

中国造船工程学会船舶力学学术委员会

第二届船舶阻力学术会议

論 文 集



1988

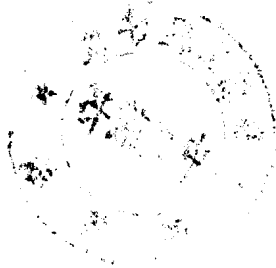
中国造船 编辑部

目 录

1. 用完全椭圆型 N—S 方程求解船尾流场及伴流场.....	沈奇心 张彦明 蔡荣泉	(1)
2. Musker 乱流边界层速度分布公式的一般形式及其应用.....	程尔升	(10)
3. 波破碎条件初探.....	王锡良 夏长生	(25)
4. 二维物体浅水兴波的数值计算	糜振星 刘应中	(32)
5. 关于移动压力面兴波阻力计算及其压力分布优化.....	王海龙 赵连恩 朱典明	(46)
6. 用多层网格——分裂外推法解非线性船波问题的探讨.....	石仲堃 全 斌	(66)
. 横向非对称船的波型分析及双体船的横向间距选择.....	周礼德 许统铨 谢克振 杨惠忠	(80)
8. 应用 Mathieu 函数改进船型.....	潘庆中 蔡荣泉 都绍裘 王 淮	(91)
9. 近场波形和兴波阻力研究.....	陆小刚	(103)
10. 应用波型分析方法设计低波阻船型.....	都绍裘 荣焕宗 王 淮	(113)
11. 船舶湍流边界层的一个积分法.....	夏国泽 周志中	(127)
12. 一种计算内河船兴波阻力及船型优化的方法.....	杜月中	(140)
13. 有限水深中的慢船理论.....	陈材侃	(149)
14. 水面船舶兴波阻力变分解及 $(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{c}) / (1 + \frac{1}{2} \frac{U}{c})$ 船型算例.....	金伏生 范新建	(158)
15. 根据流线求船体型值的一种新方法.....	夏征宇	(167)
16. 用微叶轮测试计算船模粘阻的一个方法.....	谢克振 许统铨 顾家彪 杨惠忠 陈吉安 史兴汉 周礼德 徐 琦	(175)
17. 讨论形状因子计算方法.....	李世谟	(187)
18. 长江双桨浅吃水肥大型油轮的船型开发研究.....	孙昌民 陈孟泉	(198)
19. BSRA 系列 $CB=0.80 \sim 0.85$ 船型的阻力计算研究.....	王言英 陈玉策 黄鼎良	(214)

20. 高速排水型艇艇型选择及参数影响问题.....	邵世明 王云才 胡长洪	(224)
21. 高速圆舳排水艇三个系列船型阻力性能的比较试验.....		
.....	仇道良 程明道	(243)
22. 船舶与限制航道最佳配合的研究.....	钱徐涛	(255)
23. 水翼水动力计算的偶极子面元分布法.....	黄 山 李百齐	(266)
24. 加装尾板的滑行平板之高速滑行.....	何志飞 邢圣德	(279)
25. 滑行水翼的临界浅水兴波.....	陈学农 刘应中	(290)

DV57/17



用完全椭圆型N-S方程求解

船尾流场及伴流场

沈奇心 张彦明 蔡荣泉

(708所)

提要 本文采用完全椭圆型N-S方程作为控制方程求解船尾流场及伴流场。贴体坐标系统由求解泊松方程的数值方法生成。数值计算基于Simple算法。计算了Wigley船模外部流场, 计算结果与试验结果吻合良好。

一、前言

船尾流场及伴流场的计算, 对于设计优秀的线型, 合理确定附体布置, 降低空泡、振动、噪声, 提高推进效率都有重要意义。目前这方面的研究工作, 大都是采用求解部分抛物型控制方程的方法。随着计算技术的发展, 求解完整的雷诺平均N-S方程预报船尾流场已是可能。两者计算工作量相当, 前者可节省存贮, 后者可处理纵向有回流的情况。

