J 是“交换积分”, m 是元胞位置矢量, i 是元胞内最近邻的相对位置矢量(本文矢量一律不用黑体标出).表达式中重复两次的自旋角标 α 表示从 1 求和到 n .如果引入收敛因子 $-\frac{b}{2} \sum_m S_m^\alpha S_m^\alpha$,并把 S_m^α 视为可连续取值的变量,(2.1)式中求和就换成积分.再进一步令格点函数 S_m 变成连续介质函数 $S(x)$,改变 S 的尺度以吸收 K 后有

$$Z = \left(\int \mathcal{D}S \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_r ((\nabla S)^2 + r_0 S^2) \right], \quad r_0 = \frac{b}{K} - 2d. \quad (2.2)$$

今后对无穷函数系的泛函积分以及普通的 d 维积分都采用缩写:

$$\left(\int \mathcal{D}S \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\prod_m \int_{-\infty}^{\infty} dS_m \right), \quad \int_x \equiv \int d^d x, \quad \int_q \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}. \quad (2.3)$$

(2.2)式中梯度项 $(\nabla S)^2$ 来自最近邻作用.作傅氏变换 $S = \int_q e^{iqx} \sigma_q$,并略去泛函积分中完成函数代换时出现的公共因子,得

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\sigma \right) \exp(H_0), \quad (2.4)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2} \int_q (q^2 + r_0) \sigma_q^\alpha \sigma_{-q}^\alpha. \quad (2.5)$$

H_0 是一种自由经典场的哈密顿量。这也是统计中简单的高斯模型。一切统计平均都是高斯平均。例如, 自旋关联函数即经典场的传播子:

$$\langle \sigma_i^a \sigma_j^a \rangle = G_0(q_1, r_0) \delta(1+2) \delta_{ab} = \frac{\delta(1+2)}{q_1^2 + r_0} \delta_{ab}, \quad (2.6)$$

其中 1, 2 是动量 q_1, q_2 的缩写。由 (1.3) 式知道临界点附近的温度关系:

$$\chi_T \sim G_0(0, r_0) = \frac{1}{r_0}, \quad r_0 \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (2.7)$$

高斯模型中一切高阶偶数个自旋的关联函数都分解为二阶关联函数的组合, 而奇数个自旋关联函数为零。这个分解相当于场论中的维克定理。

Wilson 发现高斯模型给出的临界指数与平均场理论一致。高斯模型中自旋分布在 $S=0$ 处最大, 因此与一般统计模型相差甚远。如果在 (2.2) 式收敛因子中加入四次项, 可以得出超过平均场理论的结果。这时哈密顿量是

$$H = H_0 + H_I = H_0 - \frac{u_0}{3} \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) \int \sigma_1^a \sigma_2^b \sigma_3^c \sigma_4^d \delta(1+2+3+4), \quad (2.8)$$

其中 u_0 相当于场论中 ϕ^4 相互作用的耦合常数, $\Delta(\alpha\beta\gamma\delta)$ 是完全对称单位张量, 见 (附 3) 式。任何场函数乘积 A 的平均值

$$\langle A \rangle = \langle A \exp(H_I) \rangle_0 / \langle \exp(H_I) \rangle_0$$

都可以分解并证明相连图展开定理。图形系数和积分的计算分别在两个附录中讨论。

这个模型中传播子含有温度, 而裸相互作用与温度无关。高阶顶角通过传播子依赖于温度, 其后果之一是自能图中与动量无关的部分将使临界点移动。为了计入这一点, 宜将这部分自能图贡献并入 r_0 。这个“质量重整化”过程可借助场论中熟知的抵消项实现, 即将 (2.8) 式改写为

$$H = -\frac{1}{2} \int (q^2 + r) \sigma_1^a \sigma_{-1}^a - \frac{1}{2} \int (r_0 - r) \sigma_1^a \sigma_{-1}^a - \frac{u_0}{3} \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) \int \sigma_1^a \sigma_2^b \sigma_3^c \sigma_{-1-2-3}^d, \quad (2.9)$$

