第29卷 第8期 物 理 学 报 Vol. 29, No. 8
1980年8月 ACTA PHYSICA SINICA Aug., 1980

非平衡统计场论与临界动力学(II)

拉氏场论表述

周光召 郝柏林 于渌
(中国科学院理论物理研究所)

1979年9月17日收到

提 要

本文从闭路格林函数生成泛函的连续积分表示出发,对傅氏变换取单圈近似,求得序参量的有效作用量. 在闭路连续积分中取涨落二级近似,得到临界动力学的拉氏场论表述. 文中指出改进现有理论的可能途径.

一、引 言

在前一篇文章[1]中,从闭路顶角函数的方程出发,通过分出随时间快变和慢变的部分,推导出了包括模-模耦合项在内的宏变量广义朗之万方程. 本文中利用闭路生成泛函的连续积分表示推导临界动力学的拉氏场论表述.

在随机模型中序参量和守恒量均满足广义朗之万方程

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} = K_i(Q) + \xi_i(t), \tag{1.1}$$

这里 $\xi_i(t)$ 是遵从高斯分布的随机力. 高斯过程可通过概率泛函描述[2]. (1.1)式可以看成是高斯过程 $\xi_i(t)$ 向复杂过程 $Q_i(t)$ 的映射,在连续积分中作非线性变换,即可求得描述过程 $Q_i(t)$ 的概率泛函[3]. 更直接的作法是利用连续积分下 δ 函数的归一条件[4]

$$\int [dQ]\delta\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - K(Q) - \xi\right)\Delta(Q) = 1. \tag{1.2}$$

由于(1.2)式中 δ 函数的自变量不是 Q,而是(1.1)式,必须写上泛函雅可比行列式 $\Delta(Q)$,这就是前面提到的非线性变换 $\xi_i \to Q_i$ 的雅可比行列式. 准到常数因子,它等于[3]

$$\Delta(Q) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{\delta K}{\delta Q} dx\right) \tag{1.3}$$

这里 $dx = d\boldsymbol{x}dt$ 是四维积分元. 再把(1.2)式中的 δ 函数通过连续积分表示,变成

$$\int [dQ]\left[\frac{d\hat{Q}}{2\pi}\right]\exp\left(\int dx\left[i\hat{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - K(Q) - \xi\right) - \frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta Q}\right]\right) = 1. \tag{1.4}$$

如果在积分(1.4)式下插入因子 $\exp\left(-i\int dx[J(x)Q(x) + \hat{J}(x)\hat{Q}(x)]\right)$,它就是各种乘积

平均值的生成泛函(概率论中的特征泛函或矩生成泛函)

$$Z_\xi[J,\hat{J}]=\int[dQ]\left[\frac{d\hat{Q}}{2\pi}\right]\exp\left(\int dx\left[i\hat{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-K(Q)-\xi\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta Q}-iJQ-i\hat{J}\hat{Q}\right]\right). \tag{1.5}$$

显然，$Z_\xi[0,0]=1$. ξ 遵从高斯分布

$$W[\xi]\propto\exp\left(-\frac{1}{2}\xi\sigma^{-1}\xi\right), \tag{1.6}$$

其中 σ^{-1} 是关联矩阵 σ 的逆. 在(1.5)式中完成对 ξ 的高斯平均后有

$$Z[J,\hat{J}]=\int[dQ]\left[\frac{d\hat{Q}}{2\pi}\right]\exp\left(\int dx\left[-\frac{1}{2}\hat{Q}\sigma\hat{Q}+i\hat{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-K(Q)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta Q}-iJQ-i\hat{J}\hat{Q}\right]\right). \tag{1.7}$$

这就是拉氏形式的经典统计场论生成泛函. Martin, Siggia 和 Rose 最初讨论这种场论(简称 MSR 场论)时没有采用这种形式[5]. 为了简化微扰论结构和便于重正化，他们引入了一批与原有场量不对易的“响应场”，就是这里的 $\hat{Q}$. 与量子场论的情形类似，在连续积分下，它们是可对易的量. 引入 $\hat{Q}$ 场使算子数目加倍，在闭路格林函数中有时间的正支和负支，算子数目也加倍. 我们将在以下的两节中证明，在闭路格林函数的理论框架内可以自然地得到拉氏形式的 MSR 场论，同时看出，算子的不可对易性不是人为地、形式地引入的，它确实反映了统计涨落的本质.