本文以完全椭圆型N-S方程作为控制方程, 数值方法采用了Simple算法(1), 计算了Wigley船模的尾部流场及伴流场。贴体坐标系统由解泊松方程的数值方法生成(2)。求解方法与求解运动方程采用统一形式。湍流模式采用了K-ε两方程模式。计算结果与试验结果(3)作了比较, 平均速度、壁面压力基本吻合。

二、数值生成网格

坐标网格的选取可直接影响粘性流动计算的精度。以前常用的畸变柱坐标系在壁面附近网格畸形较大, 会影响计算精度, 而用保角变换的方法生成网格对计算域有一定的限制。本文采用了求解一组泊松方程的数值生成网格方法, 这种方法比较灵活, 可处理较为任意的计算域, 如考虑自由表面时的计算域。

基本坐标系取直角坐标系 (x^1, x^2, x^3) , 任意曲线坐标系为 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , 选定 $\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2, x^3)$ 满足一组泊松方程:

$$\nabla^2 \xi^1 = f^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (1)$$

式中 f^1 是待定的网格分布控制函数。(1=1, 2, 3, 以下同)。

为了计算方便, 变换到映象域中求解 $x^1 = x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 。

$$\nabla^2 x^i = g^{jk} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^j \partial \xi^k} + f^k \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} = 0 \quad (2)$$

式中 g^{ij} 是逆变度量张量,

(2)式可写成:

$$\begin{aligned} -f^1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} - f^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} - f^3 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} = & g^{11} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} + g^{22} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} \\ & + g^{33} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^3 \partial \xi^3} + s^1 \end{aligned} \quad (3)$$

$$s^1 = 2(g^{12} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{23} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + g^{31} \frac{\partial^2 x^1}{\partial \xi^3 \partial \xi^1})$$

上式如用中心差分求解, 当 f^i 较大时可能不收敛. 注意到上式与下一节要给出的运动方程有相同的形式, 所以本文采用了统一的求解方法, 这样既简单又可保证收敛.

为了生成一组在横剖面上正交的网格, 参考文〔2〕选定:

$$f^1 = f^3 = 0, \quad f^2 = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\sqrt{g_{11} g_{33}} / g_{22}) \quad (4)$$

g_{ij} 是协变度量张量.

计算区域如图1, A、B分别为进、出口平面, 对应 $\xi^1=1, L1$. w 为水平面 (或自由表面) 对应 $\xi^3=1$, C为纵中剖面对应 $\xi^3=N1$. S为船体表面 (尾后为纵中剖面) 对应 $\xi^2=1$, E为外边界对应 $\xi^2=M1$.

本文进、出口平面取为 $x=0$, 与 $x=2.0$ 的两个横剖面, 外边界取为 $R=0.25$ 的圆柱面. $L1=21, M1=10, N1=10$.

图2给出了 $x=0, 0.7, 0.9, 1.2$ 四个横剖面上网格图.

三、控制方程组

完整的雷诺平均 $N-S$ 方程及两方程湍流模式为:

$$(\rho u^j) |_{j=0} \quad (5)$$

$$(\rho u^i u^j) |_{j=0} = -P |^i + \tau^i |_{j=0} \quad (6)$$

$$(\rho K u^j) |_{j=0} = (\Gamma_K K |^j) |_{j=0} + G_e - \rho \epsilon \quad (7)$$

$$(\rho \epsilon u^j) |_{j=0} = (\Gamma_\epsilon \epsilon |^j) |_{j=0} + C_1 G_e \epsilon / K - C_2 \rho \epsilon^2 / K \quad (8)$$

而:

