

机械力学

下 册



重庆大学等八院校合编

下 册 目 录

第十八章 另件变形计算的能量法

§ 18—1	变形能的概念	1
§ 18—2	变形能的计算	2
§ 18—3	用图形互乘法计算另件的变形	7
§ 18—4	用能量法计算另件变形的实例	13
§ 18—5	力法及其正则方程式	20

第十九章 液压机工作缸强度计算

§ 19—1	缸壁强度计算	29
§ 19—2	工作缸底部的强度计算	34
§ 19—3	组合厚壁园筒概述	35

第二十章 交变应力下另件的强度计算

§ 20—1	交变应力的基本概念	37
§ 20—2	持久极限及其影响因素	40
§ 20—3	另件的疲劳强度校核	46
§ 20—4	提高抗疲劳强度的一些措施	51

第二十一章 电测实验应力分析

§ 21—1	电测应力分析在工程上的应用	53
§ 21—2	电阻应变测量的基本原理	54
§ 21—3	应变—应力的测定分析	59
§ 21—4	静态应变测量方法	67
§ 21—5	动态应变测量方法	77
〔附录〕二向应力测定(主应力方向未知)时应变从分析		85

第二十二章 振动基本知识

§ 22—1	锻压生产中的振动现象	91
§ 22—2	自由振动	93
§ 22—3	阻尼对自由振动的影响——衰减振动	97
§ 22—4	受迫振动	101
§ 22—5	振动的利用与隔离	104

第二十三章 压杆的稳定

§ 23—1	压杆的稳定性概念	110
§ 23—2	细长压杆的临界力——欧拉公式	111
§ 23—3	临界应力和欧拉公式应用范围	112
§ 23—4	临界应力的经验公式	113

第十八章 另件变形计算的能量法

§ 18—1 变形能的概念

在工程计算中，常常会遇到较复杂的变形计算问题。例如锻压机械中承受多个载荷的梁、在组合变形下的轴，以及水压机机身，曲柄压机的闭式或开式床身等等。计算这些另件的变形，如果用前面的积分法或查表迭加法，就会十分麻烦，因此，常采用本章所介绍的能量法。能量法的特点是可以直接求出另件某一指定截面处的变形（转角、垂直或水平位移），而不必象积分法那样，需要先求出整个另件的挠曲线方程式以后，再将某一截面处的位置坐标代入，才能求出该位置的变形。用能量法求变形就使得计算工作大大简化。

本章将介绍能量法的一般原理及其应用。

因为本章所讨论的能量法是以另件的变形能为基础的，首先要研究另件的变形能，但是什么是变形能呢？我们知道，当外力作用在弹簧上，弹簧就发生变形（伸长或缩短），当外力去掉，弹簧又恢复原状；在弹簧恢复的过程中，弹簧有对外作功的能力；它的这种能力是由于弹簧在变形的过程中储备了能量的缘故。这种在弹性范围内，由于变形而引起的能量，就称为弹性变形能。

对于一般另件，只要它在弹性范围内，也象弹簧一样，也能储备变形能。当另件受外力作用而变形，外力作用点沿着作用力方向产生位移，此外力就作功，设此功为 A 。如果外力是极其缓慢增加的，即静力加载，根据能量守恒定律，此时外力所作之功，在数值上就等于储备在另件内的变形能 U ，即：

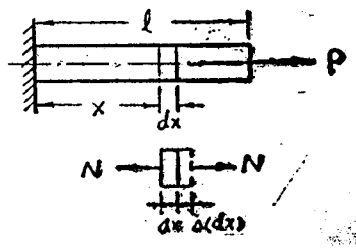
$$A = U \quad (18-1)$$

§ 18—2 变形能的计算

在计算另件的变形能时，我们假设另件在弹性范围内，服从虎克定律，即载荷与变形之间为线性关系。现在分别讨论各种载荷形式下的变形能。

（一）轴向拉压时的变形能

图(18—1)是一受拉另件，它承受的轴向载荷是由零缓慢增加至 P 值的，如果截取距左端 x 处，长为 dx 的微段，则此微段所受之内力为 N ，伸长为 $\Delta(dx)$ ，因为载荷和变形都是同时缓慢增加的，因此，此时外力所作之功，即其变形能为：



图(18—1) 受拉另件

$$du = \frac{1}{2} N \cdot \Delta(dx)$$

由虎克定律

$$\Delta(dx) = \frac{N dx}{EF}$$

代入得

$$du = \frac{N^2 dx}{2EF}$$

又由平衡条件, 内力 $N = P$ 则整杆的变形能:

$$U = \int_0^l du = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EF} = \frac{P^2 l}{2EF} \quad (18-2)$$

(二) 扭转时的变形能

在受扭的另件上截取 dx 微段, 在扭矩 M_n 的作用下, 其相对扭转角为 $d\phi$, 同拉压的情况类似, 此时微段 dx 的变形能有:

$$du = \frac{1}{2} M_n d\phi$$

又由

$$d\phi = \frac{M_n dx}{GJ_p} \quad \text{代入得}$$

$$du = \frac{M_n^2 dx}{2GJ_p}$$

整段的变形能为:

$$U = \int_0^l du = \frac{M_n^2}{2GJ_p} \int_0^l dx = \frac{M_n^2 l}{2GJ_p} \quad (18-3)$$