同时要求准确传播子 $G(q, r)$ 在 $q \rightarrow 0$ 时仍满足类似 (2.7) 式的关系:

$$\chi_T \sim G(0, r) = \frac{1}{r} \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (2.10)$$

自能图中与动量无关部份和 (2.9) 式第二项的贡献抵消, 抵消方程就是 r 的定义。计算复杂图形包含的自能图时, 应引入动量为零时的减项, 如 (附 12) 式。本文中准确传播子和“质量重整化”后的自由传播子 $G(q, r) = (q^2 + r)^{-1}$ 都用同一符号, 其区别可以从行文看出。骨架图是指用准确传播子构成的图。

应当指出, 这个经典场论和统计模型在临界点附近的等价性尚未严格证明。最近有人^[5]讨论了 $n=1$ 的情形。

三、四端顶角的骨架图分析

本节讨论的四端顶角是指四自旋关联函数扣去不相连图, 切去单粒子外线后的部份 $\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (1234), 这里未明显写出对 r 的依赖。由于 σ 是可对易的经典量, Γ 对于自旋角标和动量完全对称; 我们把自旋角标和动量拴在一起 (即 $1 \longleftrightarrow \alpha, 2 \longleftrightarrow \beta$ 等), 共有 $4!$ 个置

换. 实际上它们应该分别对称化, 共 $(4!)^2$ 个置换. 后面讨论 $r=0$ 的向前散射幅时就要单独对自旋角标作对称化. 由每个四端顶角置换外线得出的 $4!$ 个图可分成三组: $(12; 34)$, $(13; 24)$ 和 $(14; 23)$, 相应于场论中的 s, t, u 三道. 有些图按其中一道可约(切断两根内线即可分成不相连的部份), 有些图完全不可约, 按一道可约的图形按另两道均不可约. 某个按一道可约的复杂图形其分图允许按另外道可约. 这种每个分图都按一道可约的图称为拼花(parquet)图. 按某一道可约图形的总和记为 $\Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12; 34)$, 同一道中不可约图形的总和记为 $I^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12; 34)$, 图 1 中用方块表示. $\Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}$ 可由 $I^{\alpha\beta;\gamma\delta}$ 迭代而得(图 1).

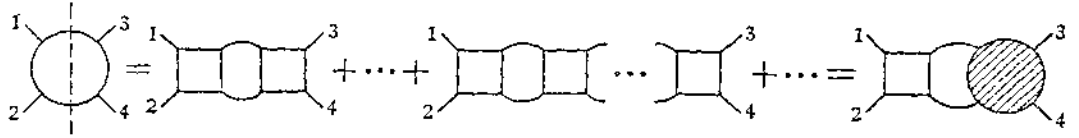


图 1

若分出最左端的方块, 对剩下的 I 求和, 就得到完全对称化的总顶角 $\Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-5-634)$:

$$\Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12; 34) = -36 \int I^{\alpha\beta;\mu\nu}(12; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-5-634), \quad (3.1)$$

式中未明显标出保证动量守恒的 δ 函数, 系数见附录 1 的“拼图法”. 总顶角又通过各道可约的顶角和三道都不可约的图形[最低的是四阶图 3(h)]之和 R 表示:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}(1234) = & \frac{1}{3} (u_0 + R) \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) + \frac{1}{3} [\Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12; 34) \\ & + \Gamma^{\alpha\gamma;\beta\delta}(13; 24) + \Gamma^{\alpha\delta;\beta\gamma}(14; 23)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

以(3.1)式代入此式得(图 2)

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}(1234) = & \frac{1}{3} (u_0 + R) \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) - 12 \int I^{\alpha\beta;\mu\nu}(12; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-5-634) \\ & - 12 \int I^{\alpha\gamma;\mu\nu}(13; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\beta\delta}(-5-624) \\ & - 12 \int I^{\alpha\delta;\mu\nu}(14; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\beta\gamma}(-5-623). \end{aligned} \quad (3.3)$$