(1.7)式中对 $\hat{Q}$ 的连续积分又是高斯型的，积分后得

$$Z[J]=\int[dQ]\exp\left(\int dx\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-K(Q)-\hat{J}\right)\sigma^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-K(Q)-\hat{J}\right)-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta Q}-iJQ\right]\right). \tag{1.8}$$

最早此式是作为概率密度泛函在文献[3]中得到的，然而在临界动力学中更方便的出发点是(1.7)式[4,6].

二、宏变量的有效作用量

设系统的基本场量是 $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\cdots,e$, 表示序参量或守恒量的复合算子是 $\hat{Q}_i(\hat{\varphi}(x))$, $i=1,2,\cdots,n+m$, 有些基本场量本身就构成序参量. 为简单起见，假定它们都是玻色算子. 下面算子不特别标出，其含义从行文中可看出.

取初始时刻无规相位近似，密度矩阵在 $t=t_0$ 时对角

$$\langle\varphi'(\boldsymbol{x},t_0)|\rho|\varphi''(\boldsymbol{x},t_0)\rangle=P(\varphi'(\boldsymbol{x}),t_0)\delta(\varphi'(\boldsymbol{x},t_0)-\varphi''(\boldsymbol{x},t_0)). \tag{2.1}$$

宏变量 $Q_i(x)$ 的初始分布密度是

$$P(Q_i(\boldsymbol{x}),t_0)=\mathrm{tr}\{\delta(Q_i(\boldsymbol{x})-Q_i(\varphi(x)))\rho\}$$
$$=\int[d\varphi(x)]\delta(Q_i(\boldsymbol{x})-Q_i(\varphi(x)))P(\varphi(\boldsymbol{x}),t_0). \tag{2.2}$$

Q_i 的闭路格林函数生成泛函为[7,8]

$$\begin{aligned} Z[J(x)] &= \exp(-iW[J(x)]) = \langle T_p e^{-i\int_p JQ} \rangle \\ &= \mathrm{tr}\{T_p(e^{-i\int_p J(x)Q(\varphi(x))}\rho)\} \\ &= N\int[d\varphi(x)]e^{i\int_p[\mathscr{L}(\varphi(x))-JQ(\varphi(x))]}\delta(\varphi_+ - \varphi_-). \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里引入了简化记号

$$\int_p JQ \equiv \sum_i \int_p d^4x J_i(x) Q_i(\varphi(x)), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \delta(\varphi_+ - \varphi_-) \equiv \int d\varphi'(\boldsymbol{x})\delta(\varphi(\boldsymbol{x}, t_+ = t_0) - \varphi'(\boldsymbol{x}))\delta(\varphi(\boldsymbol{x}, t_- = t_0) \\ - \varphi'(\boldsymbol{x})) \times P(\varphi'(\boldsymbol{x}), t_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

T_p 表示闭路时序排列算子，$\int_p$ 指闭路积分.

等式(2.3)右端乘以闭路上 δ 函数归一因子

$$1 = \int[dQ]\delta(Q_+ - Q_-)\delta(Q(x) - Q(\varphi(x))), \tag{2.6}$$

交换积分次序后可将(2.3)式中的 $Q(\varphi(x))$ 换成 $Q(x)$. 再利用公式

$$\delta(Q(x) - Q(\varphi(x))) = \int\left[\frac{dI}{2\pi}\right]e^{i\int_p[Q(x)-Q(\varphi(x))]I(x)}, \tag{2.7}$$

可将(2.3)式改写成

$$Z[J] = N\int[dQ]e^{iS_{\mathrm{eff}}[Q]-i\int_p JQ}\delta(Q_+ - Q_-), \tag{2.8}$$

其中

$$e^{iS_{\mathrm{eff}}[Q]} \equiv \int\left[\frac{dI}{2\pi}\right]e^{i\int QI-iW[I]}. \tag{2.9}$$

这里对连续积分作了傅氏变换和反变换. 由于对 $I(x)$ 要进行连续积分，可将 $W[I]$ 看成在随机外场中的自由能生成泛函. 如果用 WKB 方法计算积分(2.9)式，准到单圈图近似，就相当于对随机外场求高斯平均，得到宏变量的有效作用量 $S_{\mathrm{eff}}[Q]$.