(三) 纯弯曲时的变形能

在受纯弯曲的另件上取微段 dx , 如图 (18-2) 所示, 其变形能为:

$$du = \frac{1}{2} M d\alpha$$

又由第八章式 (8-4) 知:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}$$

而

$$dx = \rho d\alpha \quad \text{所以}$$

$$d\alpha = \frac{M dx}{EJ_z}$$

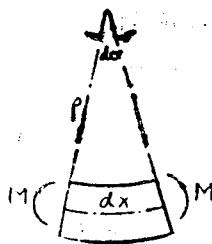


图 (18-2)
纯弯曲另件上
的微段

代入得

$$du = \frac{M^2 dx}{2EJ_z}$$

整段梁的变形能为

$$U = \int_1^l du = \int_1^l \frac{M^2 dx}{2EJ_z} = \frac{M^2 l}{2EJ_z}$$

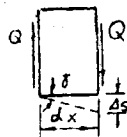
(四) 剪切时的变形能

图(18—3)所示长为 dx 的微段上承受剪力 Q 的作用, 小矩形变为菱形, 如图中虚线所示, 其绝对剪切位移为 ΔS , 变形规律服从虎克定律。

$$\Delta S = \frac{Q dx}{GF}$$

式中 G 为剪切弹性系数, F 为剪力作用面积, 在此微段内的变形能在数值上等于剪力 Q 所作之功, 即

$$du = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta S = \frac{Q^2 dx}{2GF} \quad (18-5)$$

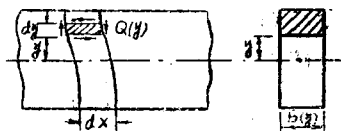


图(18—3)
承受剪力作用的小微段

(五) 梁弯曲时剪切引起的变形能

现截取梁上为 dx 的微段, 现研究此微段由于弯曲剪切引起的变形能, 因为在梁横截面上的剪应力 τ 不是均匀分布的。它在中性轴处最大, 两侧距中性轴最远处为 O , 见第八章 § 3—3, 因此需截取一距中性轴为 y , 长为 dx , 宽为 $b(y)$, 厚为 dy 的小矩形单元体来研究, 此单元体承受的剪力为 $Q(y)$, 在此处的剪应力为 τ , 作用面积为 $F = b(y) \cdot dy$ 即此面积上的剪力为 $Q(y) = \tau \cdot b(y) dy$, 代入(18—5)式得:

$$\begin{aligned} du &= \frac{Q^2(y) dx}{2GF} \\ &= \frac{[\tau \cdot b(y) dy]^2 dx}{2G \cdot b(y) dy} \\ &= \frac{1}{2G} \tau^2 b(y) dy dx \end{aligned}$$



图(18—4)

计算弯曲时剪切引起的变形能

计算在此微段内的变形能, 即对整个横截面积积分, 此时 dx 不变为常量

$$du = \frac{1}{2G} \tau^2 b(y) dy \cdot dx = \frac{dx}{2G} \tau^2 b(y) dy$$

又由 $\tau = \frac{Q(x) S(y)}{b(y) J_z}$ 式中 $Q(x)$ 为微段横截面上的剪力, 在积分式中此时也是常量

$$du = \frac{dx}{2G} \left[\left(\frac{Q(x) \cdot S(y)}{b(y) J_z} \right)^2 b(y) dy \right] = \frac{1}{2G} \frac{Q^2(x) dx}{J_z^2} \int \frac{S^2(y)}{b(y)} dy$$

将上式改写成剪切变形能的一般形式:

$$du = \frac{Q^2(x) dx}{2GF} \cdot \frac{F}{J_z^2} \int \frac{S^2(y) dy}{b(y)}$$

$$\text{令} \quad K = \frac{F}{J_z^2} \int \frac{S^2(y) dy}{b(y)} \quad (18-6)$$

K是只与截面形状和尺寸有关的不名数称为剪切截面形状系数, 上式即为

$$du = K \frac{Q^2(x) dx}{2GF}$$

整段梁的弯曲剪切变形能

$$U = \int_1 du = \int_1 K \frac{Q^2(x)}{2GF} dx \quad (18-7)$$

现在来研究剪切截面形状系数k 之值。

(1) 矩形

设矩形高为h, 宽为b, 则

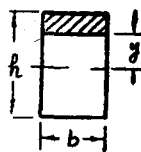
$$F = bh \quad J_z = \frac{bh^3}{12}$$

S(y) 为 y 以上面积对中性轴的静矩

$$S(y) = F(y) \cdot y_c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

代入 (15-6) 式, 得

$$\begin{aligned} K &= \frac{F}{J_z^2} \int \frac{S^2(y) dy}{b(y)} \\ &= \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12} \right)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 dy}{b} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$