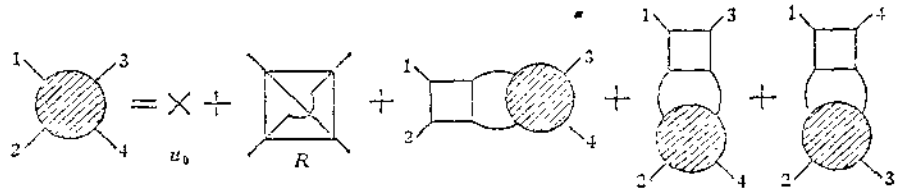


图 2

如果从(3.3)式右端分出按一道不可约的部分:

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12; 34) = & \frac{1}{3} (u_0 + R) \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) - 12 \int I^{\alpha\gamma;\mu\nu}(13; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\beta\delta}(-5-624) \\ & - 12 \int I^{\alpha\delta;\mu\nu}(14; 56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\beta\gamma}(-5-623), \end{aligned} \quad (3.4)$$

就可写成通常的 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程):

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}(1234) = I^{\alpha\beta;\gamma\delta}(12;34) - 12 \int I^{\alpha\beta;\mu\nu}(12;56) G(5) G(6) \Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-5-634). \quad (3.5)$$

当然也可以通过另外两道不可约的 I 写出类似的方程.

在临界现象中要讨论总四端顶角的两端极限:

1. 由于关联长度趋向无穷而变得重要的长波极限 $P = 0$ 时逼近临界点 $r \rightarrow 0$ 的顶角 U_R :

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}(0000; r) \equiv \frac{1}{3} U_R \Delta(\alpha\beta\gamma\delta); \quad (3.6)$$

2. 临界点 $r = 0$ 上 $P \rightarrow 0$ 时的向前散射振幅 $\Gamma(P)$:

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{P}{2} \frac{P}{2}; -\frac{P}{2} -\frac{P}{2}\right) \equiv \frac{1}{3} \Gamma(P) \Delta(\alpha\beta\gamma\delta). \quad (3.7)$$

用骨架图分析可从上述定义得到 $\frac{\partial U_R}{\partial r}$, $\frac{\partial \Gamma(P)}{\partial P}$, 再与标度关系^[3]:

$$\frac{\partial U_R}{\partial r} / U_R = \frac{4-d-2\eta}{2-\eta} \frac{1}{r}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \Gamma(P)}{\partial P} / \Gamma(P) = (4-d-2\eta)/P \quad (3.9)$$

比较, 即可完全确定仍包含在表达式中的 U_R 和 $\Gamma(P)$. 这里关键的是事先并不要求耦合常数 u_0 是小量, 而当物理系统接近四维(ε 小)或内部自由度 n 很大时 U_R 和 $\Gamma(P)$ 确是小量.

先讨论 U_R 的骨架图展开.

为叙述清楚, 先保留到 U_R^2 项. 在 (3.1) 式中令外动量为零并作“图形微商”: 先对不可约部分之间的传播子微商, 由于其位置任意, 两端无穷系列求和又得 Γ ; 再分别对两端及中间任意的 I 微商. 这样求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}(0) &= -36 \int \Gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(00q-q) \frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) \Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-qq00) \\ &\quad - 36 \int \Gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(00q-q) G^2(q) \frac{\partial}{\partial r} I^{\mu\nu;\gamma\delta}(-qq;00) \\ &\quad - 36 \int \frac{\partial}{\partial r} (I^{\alpha\beta;\mu\nu}(00;q-q)) G^2(q) \Gamma^{\mu\nu\gamma\delta}(-qq00) \\ &\quad + 432 \int \Gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(00q-q) G^2(q) \frac{\partial}{\partial r} (I^{\mu\nu;\rho\tau}(-qq;k-k)) G^2(k) \Gamma^{\rho\tau\gamma\delta}(-kk00). \end{aligned} \quad (3.10)$$