这里讨论的是宏变量为复合算子的情形. 如果宏变量是基本场量，或一部份是基本场量，也完全一样. 同样可以通过 δ 函数引入一个新的场量. 注意到，虽然初始分布可写成各场量分布的乘积

$$P(\varphi', t_0) = \prod_{i=1}^{n} P_i(\varphi'_i, t_0),$$

但拉氏量不能写成各分量场拉氏量的迭加，必须对各分量同时作傅氏变换，求得有效作用量.

现在讨论有效作用量的一般性质.

假定宏变量都是厄米型玻色算子，闭路生成泛函具有下列性质[7-9]：

$$W[J_+(x), J_-(x)]|_{J_+(x)=J_-(x)} = 0, \tag{2.10}$$

$$W^*[J_+(x), J_-(x)] = -W[J_-(x), J_+(x)], \tag{2.11}$$

这里的 $J_\pm(x)$ 和下面的 $Q_\pm(x)$ 分别代表正负支的外场和宏变量. 将(2.10)式对 J_+, J_- 取各阶泛函导数,再令 $J_+ = J_-$, 可以推得一系列关系式. 根据(2.11)及(2.9)式,可求得

$$S^*_{\rm eff}[Q_+(x), Q_-(x)] = -S_{\rm eff}[Q_-(x), Q_+(x)]. \tag{2.12}$$

$Q_+ = Q_-$ 时, $S_{\rm eff}$ 是纯虚数. 令 $Q_\pm(x) = Q_0(x) + \Delta Q_\pm(x)$, 将(2.12)式在 Q_0 附近作泛函展开,求得在 Q_0 处各阶泛函导数间的关系

$$\frac{\delta S}{\delta Q_+(x)} = \left(\frac{\delta S}{\delta Q_-(x)}\right)^*; \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} S_{Fij}(x, y) &= S_{Fji}(y, x) = -S^*_{\bar{F}ji}(y, x), \\ S_{\pm ij}(x, y) &= S_{\mp ji}(y, x) = -S^*_{\pm ji}(y, x). \end{aligned} \tag{2.14}$$

这里

$$S_{Fij}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta Q_{i+}(x)\delta Q_{j+}(y)}, \tag{2.15}$$

其余类推.

如果系统具有对称群 G 的不变性,即

$$\varphi_i(x) \to \varphi_i^g(x) = U_{ij}(g)\varphi_j(x),$$
$$Q_i(\varphi) \to Q_i^g(x) = V_{ij}(g)Q_j(x)$$

时, $\int_p \mathscr{L}$ 及初始分布不变,则有

$$W[J^g(x)] = W[J(x)], \quad J_i^g(x) = J_j(x)V^+_{ji}(g),$$
$$S_{\rm eff}[Q^g(x)] = S_{\rm eff}[Q(x)], \quad Q_i^g(x) = V_{ij}(g)Q_j(\varphi).$$

如果在(2.9)式中取 WKB 最低级,即树图近似,

$$Q = \frac{\delta W}{\delta I}, \tag{2.16}$$

$$S_{\rm eff}[Q] = -\Gamma[Q]. \tag{2.17}$$

这时 $S_{\rm eff}$ 具有闭路顶角生成泛函的一切性质[7-9],由于 $J_+ = J_-$, 得到 $Q_+ = Q_-$,

$$S_{\rm eff}[Q_0, Q_0] = 0, \tag{2.18}$$

$$\left.\frac{\delta S_{\rm eff}}{\delta Q_+}\right|_{Q_+=Q_-=Q_0} = \left.\frac{\delta S_{\rm eff}}{\delta Q_-}\right|_{Q_+=Q_-=Q_0}, \tag{2.19}$$

$$S_F + S_{\bar{F}} = S_+ + S_-, \tag{2.20}$$

$$\frac{\delta^l S_{\rm eff}}{\delta Q_{i1}(x_1)\cdots\delta Q_{il}(x_l)} = i^{l-1}\langle T_p(Q_{i1}(x_1)\cdots Q_{il}(x_l))\rangle_{1P.I.} \tag{2.21}$$

根据 $-iS_\pm = i\Gamma_\pm$ 及顶角函数的性质[7,8]

$$i\Gamma_\pm(k) > 0$$

求得

$$-iS_\pm(k) > 0. \tag{2.22}$$

这里 $\Gamma(k)$ 等是作了傅氏变换后的顶角函数.