图(18-5)
矩形截面
的K值

(2) 圆形

半径为r的圆形截面, 如图(18-6)所示, 设mn弦至中性轴的距离为y, 现计算mn弦以外面积对中性轴的静矩,

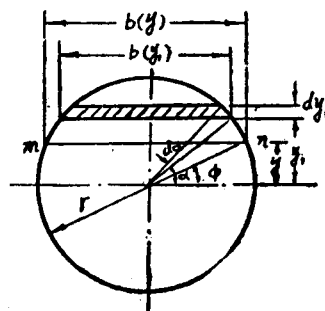
$$S(y) = \int_F y_1 dF = \int_y^r y_1 b(y_1) dy_1$$

求上式积分时, 引用角 α 为变量

$$y_1 = r \sin \alpha \quad dy_1 = r \cos \alpha d\alpha \quad b(y_1) = 2r \cos \alpha$$

代入得

$$\begin{aligned} S(y) &= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} r \sin \alpha \cdot 2r \cos \alpha \cdot r \cos \alpha d\alpha \\ &= 2r^3 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = 2r^3 \left| -\frac{\cos^3 \alpha}{3} \right|_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi \end{aligned}$$



图(18—6)
圆形截面K值

$$\text{又由} \quad b(y) = 2r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad dy = r \cos \varphi d\varphi$$

$$F = \pi r^2 \quad z = \frac{\pi r^4}{4}$$

代入(18—6)式得

$$\begin{aligned} K &= \frac{F}{z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{S^2(y) dy}{b(y)} = \frac{\pi r^2}{\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi\right]^2 \cdot r \cos \varphi d\varphi}{2r \cos \varphi} \\ &= \frac{32}{9\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

查积分表得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{故得} \quad K = \frac{32}{9} \times \frac{5\pi}{16} = \frac{10}{9}$$

(3) 工字形和箱形截面。

箱形截面一般可简化为工字形截面, 如按(18—6)式来求K值, 其积分式的数字计算十分烦琐, 因此多按近似公式 $K = \frac{SF}{b_z}$ 来计算。式中S为中性轴一侧截面积对中性轴的静矩, b为中性轴处截面的宽度。

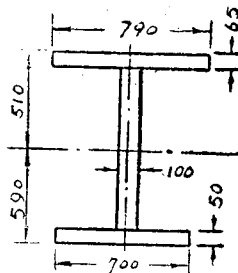
例18—1, J36—250 双点闭式压力机工作台的横截面简化后的尺寸如图(18—7)所示; 现已求出其面积 $F = 1850 \text{ cm}^2$, $z = 3.12 \times 10^6 \text{ cm}^4$, $y_C = 59 \text{ cm}$ 试计算其剪切截面形

状系数K。

先求出对中性轴的静矩S

$$\begin{aligned} S &= F_1 y_1 + F_2 y_2 \\ &= 79 \times 6.5 \times 47.75 + 44.5 \times 10 \times 22.25 \\ &= 24520 + 9900 = 34400 \text{ cm}^3 \\ b &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

代入
$$K = \frac{SF}{b_z} = \frac{34400 \times 1850}{10 \times 3.12 \times 10^6} = 2.04$$



图(18—7)

工字形截面k值计算

必须指出,按近式公式计算K值,对腹板高而薄的截面,与按(18—6)式计算的K值结果相差不大,如上例中按(18—6)式精确计算之 $K = 2.09$;但对腹板矮而厚的截面就会引起较大的误差。

(六) 梁在一般弯曲下的变形能

一般弯曲时,梁内既有弯曲又有剪力,故此时的变形能为弯曲变形能和剪切变形能之和,即

$$U = \int_1 \frac{M^2(x)dx}{2E_z} + \int_1 K \frac{Q^2(x)dx}{2GF} \quad (18-8)$$

仔细的研究表明,对于跨度 l 与梁截面高 h 之比值 $\frac{l}{h} > 5$ 的梁,剪切引起的变形很小,一般可以略去不计,上式可写为

$$U = \int_1 \frac{M^2(x)dx}{2E_z} \quad (18-9)$$

但须注意,当梁分段时,上式中的 $M(x)$ 各段不同,因此要分段积分,再求出变形能的总和。

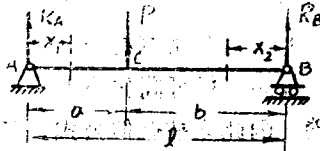
例18—2 简支梁承受一集中力 P ,如图(18—8)所示,试求全梁的变形能。

解:首先求出支反力

$$R_A = \frac{Pb}{l}, \quad R_B = \frac{Pa}{l};$$

AC段
$$M_1 = R_A X_1 = \frac{Pb}{l} X_1$$

BC段
$$M_2 = R_B X_2 = \frac{Pa}{l} X_2$$



图(18—8) 简支梁

故变形能U应积分遍及全梁:

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^a \frac{M_1^2 dx}{2E_z} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx}{2E_z} \\
 &= \frac{1}{2E_z} \left[\int_0^a \left(\frac{Pb}{l} x_1 \right)^2 dx + \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} x_2 \right)^2 dx \right] = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJ_z}
 \end{aligned}$$