由 (3.3) 式看出, 准到 U_R^2 级, $\Gamma(00q-q)$ 与 $\Gamma(0)$ 的差别仅在于顶角间的传递动量不同, 故有

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta\mu\nu}(00q-q) &\approx \frac{1}{3} U_R \Delta(\alpha\beta\gamma\delta) \\ &\quad - \frac{4}{3} U_R^2 (I(q, r) - I) (\Delta_2(\alpha\mu; \beta\nu) + \Delta_2(\alpha\nu; \beta\mu)), \end{aligned} \quad (3.11)$$

这里利用了两个附录中的张量收缩公式和积分符号. 只要达到所要求的量级, 就可将各顶角换成 U_R 并提到积分号外, 顶角的自旋足标收缩后给出相应的对称张量. 求高阶展开

时,一直要迭代到出现相应的骨架图,然后换成 U_R 并收缩足标. 下面的计算都是这样作的. 据(3.4)式对 I 的微商是

$$\frac{\partial}{\partial r} I^{\alpha\beta;\mu\nu}(00; q-q) = -\frac{4}{3} U_R^2 \frac{\partial}{\partial r} (I(q, r)) (\Delta_2(\alpha\mu; \beta\nu) + \Delta_2(\alpha\nu; \beta\mu)). \quad (3.12)$$

略去(3.10)式中最后的 U_R^4 项,将以上二式代入得

$$\frac{\partial}{\partial r} \Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}(0) = -4\Delta_2(\alpha\beta; \gamma\delta) U_R^2 I' + 64\tau_3(\alpha\beta; \gamma\delta) U_R^3 (I'_b - II').$$

三道的类似式子合并就是进行对称化,结果是

$$U'_R/U_R = -4(n+8) U_R I' + 64(5n+22) U_R^3 (I'_b - II'). \quad (3.13a)$$

如果在 $d=4-\varepsilon$ 维计算积分并与标度关系(3.8)式比较,即可求出重整化顶角:

$$U_R = \frac{2\pi^2}{n+8} \varepsilon \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} + C - \ln \frac{4\pi}{r} \right) \right]. \quad (3.14)$$

上式计算中用准到 ε^2 级的临界指数 η , 它很容易由准到 ε 的 $\Gamma(P)$ 求出. C 是欧拉常数. 如果不假定 ε 小,则 U_R 仍然反比于 $(n+8)$, 当内部自由度很大时, U_R 至少还是一级小量.

为求得下一级展开式,必须保留到 U_R^4 项,同时计入不可约骨架图 3(h) 的贡献. 结果是

$$\begin{aligned} U'_R = & -4(n+8) U_R^3 I' + 64(5n+22) U_R^3 \int \left[\frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) (I(q, r) - I) \right. \\ & + G^2(q) \frac{\partial}{\partial r} I(q, r) \Big] - 256(n^2+20n+60) U_R^4 \int \left[\frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) (I(q, r) - I)^2 \right. \\ & + 2G^2(q) (I(q, r) - I) \frac{\partial}{\partial r} I(q, r) \Big] \\ & - 256(3n^2+22n+56) U_R^4 \int \left[\frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) (I(q, r) - I)^2 \right. \\ & + 2G^2(q) (I(q, r) - I) \frac{\partial}{\partial r} I(q, r) \Big] \\ & - 1024(n^2+20n+60) U_R^4 \int \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) (I(k, r) - I) G(k) (G(k+q) - G(k)) \right. \\ & + G^2(q) \left[\frac{\partial}{\partial r} (G(k) G(k+q)) (I(k, r) - I) + G(k) G(k+q) \frac{\partial}{\partial r} I(k, r) \right] \Big\} \\ & - 128(3n^2+22n+56) U_R^4 \int \left[2 \frac{\partial}{\partial r} (G^2(q)) (I(k+q, r) - I(k, r)) G^2(k) \right. \\ & + G^2(q) G^2(k) \frac{\partial}{\partial r} I(k+q, r) \Big] - 1536(5n+22) U_R^4 I'_b. \end{aligned} \quad (3.15)$$

这里的各项依次对应骨架图 (a), (b), (c_1), (c_2), (f), (g), (h) (图 3) 的贡献. 逐项比较图形和积分,可将骨架图的微商规则归纳如下: 依次对各双传播子微商,同时由不被微商的传播子中扣除被微商的传播子动量为零的减项.例如,第二项对应图 3(b),对第一双可约线微商时,将右侧的环换成差 $I(q, r) - I$.