$$G_e = \mu_t u_i |_{j=0} (u^i |_{j=0} + u^j |_{j=0})$$

$$\tau^i |_{j=0} = \mu_e (u^i |_{j=0} + u^j |_{j=0})$$

$$\mu_e = \mu + \mu_t$$

$$\mu_t = \rho C_0 K^2 / \epsilon$$

$$\Gamma_k = \mu_e / P_{r, k}$$

$$\Gamma_\epsilon = \mu_e / P_{r, \epsilon}$$

式中 $|_j$ 是张量的协变导数。

各常数见下表：

C_0	C_1	C_2	$P_{r, k}$	$P_{r, \epsilon}$
0.09	1.44	1.92	1.00	1.23

Wigley 船型比较细长，为了计算方便，本文计算中忽略了纵向曲率的影响。取速度分量 u 平行于 x 轴， v, w 分别沿 ξ^2, ξ^3 轴方向。

控制方程(5)、(6)、(7)、(8)可写成统一的形式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\rho \frac{\sqrt{g}}{h_1} u \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\rho \frac{\sqrt{g}}{h_2} v \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\rho \frac{\sqrt{g}}{h_3} w \varphi \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\Gamma_\varphi \frac{\sqrt{g}}{h_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\Gamma_\varphi \frac{\sqrt{g}}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\Gamma_\varphi \frac{\sqrt{g}}{h_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^3} \right) + \sqrt{g} S_\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

h_1, h_2, h_3 是度量系数， $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$ 。

$\varphi, \Gamma_\varphi, S_\varphi$ 含义如下：

φ	u, v, w	K	ϵ	l
Γ_φ	μ_e	$\mu_e / P_{r, K}$	$\mu_e / P_{r, \epsilon}$	0

$$\begin{aligned} S_u = & \tau^{12} K_{12} + \tau^{13} K_{13} - \tau^{22} K_{21} - \tau^{33} K_{31} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \xi^1} - \rho v (u K_{12} - v K_{21}) \\ & - \rho w (u K_{13} - w K_{31}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left\{ \frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + 2v K_{12} + 2w K_{13} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial \xi^1} - v K_{21} - u K_{12} \right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \\ & \left\{ \frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_3} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} - w K_{31} - u K_{13} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$\begin{aligned}
S_V = & \tau^{21} K_{21} + \tau^{23} K_{23} - \tau^{11} K_{12} - \tau^{33} K_{32} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \xi^2} - \rho u (v K_{21} - u K_{12}) \\
& - \rho w (u K_{23} - w K_{32}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_1} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} - u K_{12} - v K_{21} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial \xi^2} + 2u K_{21} + 2w K_{23} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_3} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} - w K_{32} - v K_{23} \right) \right)
\end{aligned} \tag{9-2}$$

$$\begin{aligned}
S_W = & \tau^{32} K_{32} + \tau^{31} K_{31} - \tau^{22} K_{23} - \tau^{11} K_{13} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial P}{\partial \xi^3} - \rho v (w K_{32} - v K_{23}) \\
& - \rho u (w K_{31} - u K_{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_1} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi^3} - u K_{13} - w K_{31} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_2} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial v}{\partial \xi^3} - v K_{23} - w K_{32} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\sqrt{g} \mu_e}{h_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial w}{\partial \xi^3} + 2v K_{32} + 2u K_{31} \right) \right)
\end{aligned} \tag{9-3}$$

$$S_K = G_e - \rho \epsilon \tag{9-4}$$

$$S_\epsilon = C_1 G_e \frac{\epsilon}{K} - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{K} \tag{9-5}$$

式中:

$$G_e = \frac{u_\tau^2}{2u_\tau^2} \{ (\tau^{11})^2 + (\tau^{22})^2 + (\tau^{33})^2 + 2(\tau^{12})^2 + 2(\tau^{23})^2 + 2(\tau^{31})^2 \}$$

$$\tau^{11} = 2\mu_e \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + v K_{12} + w K_{13} \right)$$

$$\tau^{22} = 2\mu_e \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial \xi^2} + u K_{21} + w K_{23} \right)$$

$$\tau^{33} = 2\mu_e \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial w}{\partial \xi^3} + u K_{31} + v K_{32} \right)$$

$$\tau^{12} = \tau^{21} = \mu_e \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial \xi^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} - u K_{12} - v K_{21} \right)$$

$$\tau^{23} = \tau^{32} = \mu_e \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial v}{\partial \xi^3} - v K_{23} - w K_{32} \right)$$

$$\tau^{31} = \tau^{13} = \mu_e \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi^3} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} - w K_{31} - u K_{13} \right)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