(七) 组合变形情况下的变形能

当另件在组合变形的情况下, 即作用的内力同时有轴向力 N 、弯矩 M 、剪力 Q 及扭矩 M_n , 则微段 dx 段的变形能应迭加起来, 即得

$$du = \frac{N^2(x) dx}{2EF} + \frac{M^2(x) dx}{2EJ_z} + k \frac{Q^2(x) dx}{2GF} + \frac{M_n^2(x) dx}{2GJ_p}$$

于是整个另件的变形能为

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EF} + \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ_z} + \int_l K \frac{Q^2(x) dx}{2GF} + \int_l \frac{M_n^2(x) dx}{2GJ_p} \quad (18-10)$$

§ 18-3 用图形互乘法计算另件的变形

在讨论了变形能的计算以后, 现在就可以来讨论另件变形的具体计算方法了, 最简便的方法是图形互乘法。我们先以一个实例来说明它。

例如如图 (18-9) 所示长为 l 的悬臂梁, 在自由端承受一集中载荷 P , 在 A 点产生挠度 y_A , 现根据变形能概念来确定 y_A 。

外力 P 所作之功

$$A = \frac{1}{2} P y_A$$

AB 梁在弯曲变形中所储备的变形能

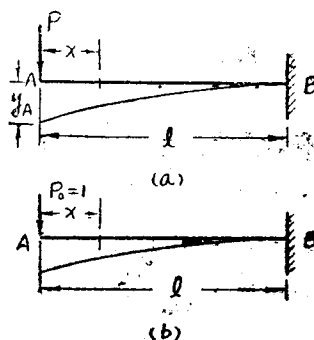
$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ_z}$$

式中 $M(x) = -Px$ 代入得

$$U = \int_0^l \frac{(-Px)^2 dx}{2E_z}$$

又由 (15-1) 式 $A = U$ 即

$$\frac{1}{2} P y_A = \int_0^l \frac{(-Px)^2 dx}{2E_z}$$



图(18-9) 悬臂梁端点挠度

两边消去 $\frac{P}{2}$ 得

$$y_A = \int_0^l \frac{(-Px)(-x)}{FJ_z} dx$$

此式中的 $(-Px)$ 是表示外力 P 所引起的弯矩 M , 而 $(-x)$ 可看作在所求位移处 (A 点) 加上一个单位力 $P_0 = 1$ 所引起的弯矩 M_0 , 如图 (18-9, b) 所示, 即

$M_0 = -1 \cdot x = -x$ 故可写成普遍形式

$$y_A = \int_l \frac{MM_0 dx}{EJ_z} \quad (18-11)$$

上例悬臂梁端点的挠度 y_A 为

$$y_A = \int_0^l \frac{(-Px)(-x)}{EJ_z} dx = \frac{P}{EJ_z} \int_0^l x^2 dx = \frac{Pl^3}{3EJ_z}$$

式中的 “+” 号表示挠度与所加单位力 P_0 的方向相同。

由实例导出的 (18-11) 式能否适用于普遍情况? 下面来证明它就是另件变形的普遍公式, 我们还是以自由端承受集中力 P 的悬臂梁为例, 如图 (18-10) 所示, 设梁上任意点 C 处的挠度为 Δ , 即证明 $\Delta = \int_l \frac{MM_0 dx}{EJ_z}$

首先在加上载荷 P 以前, 先在梁上 C 点加单位力 $P_0 = 1$, 设此时 C 处的挠度为 δ_c , 见图 (18-10, b), 单位力引起的弯矩为 M_0 , 则单位力所作之功 A_0 为 $A_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_c$

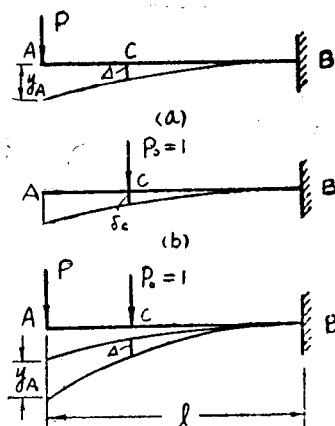
梁内的变形能

$$U_0 = \int_l \frac{M_0^2 dx}{2EJ_z}$$

又由 $A = U$ 得

$$\delta_c = \int_l \frac{M_0^2 dx}{EJ_z}$$

在加上了单位力 P_0 的梁上, 继续在自由端 A 点上加上载荷 P , 此时梁将继续变形, 在 A 点产生挠度 y_A , 在 C 点则为 Δ , 由于 P 是静力加载, 即由零逐渐缓慢增加至 P 的, 此时 P 所作的功为 $\frac{1}{2}Py_A$, 而单位力 P_0 在载荷 P 加上以前就已作用在梁上了, 所以 P_0 是不变的, 故单位力所作之功为 $P_0 \cdot \Delta = 1 \cdot \Delta$



图(18-10)

受集中力作用的悬臂梁

在单位力 $P_0 = 1$ 和载荷 P 共同作用下所作之总功为:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_c + \frac{1}{2} P y_A + 1 \cdot \Delta$$

此时梁内的弯矩为 $M + M_0$ 。故其总变形能为:

$$U = \int_l \frac{(M + M_0)^2 dx}{2EJ_z} = \int_l \frac{M^2 dx}{2EJ_z} + \int_l \frac{MM_0 dx}{EJ_z} + \int_l \frac{M_0^2 dx}{2EJ_z}$$