归并整理(3.15)式中的积分, 引入记号: $A = rI'$, $B = r(I'_b - II')$, $E = r(I'_s - 2II'_s + I'I')$, $F = r(I'_f - (II'_b)' + I'I')$, $G = r(I'_g - 2I'I'_b)$, $H = rI'_h$. 这里括号中的积分可能对数发散, 但每个记号都是与动量截断无关的组合. 因此, U_R 及由它得出的各种物理推论都明显地与截断无关. 用这些记号可将包括(3.13a)式的下一级展开式写成:

$$\begin{aligned} rU'_R/U_R &= (4 - d - 2\eta)/(2 - \eta) = \\ &= -4(n+8)U_R A + 64(5n+22)U_R^2 B \\ &\quad - 512(2n^2 + 21n + 58)U_R^3 E \\ &\quad - 1024(n^2 + 20n + 60)U_R^4 F \\ &\quad - 128(3n^2 + 22n + 56)U_R^5 G \\ &\quad - 1536(5n+22)U_R^6 H. \end{aligned} \quad (3.13b)$$

现在讨论 $\Gamma(P)$ 的骨架图展开.

对 $\Gamma(P)$ 的分析方法与 U_R 相像, 但必须注意到, 对动量而言, 三道中只有一道描述向前散射, 而对自旋角标要进行对称化. 因此定义(3.7)式中的动量和自旋不再一齐置换: 动量只取一道, 自旋角标仍有三种组合, 即

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}; -\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right) &= \frac{1}{3} (u_0 + R)\Delta(\alpha\beta\gamma\delta) + \frac{1}{3} \left[\Gamma^{\alpha\beta;\gamma\delta}\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}; -\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma^{\alpha\gamma;\beta\delta}\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}; -\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right) + \Gamma^{\alpha\delta;\beta\gamma}\left(\frac{P}{2}, \frac{P}{2}; -\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

对 P 的图形微商规则与对 r 的情形类似, 再利用与(3.11)和(3.12)式相当的展开式, 并和标变关系(3.9)式比较, 求得

$$\frac{P\Gamma'(P)}{\Gamma(P)} = 4 - d - 2\eta = -4(n+8)\Gamma(P)A_P + 64(5n+22)\Gamma^2(P)B_P, \quad (3.17)$$

这里, $A_P = P\Gamma'(P)$, $B_P = P(I'_b(P) - I(P)I'(P))$. 对于 ε 展开, 准到 ε^1 项有:

$$\Gamma(P) = \frac{2\pi^2\varepsilon}{n+8} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} + C - 2 - \ln \frac{4\pi}{P^2} \right) \right]. \quad (3.18)$$

此式应与(3.14)式对比.

可以看出, (3.13)和(3.17)式中对于空间维数 d 和 U_R , $\Gamma(P)$ 小的物理原因都没有事先规定, 推导中也没有利用裸耦合常数 u_0 的性质. 如果认为 u_0 是小量, 可直接写出 U_R 和 $\Gamma(P)$ 的微扰展开式. 这时图 3 中的非骨架图(c), (d), (i)和(j)也应计入. 微分时认为 u_0 是常数, 然后将 u_0 作为 U_R (或 $\Gamma(P)$) 的展开式代回去, 这样得到的结果与(3.13), (3.17)式完全相同. 由于必须要求 u_0 是小量这一逻辑上的弱点, 加之不能自然得出与动量截断无关的积分组合, 我们认为骨架图展开法更好一些.