在热平衡态附近[7,8]

$$\begin{aligned} \Gamma_{+ij}(k) &= \Gamma_{-ij}(k)e^{-\beta k_0}, \\ S_{-ij}(k) - S_{+ij}(k) &\xrightarrow[k_0\to 0]{} -\beta k_0 S_{-ij}(k). \end{aligned} \tag{2.23}$$

三、最可几轨道与拉氏场论表述

前一节关于有效作用量的讨论具有普遍意义，可以从微观的生成泛函 W 出发，经过对随机场的平均求得 $S_{\text{eff}}[Q]$，也可以根据它应满足的性质构造唯象的模型，直接进行计算．本节将证明，在 $[dI]$ 的连续积分中取单圈近似，对宏变量在时间正负支的涨落取到二级，就得到现有拉氏形式的 MSR 场论．

先计算积分(2.9)式，将指数上因子在鞍点附近展开

$$A \equiv \int_p QI - W = -\Gamma - \frac{1}{2}\int_p \Delta I W^{(2)} \Delta I + \cdots. \tag{3.1}$$

利用闭路格林函数的变换[9]，可写成单向时间轴上的积分

$$A = -\Gamma - \frac{1}{2}\int \Delta \hat{I} \sigma_3 \hat{W}^{(2)} \sigma_3 \Delta \hat{I}, \tag{3.2}$$

这里

$$\hat{W}^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{++} & W_{+-} \\ W_{-+} & W_{--} \end{pmatrix}, \quad \Delta \hat{I} = \begin{pmatrix} \Delta I_+ \\ \Delta I_- \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

完成高斯积分，准到常数项，求得

$$e^{iS_{\text{eff}}[Q]} = e^{-i\Gamma[Q]} \left| \det(\sigma_3 \hat{W}^{(2)} \sigma_3) \right|^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

利用 Dyson 方程[7-9]

$$\sigma_3 \hat{W}^{(2)} \sigma_3 = -(\hat{\Gamma}^{(2)})^{-1},$$

将(3.3)式改写成

$$i S_{\text{eff}}[Q] = -i\Gamma[Q] + \frac{1}{2}\operatorname{tr} \ln \hat{\Gamma}^{(2)}, \tag{3.4}$$

这里

$$\hat{\Gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}$$

是二端顶角函数矩阵．根据文献[9]中给出的变换：

$$\begin{aligned} \det \hat{\Gamma}^{(2)}(x, y) &= \det \tilde{\Gamma}^{(2)}(x, y) = \det \Gamma_r(x, y) \det \Gamma_a(x, y) \\ &= \left[\det\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta Q(x) \delta \Delta(y)} \right) \right]^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里 $Q(x)$ 与 $\Delta(x)$ 的定义见(3.12)式．根据文献[1]中的讨论

$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\Delta}\right|_{\Delta=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Q_+} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Q_-} \right)_{\Delta=0} = -\gamma \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\delta F}{\delta Q}. \tag{3.6}$$

与(1.1)及(1.2)式比较，可以看出，准到系数矩阵 γ，$\dfrac{\delta^2\Gamma}{\delta Q \delta \Delta}$ 就是函数变换矩阵，其行列式就是雅可比行列式．注意到(3.5)式中的平方正好与(3.4)式中的 1 / 2 相消，求得

$$i S_{\text{eff}}[Q] = -i\Gamma[Q] - \frac{1}{2}\int \frac{\delta K}{\delta Q} dx, \tag{3.7}$$

其中

$$K = -\gamma^{-1}\frac{\delta F}{\delta Q}. \tag{3.8}$$

在路径积分(2.8)式中取最可几轨道，它满足方程

$$\frac{\delta S_{\rm eff}[Q]}{\delta Q_{\pm}} = J_{\pm}(x), \tag{3.9}$$

$$Q(\boldsymbol{x}, t_+ = t_0) = Q(\boldsymbol{x}, t_- = t_0). \tag{3.10}$$

如果取 $J_+ = J_- = J$，对随机场 $I(x)$ 的积分中取树图近似，根据文献[1]中的论证和(2.17)式

$$\frac{\delta S_{\rm eff}[Q]}{\delta Q} = J(x) = \gamma\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta Q}. \tag{3.11}$$

这就是没有随机力的广义朗之万方程(即 TDGL 方程).