又由 $A = U$ 即:

$$\frac{1}{2} 1 \cdot \delta_c + \frac{1}{2} P y_A + 1 \cdot \Delta = \int_l \frac{M^2 dx}{2EJ_z} + \int_l \frac{MM_0 dx}{EJ_z} + \int_l \frac{M_0^2 dx}{2EJ_z}$$

上式中, 由于

$$\frac{1}{2} \delta_c = \int_l \frac{M_0^2 dx}{2EJ_z}, \quad \frac{1}{2} P y_A = \int_l \frac{M^2 dx}{2EJ_z}, \quad \text{即得}$$

$$\Delta = \int_l \frac{MM_0}{EJ_z} dx \quad (18-12)$$

由上式可以看出, 要确定另件在某一位置的变形, 只需在该处加 $P_0 = 1$ 的单位力, 计算其弯矩和单位力弯矩 M_0 , 代入公式 (18-12) 计算即可, 这个方法称为单位力法。

仔细研究 (18-12) 式, 发现它还可以进一步简化。在一般等截面梁的情况下, EJ_z 为常数, 故上式可写为

$$\Delta = \frac{1}{EJ_z} \int_l MM_0 dx$$

下面继续分析 $\int_l MM_0 dx$ 表示什么。

设梁的载荷弯矩图如图 (18-11, a) 所示, 单位力弯矩图如图 (18-11, b) 所示, 积分式中的 $Mdx = d\omega$, 即图 (a) 中的阴影面积, 相对应的单位力弯矩 M_0 。由图 (b) 中所示, 可以看出

$$M_0 = x \tan \alpha$$

于是得:

$$\int_l MM_0 dx = \int_l x \tan \alpha d\omega = \tan \alpha \int_l x d\omega$$

此式中 $x d\omega$ 是微面积 $d\omega$ 对原点垂直轴的静矩, 对全梁来说, $\int_l x d\omega$ 则是整个 M 图的面积对原点垂直轴的静矩, 它等于 M 图的整个面积 ω 乘以 M 图的形心到原点轴的距离 x_c , 即

$$\int_l x d\omega = \omega \cdot x_c$$

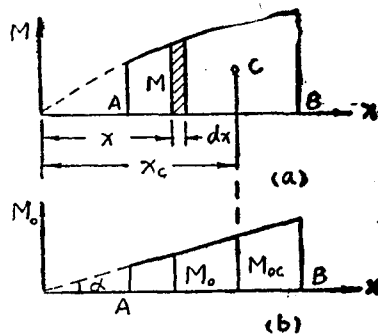


图 (18-11) 图形互乘

所以 $\int_l M M_0 dx = \operatorname{tg} \alpha \int_l x d\omega = \operatorname{tg} \alpha \omega \cdot x_c$

又由图(b)看出 $\operatorname{tg} \alpha \cdot x_c = M_{0c}$ M_{0c} 是对应于载荷弯矩图形心位置的单位力弯矩, 于是得

$$\int_l M M_0 dx = \omega \cdot M_{0c}$$

代入(18-12)式得

$$\Delta = \int \frac{M M_0 dx}{E J_z} = \frac{\omega \cdot M_{0c}}{E J_z} \quad (18-13)$$

即 $\text{位移} = \frac{(\text{载荷弯矩图面积}) \times (\text{对应于弯矩图形心位置单位力弯矩图})}{\text{抗弯刚度}}$

这种将积分运算简化为面积和坐标值相乘, 在习惯上称为图形互乘法。

例18-3 已知 $E J_z$, 求图(18-12)所示悬臂梁自由端的挠度 y_A 和中点的挠度 y_c 。

解: 首先作载荷弯矩图如图(b), 其面积为

$$\omega = \frac{1}{2} P l \cdot l = \frac{1}{2} P l^2$$

其形心C的位置距左端为 $\frac{2}{3} l$ 。

求 y_A 时, 在A点加上一单位力 $P_0 = 1$, 作单位力弯矩图如图(d), 对应于C点坐标的单位力弯矩为

$$M_{01} = \frac{2}{3} l$$

代入(15-13)式, 即得

$$y_A = \frac{\frac{1}{2} P l^2 \cdot \frac{2}{3} l}{E J_z} = \frac{P l^3}{3 E J_z}$$

式中“+”号表示 y_A 的方向与所设单位力 P_0 的方向是一致的。

如果要求中点D的挠度 y_D , 则单位力 $P_0 = 1$ 应加在D点, 如图(e), 作出单位弯矩图如图(f)。对应于C点坐标的单位力矩为

$$M_{02} = \frac{l}{6}$$

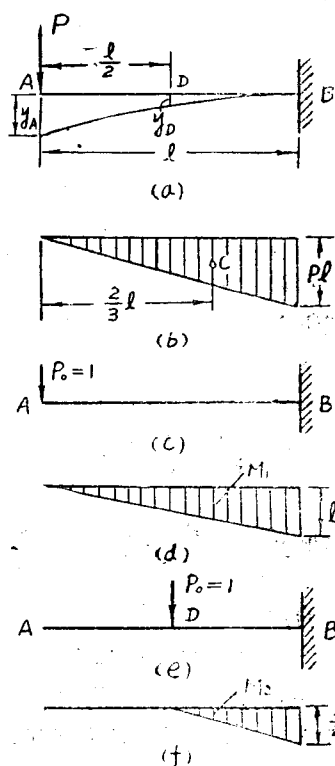


图 (18-12)