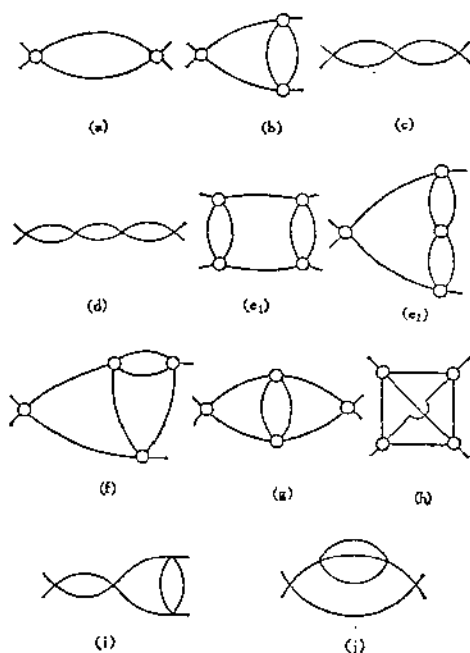


图 3

这里 $b = (4 - d - 2\eta)/(2 - \eta)$, 至此我们只利用了 U_R 是小量这一事实, 对于其原因完全没有具体化, 所以 (4.3) 式有比 ε 展开更广的适用范围. 对于 ε 展开, 将各积分的数值代入并利用 η 的表达式 (4.10), 求出

$$1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{n+2}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{3(n+2)(n+3)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + (n+2)\left[\frac{55n^2 + 268n + 424}{2(n+8)^5} - \frac{18\zeta(3)(5n+22)}{(n+8)^4}\right]\varepsilon^3. \quad (4.4)$$

值得注意的是, (4.4) 式既是对 ε 的展开, 又是对 n^{-1} 的展开. (4.3) 式中 b^2 和 b^3 项的系数已不含有 n 的零次项, 具体算出积分后 (4.4) 式中又消去了 ε^3/n 项. 高阶项中能否继续补偿 n^{-1} 的相应方次, 尚有待探讨. 最近有人^[6]用其它方法得到 γ 的 ε^3 项, 但计算本身还未发表.

利用三端顶角还可以定义极化环, 它与比热成正比^[7]:

$$c_p \sim (r_0 - r_{0c})^{-\alpha} \sim r^{-\alpha/r} \sim \Pi(r) = n \int G^2(p) A_0(p, r). \quad (4.5)$$

上式右端可以利用骨架图展开

$$A_0(p, r) = A_0(0, r) + 96(n+2)U_R^2 \int G^2(q)(I(p+q, r) - I(q, r))A_0(q, r)$$

[此式不难从 (4.1) 式推得] 算出来, 再与左端的推论

$$\Pi''/\Pi' = -(1 + \alpha/\gamma)/r \quad (4.6)$$

比较, 可得

$$1 + \frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{rI''}{I'} + 8(n+2)U_R A - 96(n+2)U_R^2 r \left[\frac{I''}{I'} - \frac{I'_R I''}{(I')^2} - 2II' \right]. \quad (4.7)$$

计算第一项时须注意图 3(a) 和 (j) 两者的贡献. 在 ε 展开中出现两个与动量截断无关的积分组合, 结果得到

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{4-n}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{n+2}{(n+8)^2} \left[\frac{5}{2} - \frac{3(3n+14)}{n+8} \right] \varepsilon^2. \quad (4.8)$$

与 (4.4) 式类似, 此式既是对 ε 也是对 n^{-1} 的展开.