现在考虑在最可几轨道附近的涨落. 在闭路格林函数形式中，除通常意义的涨落外，还允许场量在正负时间支上不同. 在连续积分(2.8)式中作变量代换，引入

$$Q(x) = \frac{1}{2}(Q_+(x) + Q_-(x)),$$

$$\Delta(x) = Q_+(x) - Q_-(x),$$

$$[dQ_+(x)][dQ_-(x)] = [dQ(x)][d\Delta(x)]. \tag{3.12}$$

将有效作用量展开，变成时间单向积分后有

$$S_{\rm eff}[Q_+(x), Q_-(x)] = S_{\rm eff}[Q(x), Q(x)] + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\delta S_{\rm eff}}{\delta Q_+} + \frac{\delta S_{\rm eff}}{\delta Q_-}\right)\Delta(x)$$
$$+ \frac{1}{8}\int \Delta(x)(S_{++} + S_{+-} + S_{-+} + S_{--})(x, y)\Delta(y) + \cdots. \tag{3.13}$$

令

$$\frac{i}{4}(S_{++} + S_{+-} + S_{-+} + S_{--})(x, y) = -\gamma(x)\sigma(x, y)\gamma(y), \tag{3.14}$$

并将(2.18)，(3.7)式和(3.11)式代入，求得

$$e^{-iW[J(x)]} = \int [dQ(x)][d\Delta(x)]e^{-\frac{1}{2}\int \Delta(x)\gamma(x)\sigma(x,y)\gamma(y)\Delta(y) + i\int\left(\gamma(x)\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta Q}\right)\Delta(x)}$$
$$\times e^{-\frac{1}{2}\int\frac{\delta K}{\delta Q} - i\int(J_\Delta Q + J_0\Delta)}\delta(\Delta(\boldsymbol{x}, t_0)), \tag{3.15}$$

这里 $J_\Delta = J_+(x) - J_-(x)$，$J_0 = \frac{1}{2}(J_+(x) + J_-(x))$. 若取 $J_\Delta = J$，作代换 $\gamma(x)\Delta(x) \to \hat{Q}(x)$，$\frac{1}{\gamma}J_0 \to \hat{J}$，即得到(1.7)式，也就是 MSR 场论的生成泛函. 完成对 $\Delta(x)$ 的高斯积分后求得

$$e^{-iW[J(x)]} = N\int [dQ(x)]\exp\left\{\int dx\left[-\frac{1}{2}\int dy\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\delta F}{\delta Q(x)} - \hat{J}(x)\right)\right)\sigma^{-1}(x, y)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial Q(y)}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\delta F}{\delta Q(y)} - \hat{J}(y)\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\frac{\delta}{\delta Q}\frac{\delta F}{\delta Q} - iJQ\right]\right\}. \tag{3.16}$$

这就是生成泛函(1.8)式. 值得注意的是

$$\hat{J} = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

对应物理外场，而 $J = J_+ - J_-$ 对应构造生成泛函引入的形式源场。

与(1.8)式比较，看出 $\sigma(x, y)$ 是随机力的关联矩阵. 若 Q 是 x 的慢变函数，σ 可看成常数

$$\sigma = -\frac{i}{4\gamma^2}(S_F + S_{\tilde{F}} + S_+ + S_-)(k = 0). \tag{3.17}$$

利用树图近似下成立的(2.20)式，可改写成

$$\sigma = -\frac{i}{2\gamma^2}(S_+ + S_-). \tag{3.18}$$

根据文献[1]中对 γ 的定义

$$\gamma = \lim_{k_0 \to 0} i \frac{\partial}{\partial k_0} \Gamma_R, \tag{3.19}$$

考虑到只有耗散部分有贡献，并利用(2.17)式及热平衡附近成立的(2.23)式，求得

$$\gamma = \lim_{k_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial k_0} A = \frac{i}{2} \lim_{k_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial k_0} (\Gamma_- - \Gamma_+)$$

$$= \frac{i}{2}\beta\Gamma_- \approx -\frac{i}{4}\beta(S_+ + S_-). \tag{3.20}$$

对比(2.18)与(2.20)式，求得涨落耗散定理

$$\sigma = \frac{2}{\beta\gamma}. \tag{3.21}$$

用通常的记号表示是

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\Gamma_0 kT\delta(t - t'),$$

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\gamma}.$$

为书写简单，以上推导是给单分量的宏变量写的，多个分量的情形也完全一样.