用图形互乘法求挠度

代入(18-13)式得

$$y_D = \frac{\frac{1}{2} P l^2 \cdot \frac{l}{6}}{E J_z} = \frac{P l^3}{12 E J_z}$$

必须指出：(18-13)式也适用于一般情况，如要求某一位置的挠度，则所加单位力为 $P_0 = 1$ 的集中力，如要求该处的转角，则单位力应为 $M_0 = 1$ 的力偶矩；所求出位移的符号如与单位力的指向或转向相同时为正号，不同时为负号。

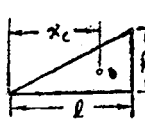
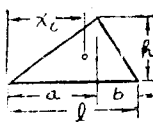
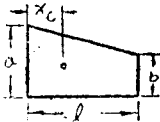
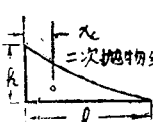
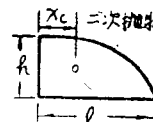
还须注意，如果单位力弯矩不是一连续直线而为一折线，则应分别对每一直线部份按前述方法处理，即将载荷弯矩图的面积，沿单位力弯矩图上的转折点分为两部份，分别求出每一部份载荷弯矩图的面积 ω_1 、 ω_2 和相对应的单位力弯矩座标 M_{c1} 、 M_{c2} ，再将它们的乘积相加起来。

$$\int_l M M_0 dx = \omega_1 M_{c1} + \omega_2 M_{c2}$$

$$\Delta = \frac{\omega_1 M_{c1} + \omega_2 M_{c2}}{E J_z} \quad (18-14)$$

常见的弯矩图图形面积和形心位置如表18-1所示。

表18-1

图形					
面积 ω	$\frac{1}{2} h l$	$\frac{1}{2} l h$	$\frac{1}{2} (a+b) l$	$\frac{1}{3} l h$	$\frac{2}{3} l h$
形心 x_c	$\frac{2}{3} l$	$\frac{1}{3} (l+a)$	$\frac{l}{3} \frac{(a+2b)}{(a+b)}$	$\frac{1}{4} l$	$\frac{3}{8} l$

例18-4 一承受均布载荷 q 的简支梁，已知 E_z ，现用图形互乘法求中点的挠度 y_B 和 B 端之转角 θ_B 。

解：首先求中点的挠度 y_c 。

由于单位力的弯矩图为一折线如图(d)所示。所以应该在转折点处将弯矩图分为两部份如图所示，然后分别计算之

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q l^2}{8} = \frac{q l^3}{24}$$

每部份对应的单位弯矩值如图(d)

$$M_{o1} = M_{o2} = \frac{5}{16} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32} l$$

代入 (15-14) 式得

$$y_c = \frac{\omega_1 M_{01} + \omega_2 M_{02}}{EJ_z} = 2 \cdot \frac{q l^3}{24} \times \frac{5}{32} \frac{1}{EJ_z}$$

$$= \frac{5q l^4}{384 E J_z}$$

y_c 为正值, 表示与所设单位力的指向一致。

现求支座 B 处的转角 θ_B , 此时须在 B 端加一单位力偶矩 $M_0 = 1$, 设其方向为顺时针旋转, 如图 (e) 所示, 此单位力偶矩的弯矩图如图 (f) 为一连续直线, 故不须将载荷弯矩图分为两部分了。其

$$\omega = \frac{2}{8} l \cdot \frac{q l^2}{8} = \frac{q l^3}{12} \quad M_{0c} = -\frac{1}{2}$$

代入 (15-13) 式得

$$\theta_B = \frac{\omega M_{0c}}{EJ_z} = \frac{\frac{q l^3}{12} \cdot (-\frac{1}{2})}{EJ_z}$$

$$= -\frac{q l^3}{24 E J_z}$$

“-” 表示 θ_B 的转向与所设单位力矩的转向相反, 应为反时钟旋转方向。

对于复杂变形的另件, 即同时有轴力 N , 剪力 Q , 弯矩 M , 扭矩 M_n 作用, 式 (18-13) 可以推广写成如下形式, 即

$$\Delta = \frac{\omega M_{0c}}{EJ_z} + K \frac{\omega_Q Q_{0c}}{GF} + \frac{\omega_N N_{0c}}{EF} + \frac{\omega_n M_{nc}}{GJ_p} \quad (18-15)$$