为计算 η , 在 Dyson 方程 $G^{-1} = p^2 + r - \Sigma(p, r)$ 中令 $r = 0$, 并与 (1.2) 式比较, 得 $p^{2-\eta} = p^2 - \Sigma(p, 0)$. 对于四端相互作用, 不可约自能部份 Σ 可通过四端顶角 Γ 表示^[5] [图 5(a)]. 明显写出自旋角标, 略去与 p 无关的项, Dyson 方程可改写为

$$p^{2-\eta} \delta_{\alpha\beta} = p^2 \delta_{\alpha\beta} - 32u_0 \Delta(\alpha\gamma\delta\rho) \int G(p-k)G(k-q)G(q)\Gamma^{\beta\gamma\delta\rho}(p-k, k-q, q, -p),$$

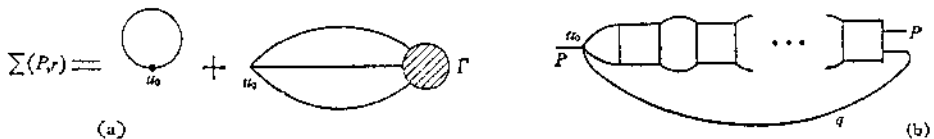


图 5

利用与第三节相同的方法实现图形微商. 注意到最右端不是 I , 而是裸顶角 u_0 [图 5(b)], 因此, 没有相应于 (3.10) 式的第三项, 同时应从第一项中扣去 I 与 u_0 之差. 由 (3.4) 式有

$$I^{\alpha\gamma\delta\rho}(p, -q; k-p, q-k) = \frac{u_0}{3} \Delta(\alpha\gamma\delta\rho) - \frac{4}{3} \Gamma^2(p-q)[I(k)\Delta_2(\alpha\delta; \gamma\rho) + I(p+q-k)\Delta_2(\alpha\rho; \gamma\delta)],$$

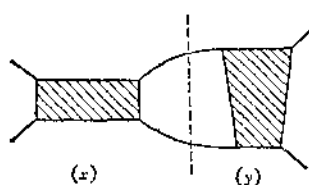


图 6

图的对称性质)。如果分图系数 $C_x(1)$ 和 $C_y(1)$ 已知, 则

$$C_{xy}(1) = [D_x C_x(1)] \cdot [D_y C_y(1)] \cdot (C_i^*)^2 T. \quad (\text{附 } 5)$$

这里系数 D 反映分图所处道的权重. 图 6(x) 在水平道权重 $D=1/3$, 在垂直道 $D=2/3$; 图 6(y) 在垂直道 $D=2/3$, 在水平道中由于左右不对称, 每个具体拼法只有 $D=1/6$. 完全对称分图 $D=1$. 如果原图左右对称, 则 $T=1$, 否则 $T=2$. $C_i^*=6$ 是四端分图中选两根外线的组合数. 以图 3(i) 为例, 它可由两个 3(a) 图拼成, 因而

$$C_i(1) = \left[\frac{1}{3} C_x(1) \right] \cdot \left[\frac{2}{3} C_x(1) \right] \times 72 = 20736.$$

$n>1$ 时先考虑给定自旋角标的一种具体情况. 这时原图系数仍由 (附 5) 给出, 其中 $C(1)$ 换成 (附 4) 式的 $C(n)$ 时, $P(n)$ 须改用未对称化前的张量; 最后结果再对称化. 垂直道中 $D=2/3$ 时, 可把待求和的角标的两种配置方式明显写出, 并改用 $D=1/3$. 仍以图 3(i) 为例,

$$\left[\frac{1}{3} C_x(1) \frac{\Delta_1(\alpha\beta; \mu\nu)}{9} \right] \left[\frac{1}{3} C_x(1) \frac{\Delta_1(\mu\nu; \nu\delta) + \Delta_2(\mu\delta; \nu\nu)}{9} \right] \times 72 = 256 \omega_4(\alpha\beta; \nu\delta),$$

对称化后有 $C_i(n) = 256(3n^2 + 22n + 56)$. 由于顶角部分的定义包含了对称张量和因子 $1/3$, 骨架图的系数计算就只剩下相应微扰论图形的系数 $C(1)$. 例如 (3.10) 式的系数就是 $C_x(1) = 36, C_e(1) = 432$.