四、数值方法及边界条件

将方程(9)在控制容积上积分, 并采用幂函数差分格式, 相应的离散方程形式为:

$$\alpha_P \varphi_P = \alpha_E \varphi_E + \alpha_W \varphi_W + \alpha_N \varphi_N + \alpha_S \varphi_S + \alpha_T \varphi_T + \alpha_B \varphi_B + 0 \quad (10)$$

用压力校正方程取代连续方程, φ 分别为 u 、 V 、 W 、 P' 、 K 、 ε , P' 为压力校正量。节点分布见图 3。系数 α_i 是 φ 的函数, 上式需迭代求解。

线性方程组求解采用了交替方向的逐线 TDMA 方法。除压力校正方程外, 其它方程均采用松弛因子 0.5。因为压力场较速度场收敛为慢, 所以压力场收敛作为迭代结束。

边界条件如下:

1. 进口平面

$$\text{速度分布} \quad u = \begin{cases} u_\infty (y/\delta)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta \\ u_\infty & y > \delta \end{cases}$$

$$v = w = 0$$

u_∞ 是来流速度, δ' 是边界层厚度, 由 Schlichting 平板公式估算:

$$\delta' = 0.37S \left(\frac{u_\infty S}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}$$

S 是距前缘的距离。

$$\text{湍流动能} \quad K = \begin{cases} (0.01u)^2 & y \leq \delta \\ 0 & y > \delta \end{cases}$$

$$\text{湍流耗散} \quad \varepsilon = C_0^{0.75} K^{1.5} / (0.4y)$$

压力 P 由势流计算得到。

2. 出口平面

$$u = u_\infty, v = w = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial K}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0, \quad n \text{ 是边界面的法向。}$$

3. 船体表面

$$u = v = w = k = \varepsilon = 0, \quad P \text{ 由线性外插得到, 每次迭代逐次修正。}$$

靠近壁面的一个网格上采用了壁函数修正(4)。

4. 外边界

$$u = u_\infty, v = w = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial K}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0.$$

5. 水线面及纵中剖面

$$W = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \varphi = u, v, P, K, \varepsilon$$

五、计算实例

本文计算了 Wigley 船模的绕流, 雷诺数 $Re = 1.6 \times 10^6$, 与土屋好宽等人的试验结果(3)作了比较。船模型值为:

$$y = 0.1(1-x^2)(1-64z^2) \quad |x| \leq 1, 0 \leq z \leq 0.125$$

计算区域如第二节所述, 计算网格为 $21 \times 10 \times 10$ 。迭代 40 次, 在 IBM3031 机上约需机时 25 分钟。

图 4、图 5 是 $x=0.8$, $x=1.02$ 两个剖面上的速度分布, 与试验结果比较, 除底部附近都吻合很好。底部差异的原因可能是进口平面的边界层厚度估计不准, 因为 Wigley 船型是尖底的, 底部边界层应比较薄。另一个原因可能是网格分布太稀疏。

图 6 是 $x=0.4$, $x=0.6$, $x=0.8$, $x=0.9$, $x=1.0$ 各横剖面上的壁面压力分布, 与试验结果比较, 两者基本吻合。除尾端外压力沿周向变化幅度都很小。

图 7 是在 $z/T=0.2$ 水线上平均速度沿纵向的变化。在尾部边界层厚度增加较迅速, 这是符合实际情况的。

六、结 论

本文方法可用来估计船尾流场及伴流场。预报的平均速度与压力分布与试验结果基本符合。为进一步改善计算精度, 网格划分还要密些, 进口边界条件最好由薄边界层计算结果给出。

参考文献

- (1) Patankar, S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Co., 1980.
- (2) Cheng, W.S. and Patel, V.C., "Numerically-Generated Coordinates Suitable for Ship Stern and Wake Flow Calculation", IIHR Report 265, 1983.
- (3) 土屋好宽、金井诚木尾谷尚: "Wigley 模型の一粘性流モデル(第3报) 西部造船会会报, 第70号, 昭和60年8月。
- (4) Patankar, S.V., and Spalding, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum in 3-D Parabolic Flows", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol15, 1972.