式中 ω , ω_Q , ω_N , ω_n 分别为载荷的弯矩图, 剪力图、轴力图 and 扭矩图面积。

M_{0c} , Q_{0c} , N_{0c} , M_{nc} 分别为各单位力对应各图形心的座标值。

E_z , GF , EF , G_p 分别为抗弯、抗剪、抗压和抗扭刚度。

对于一般细长梁, 即 $\frac{l}{h} > 5$, 此时弯曲是主要的, 计算其弯曲变形可按式 (18-13)。

但对于短而高的梁, 如压力机的上下横梁, 其 $\frac{l}{h} < 5$, 则必须计及剪切的影响, 即

$$\Delta = \frac{\omega M_{0c}}{EJ_z} + K \frac{\omega_Q Q_{0c}}{GF} \quad (18-16)$$

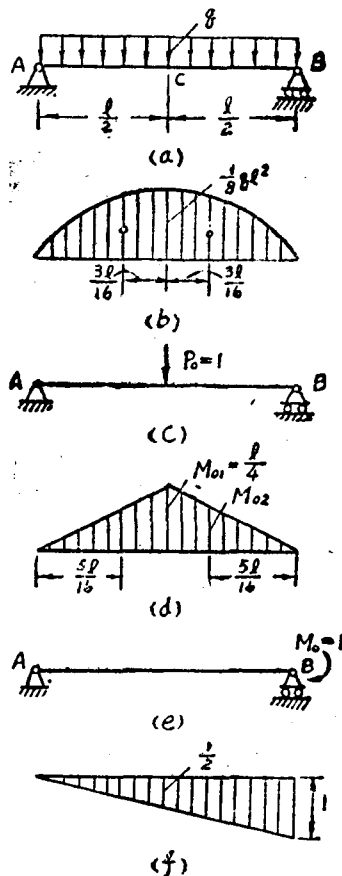


图 (18-13)

用图形互乘法求挠度及转角

§18—4 用能量法计算另件变形的实例

一、J36—250双点闭式压力机工作台变形的计算

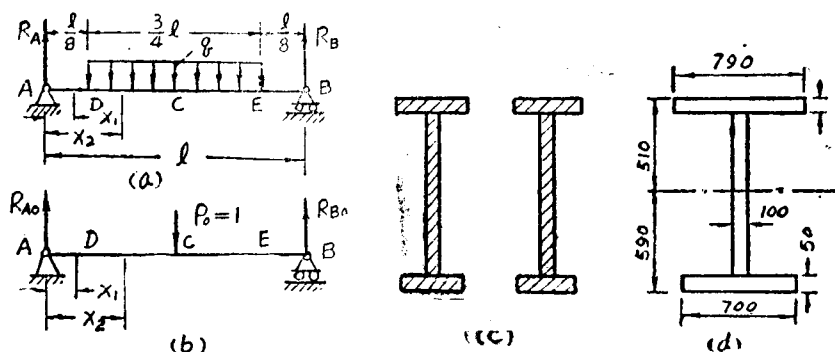
工作台为钢板焊成，对于双点压力机，一般在习惯上假设其工作载荷通过垫板均匀分布在在工作台跨度 $\frac{3}{4}l$ 长度上，若公称压力 $P_g = 250$ 吨，则均布载荷 $q = \frac{P_g}{\frac{3}{4}l} = \frac{4}{3} \frac{P_g}{l}$ 。如图

(18—14)，试求工作台中心的挠度。

解：我们采用单位力法，先推导出中点的挠度公式，然后再将有关数据代入计算。

首先画出载荷图(15—14, a)和加在中点的单位力图，图(18—14, b) 由于此梁短而高，截面高 $h = 1100\text{mm}$ 跨度 $l = 2030\text{mm}$ 故 $\frac{l}{h} = 1.84 < 5$ ，因此，要计及剪切引起的变形。

又由于此梁完全对称，在对全梁积分时，只需积分左边的一半，然后两倍即可。



图(18—14) 工作台中心挠度的计算

$$\text{载荷支反力} \quad R_A = R_B = \frac{P_g}{2}$$

$$\text{单位力支反力} \quad R_{A0} = R_{B0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{AD段} \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{8}$$

载荷引起的剪力和弯矩

$$Q_1 = \frac{P_g}{2} \quad M_1 = \frac{P_g}{2} x_1$$

单位力引起的剪力和弯矩

$$Q_{01} = \frac{1}{2} \quad M_{01} = \frac{x_1}{2}$$

DC 段 $\frac{l}{8} \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$

$$\text{载荷: } Q_2 = \frac{P_g}{2} - q \left(x_2 - \frac{l}{8} \right) = \frac{2}{8} P_g - \frac{4P_g}{3l} x_2$$

$$M_2 = \frac{P_g}{2} x_2 - \frac{q}{2} \left(x_2 - \frac{l}{8} \right)^2 = \frac{1}{2} P_g x_2 - \frac{2}{8} P_g \left(x_2 - \frac{l}{8} \right)^2$$