附录 2 若干积分

计算积分时引入 d 维球坐标系, 按所需精确度对 ϵ 展开. 发散积分中采用截断动量 Λ , 保留 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时不趋向零的项. 积分足标与相应图形的标号一致. 积分的微商往往比较容易算. 这里列出一部分积分的定义和正文中用到的计算结果. 下面公式中的 $L = \Lambda/\sqrt{r}$, 欧拉常数 $C = 0.577216$, 黎曼函数 $\zeta(3) = 1.202057$, 积分 $C_1 \equiv \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2 - x + 1} dx = 1.171954$.

$$I(p, r) \equiv I_a(p, r) \equiv \int G(q) G(p+q) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + 2 \ln L + \frac{\sqrt{p^2 + 4r}}{p} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4r} - p}{\sqrt{p^2 + 4r} + p} \right],$$

$$I \equiv I_a(0, r) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \ln L - 1 + \frac{\epsilon}{2} \left[(2 \ln L - 1) \left(1 - C + \ln \frac{4\pi}{r} \right) + \frac{\pi^2}{6} - 2(\ln L)^2 \right] \right\}, \quad (\text{附 } 6)$$

$$I(p) \equiv I_a(p, 0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left(2 \ln \frac{\Lambda}{p} + 1 \right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} (\ln 4\pi - C) \right] + \epsilon \left[\frac{3}{2} - 2 \ln p + \ln \Lambda + (\ln p)^2 - (\ln \Lambda)^2 \right] \right\}.$$

$$I_b(p, r) \equiv \int_a G\left(q - \frac{p}{2}\right) G\left(q + \frac{p}{2}\right) I(q, r),$$

$$I_b \equiv I_b(0, r) = -\frac{1}{(4\pi)^4} [1 + C_1 - 2(\ln L)^2], \quad (\text{附 } 7)$$

$$I'_b \equiv \frac{d}{dr} I_b(0, r) = \frac{1}{(4\pi)^4 r} \left\{ -2 \ln L + \epsilon \left[C_1 - \frac{\pi^2}{12} + 2 \left(C - \ln \frac{4\pi}{r} - \frac{1}{2} \right) \ln L + (\ln L)^2 \right] \right\},$$

$$I'_0 = \frac{1}{(4\pi)^4 r} [1 + 2C_1 - 4(\ln L)^2]. \quad (\text{附 } 8)$$

$$I'_1 = \frac{1}{(4\pi)^4 r} [C_1 - 2 \ln L - 2(\ln L)^2]. \quad (\text{附 } 9)$$

$$I'_2 = \frac{1}{(4\pi)^4 r} [2 - 4(\ln L)^2]. \quad (\text{附 } 10)$$

$$I'_3 = -\frac{6}{(4\pi)^4 r} \zeta(3). \quad (\text{附 } 11)$$

$$I_i \equiv \int G^2(k) I(q, r) [G(q+k) - G(q)],$$

$$I_i = \frac{1}{(4\pi)^2 r} \left(\frac{1}{2} + \ln L \right). \quad (\text{附 } 12)$$

参 考 文 献

- [1] M. E. Fisher, *Rep. Progr. in Phys.*, **30** (1967), 615; L. P. Kadanoff *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **39** (1967), 395; H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford (1971).
- [2] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **B4** (1971), 3174, 3184; *Phys. Rev. Lett.*, **28** (1972), 548; K. G. Wilson, M. E. Fisher, *ibid.*, p. 240.
- [3] K. G. Wilson, J. Kogut, *The Renormalization Group and ϵ Expansion* (Cornell Preprint COO 2220-2) (1972).
- [4] T. Tsuneto, E. Abrahams, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 217; M. J. Stephen, E. Abrahams, *Phys. Lett.*, **44A** (1973), 85.
- [5] J. Hubbard, *Phys. Lett.*, **39A** (1972), 365.
- [6] E. Brèzin *et al.*, *Phys. Lett.*, **44A** (1973), 227.
- [7] A. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *ЖЭТФ*, **46** (1964), 994.
- [8] 阿布里科索夫等, 统计物理学中的量子场论方法, 科学出版社 (1963), 第 90—91 页.