四、讨　　论

扼要概括文献[1]和本文的主要结果，我们有以下认识：

1. 闭路格林函数是描述动态临界现象这类长波涨落起主要作用的统计场论的自然理论框架. 利用它可以从统一的观点推导出包括模-模耦合项在内的序参量及守恒量的广义朗之万方程及经典统计场论的拉氏表述. 如果用 $\hat{G}$ 这套闭路形式[9]构造微扰论，结构与标准的场论方法一致，运算比较简单. 现在临界动力学和 MSR 场论是用 $\tilde{G}$ 这套函数构造微扰论，出现推迟函数和关联函数这两类不同性质的传播子，结构比较复杂. 闭路函数的另一个优点是它自动保证因果性条件，不需要像现在那样在微扰论的每一级逐级证明[10].

2. 这里用的是连续积分表示，算子的非对易性不显然. 如果与 MSR 场论原来的形式[5]比较，就可以看出，非对易性不只是一种手法，而是描述统计场随时间演化行为所必

需．虽然由非对易性导致的红外发散度低（详见附录），但对于讨论与时间有关的行为是重要的，因为响应函数的红外发散度低于关联函数．

3．从本文的推导可以看出现有临界动力学理论所取的近似和改进的可能途径．

（1）在现有理论中输运系数矩阵对应序参量的部分取成对称的，即只考虑耗散，与守恒量耦合的部分取成反称的，只考虑正则运动．原则上允许出现交叉的效应．在闭路框架内有可能分析这类现象．

（2）对随机场 $I(x)$ 的连续积分作到单圈近似相当于高斯平均．在闭路形式中可以作到高级圈图近似，越出高斯平均的范围．

（3）对时间正负支的涨落只取到 $\Delta(x)$ 的二级就相应于现有理论，原则上也可以作到高阶．更方便的办法可能是直接计算 Q_+，Q_- 的连续积分，不明显地引入 $\Delta(x)$．

4．现有的拉氏统计场论的重正化很复杂[4,6]，其原因之一是顶角和原始发散的数目远多于耦合常数的数目，Q 与 $\hat{Q}$ 场具有不同的量纲．用 $\hat{G}$ 这套闭路格林函数作重正化可能会比较简单，因为矩阵各分量的红外发散度相同．

作者们感谢与苏肇冰同志的多次讨论．

附　录

有限温度场论的重正化问题

文献[11]中普遍地论证了，$T=0\text{K}$ 的量子场论中引入的重正化因子，足以消除 $T>0\text{K}$ 的闭路格林函数的紫外发散．不使用闭路格林函数方法，对平衡态的有限温度场论，也有人得到这个结论（见文献[11]所引的文献）．这个结论在物理上是自然的，因为统计平均不会影响极小距离的行为，因而不会增加新的紫外发散．我们在这里指出，讨论相变这类现象时，必须先分出红外发散项，再讨论紫外重正问题．这种场论的重正化与 $T=0\text{K}$ 的量子场论有差别．

为具体起见，考察一个相对论的标量玻色场，其闭路自由传播子是[7]

$$
\begin{aligned}
G_{++}(k)&\equiv\Delta_F(k)=\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}-2\pi i n(\boldsymbol{k})\delta(k^2-m^2),\\
G_{-+}(k)&\equiv\Delta_-(k)=-2\pi i\delta(k^2-m^2)(\theta(k_0)+n(\boldsymbol{k})),\\
G_{+-}(k)&\equiv\Delta_+(k)=-2\pi i\delta(k^2-m^2)(\theta(-k_0)+n(\boldsymbol{k})),\\
G_{--}(k)&\equiv\Delta_{\bar{F}}(k)=\frac{-1}{k^2-m^2-i\varepsilon}-2\pi i n(\boldsymbol{k})\delta(k^2-m^2),
\end{aligned}
\tag{A·1}
$$

这里

$$
n(\boldsymbol{k})=\frac{1}{e^{\varepsilon(\boldsymbol{k})/T}-1},\quad \varepsilon(\boldsymbol{k})=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}.\tag{A·2}
$$

在相变点附近，$m=0$，对于长波元激发

$$
\varepsilon(\boldsymbol{k})/T\ll 1,\ n(\boldsymbol{k})\approx T/\varepsilon(\boldsymbol{k})\gg 1.\tag{A·3}
$$