$$\text{单位力 } Q_{02} = \frac{1}{2} \quad M_{02} = \frac{x_2}{2}$$

代入公式(15—12)得

$$\begin{aligned} f &= \int_1 \frac{MM_0 dx}{EJ_z} + K \int_1 \frac{QQ_0 dx}{GF} \\ &= 2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{M_1 M_{01}}{EJ_z} dx + \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \frac{M_2 M_{02}}{EJ_z} dx + \int_0^{\frac{1}{8}} K \frac{Q_1 Q_{01}}{GF} dx + \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} K \frac{Q_2 Q_{02}}{GF} dx \right\} \\ &= \frac{2}{EJ_z} \left\{ \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{P_g}{2} \cdot \frac{x_1}{2} dx + \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{P_g}{2} x_2 - \frac{2}{8} P_g \left(x_2 - \frac{l}{8} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{x_2}{2} \right) dx \right\} \\ &\quad + \frac{2K}{GF} \left\{ \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{P_g}{2} \cdot \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{8} P_g - \frac{4P_g}{3l} x_2 \right) \cdot \frac{1}{2} dx \right\} \\ &= \frac{397}{24576} \frac{P_g^3}{EJ_z} + \frac{5}{32} K \cdot \frac{P_g l}{GF} \\ &= 0.0162 \frac{P_g^3}{EJ_z} + \frac{5}{32} K \frac{P_g l}{GF} \quad (18-17) \end{aligned}$$

现知有关数据如下:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad G = 8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 \quad l = 203 \text{ cm}$$

$$P_g = 250 \times 10^3 \text{ kg} \quad \text{惯矩 } J_z = 3.12 \times 10^6 \text{ cm}^4 \quad F = 1850 \text{ cm}^2$$

其剪切截面形状系数由例18—1已求出 $K = 2.04$ 代入(18—17)式得

$$\begin{aligned} f &= 0.0162 \times \frac{250 \times 10^3 \times 203^3}{2.1 \times 10^6 \times 3.12 \times 10^6} + \frac{5}{32} \times 2.04 \times \frac{250 \times 10^3 \times 203}{8.1 \times 10^5 \times 1850} \\ &= 5.16 \times 10^{-3} + 10.78 \times 10^{-3} = 15.94 \times 10^{-3} \text{ cm} = 16 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

由上可以看出, 其中弯曲产生的变形为总变形的 $\frac{1}{8}$ 左右, 而剪切变形则达到 $\frac{2}{3}$ 左右, 因此, 在此情况下是不能略去剪切影响的。

二、四立柱单缸液压机上横梁的变形计算

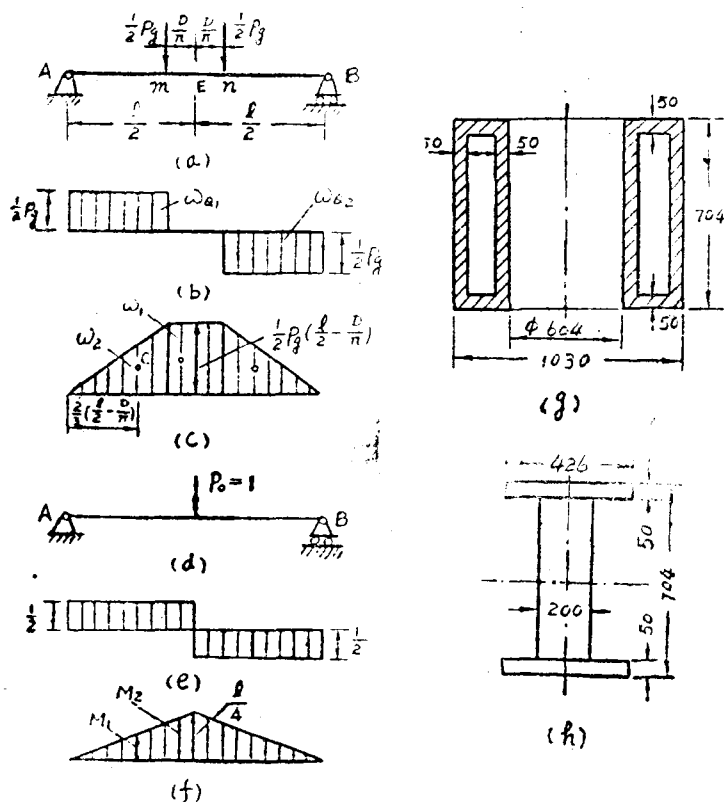
此上横梁可看作一通过轴向对称平面的简支梁, 梁的跨度 l 即为两立柱间的间距, 由于工作缸的直径与梁的跨度是同一数量级, 如果假设载荷作用于梁的中点, 则与实际情况相差太远; 现在一般是认为载荷均匀分布于工作缸凸出的法兰上, 是通过法兰将力传至上横梁的。因此常将公称压力 P_g 假设为两个相等的分力, 分别作用于法兰半圆弧的形心上, 此半圆弧的形心与中线的距离为 $a = \frac{D}{\pi}$, D 为法兰直径, 如图(18—15, a)所示, 现求此上横梁中点的挠度。

解: 采用图形互乘法。先作载荷的剪力图(b), 弯矩图(c), 再作单位力的剪力图(e)和弯矩图(f)。

先计算由剪力在中点引起的挠度 Δ_Q 。

由图(b)得出

$$\omega_{Q1} = \frac{P_g}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{D}{\pi} \right), \quad \omega_{Q2} = -\frac{P_g}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{D}{\pi} \right)$$



图(18—15) 液压机上横梁中点挠度的计算