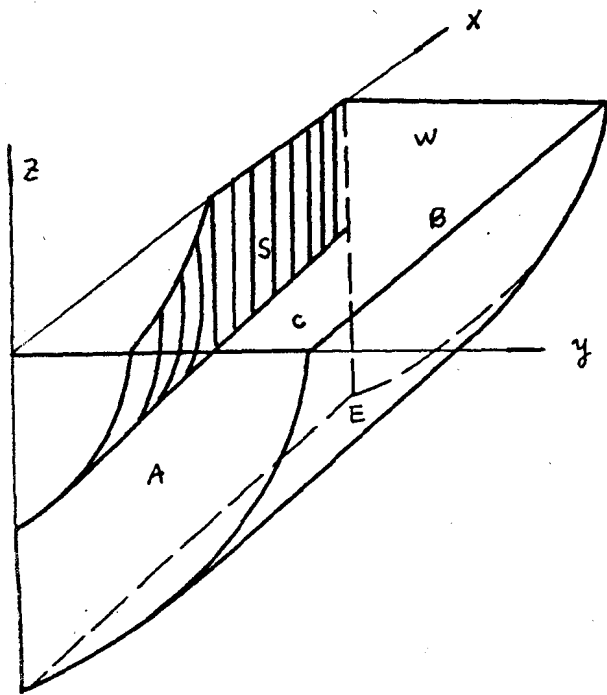


图1 计算域

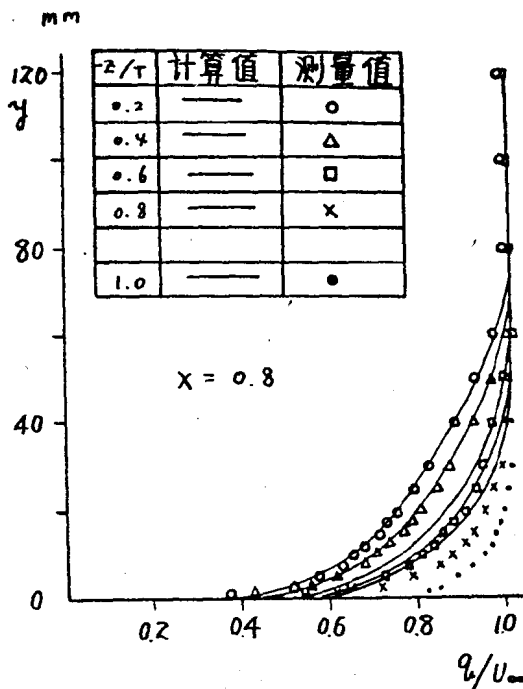


图4 平均速度 $x = 0.8$

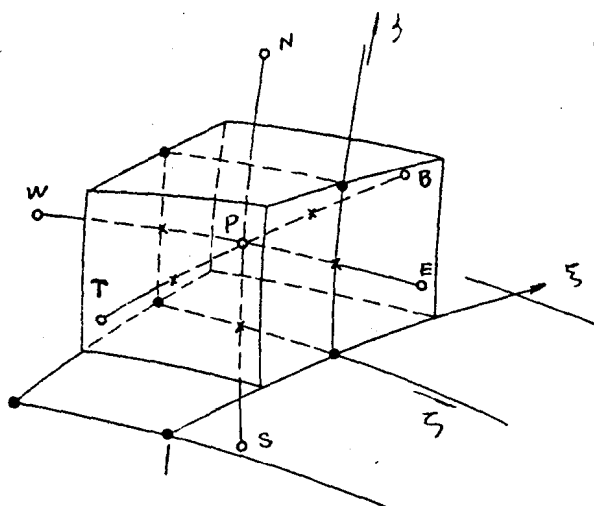


图3 节点分布

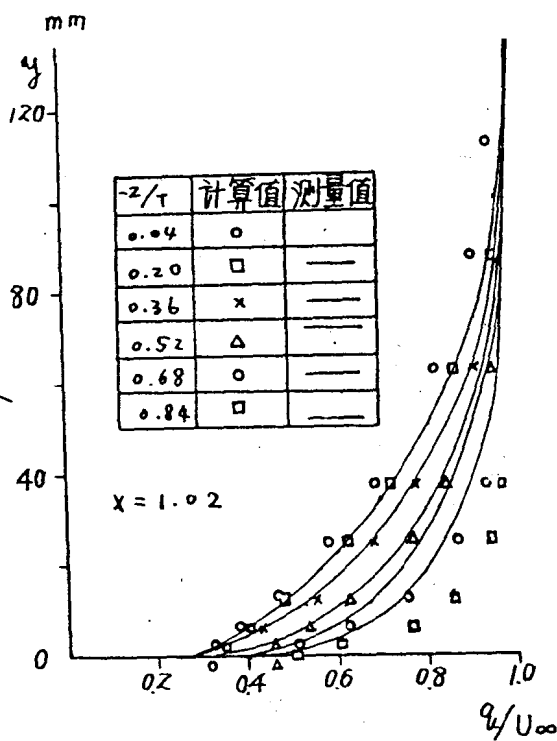