由(A·1)式看出，传播子中含 n 的项起主要作用．由于这些项都在质壳上，有 δ 函数，能自动完成频率的积分，它们的红外发散度比其他项高一级．因此，对于 ϕ^4 理论，可重正的边缘空间维数是 $d_c=4$，而不是通常量子场论的 $d_c=4-1$．这就是平常所说的"量子的 d 维相应于经典的 $d+1$ 维"的含义．

以上所述可以具体地检验：计算质量、顶角和波函数重正化的原始发散图形，完成频率积分，然后取高温极限 $T/\varepsilon(\boldsymbol{k})\gg 1$，正好得到现有临界现象理论中的结果[12]．更方便的办法是利用松原格林函数，在频率求和中只取 $\omega_n=0$ 的项．

有的作者在研究有限温度场论时既讨论相变，又采用 $T=0\text{K}$ 的重正化因子，这是不正确的．由于相变现象中

要取高温极限，相对论效应和量子效应都不重要．只有 $T=0\mathrm{K}$ 附近的相变可能是例外，那时统计和量子涨落同时起作用．普通场论模型(非阿贝耳规范场还不清楚)的相变不会给出超过现有临界现象理论的结果．

在讨论静态现象时，算子的不可对易性不重要，这相应于在(A·1)式中四种传播子都等于

$$-2\pi i n(k)\delta(k^2-m^2),$$

即关联函数本身．对于动态现象则不然．G_{++} 和 G_{--} 中的第一项来自格林函数方程的非齐次项，即对易子．如果只保留红外最发散项，四个传播子相等，推迟格林函数

$$G_r = G_{++} - G_{+-} = 0. \tag{A·4}$$

由此可见，推迟格林函数的红外发散度低于关联函数．要能正确地分析它，必须考虑算子的非对易性，虽然这是"纯"经典的理论．容易证明，用自由传播子演示的这些性质对于重正化以后的传播子仍旧保持．

正如文献[1]的引言中已提到的，统计场论的高温近似对应的是"超玻色"极限，而不是玻耳兹曼极限．说经典场可对易，是指相对于很大的 n 而言可以略去1．如果有些现象中不能略去1，则必须从非对易的算子出发．这是统计场论与量子场论有深刻类比的原因之一．关于这个类比的物理含义可参看文献[13]．

参　考　文　献

[1] 周光召、苏肇冰、郝柏林、于渌，本刊本期，961．

[2] L. Onsager, S. Machlup, *Phys. Rev.*, **91** (1953), 1505; 1512.

[3] R. Graham, *Springer Tracts in Modern Physics*, **66** (1973), 1.

[4] H. K. Janssen, *Z. Physik*, **B23** (1976), 377; R. Bausch, H. K. Janssen, H. Wegner, *Z. Physik*, **B24** (1976), 113.

[5] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev.*, **A8** (1973), 423.

[6] C. De Dominicis, L. Peliti, *Phys. Rev.*, **B18** (1978), 353.

[7] 周光召、苏肇冰，统计物理进展，第五章，科学出版社即将出版．

[8] 周光召、苏肇冰，高能物理与核物理，**3** (1979)，314．

[9] 周光召、于渌、郝柏林，物理学报，**29** (1980)，878．

[10] J. Deker, F. Haake, *Phys. Rev.*, **A11** (1975), 2043.

[11] 周光召、苏肇冰，高能物理与核物理，**3** (1979)，304．

[12] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, In Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 6, ed. by C. Domb, M. S. Green, Acad. Press, (1976).

[13] 于渌、郝柏林，相变和临界现象(上)、(中)、(下)，物理，待发表．

NONEQUILIBRIUM STATISTICAL FIELD THEORY AND CRITICAL DYNAMICS (II)

LAGRANGIAN FIELD THEORY FORMULATION

Zhou Guang-zhao　　Hao Bai-lin　　Yu Lu

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

Abstract

The expression of the effective action for the order parameters is derived from the continuous integral representation for the generating functional on the closed time path in the one loop approximation for the Fourier transforms. The Lagrangian formulation of the critical dynamics is recovered in the second order approximation of fluctuations in the closed time path continuous integral. The various possibilities of improving the existing theory of critical dynamics are considered.