图5. $x = 1.02$ 横剖面上的平均速度

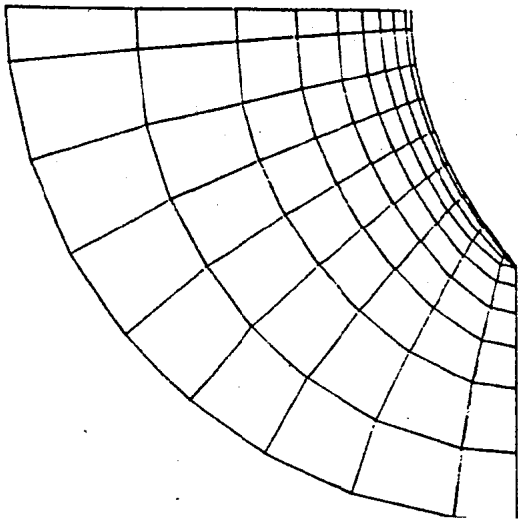


图 2—1 $X=0.7$

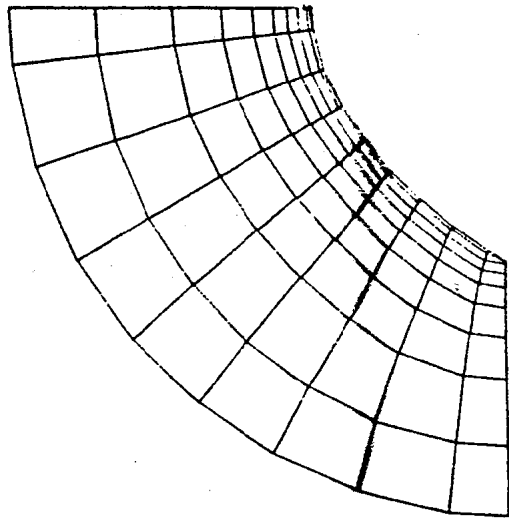


图 2—2 $X=0.05$

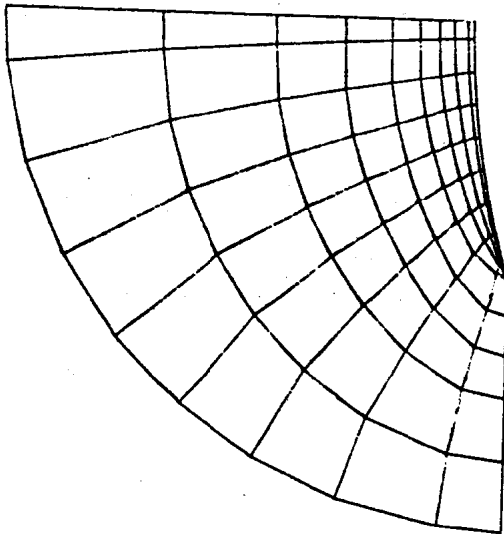


图 2—3 $X=0.9$

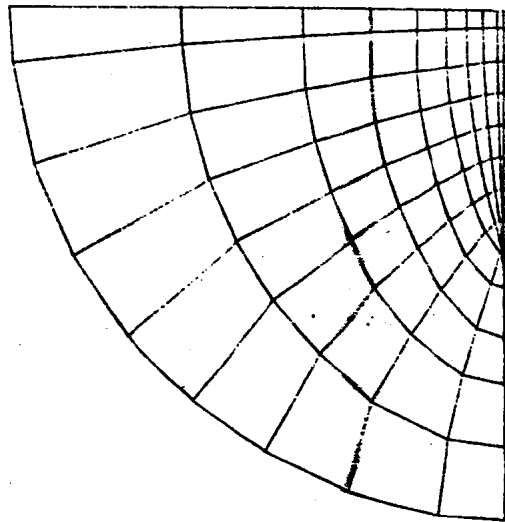


图 2—4 $X=1.2$

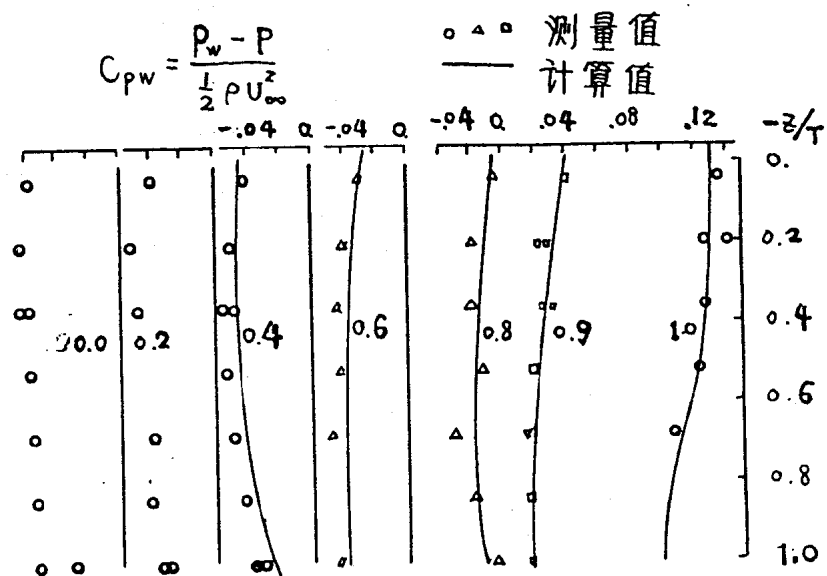


图6 $x = 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0$ 各横剖面上的壁面压力分布

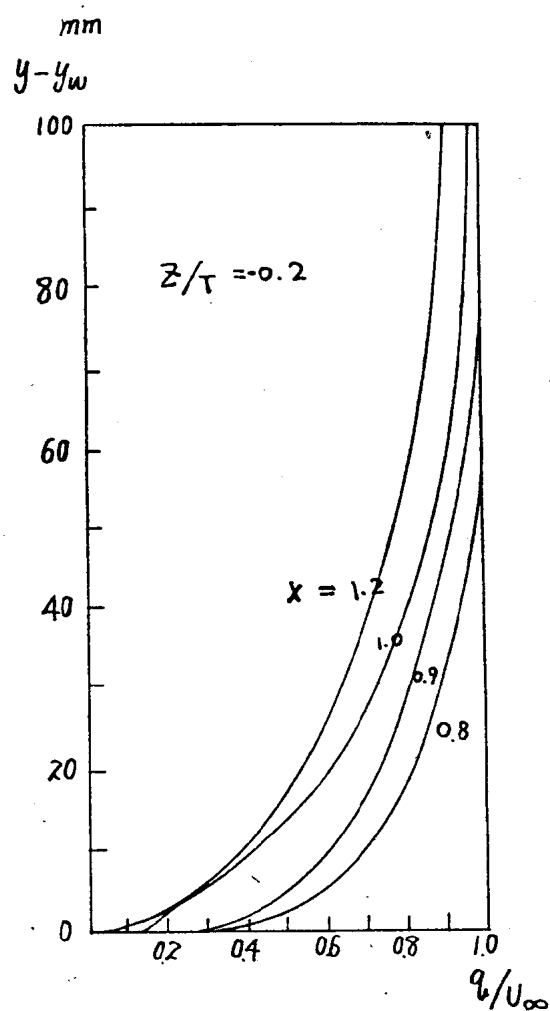


图7 平均速度

Musker乱流边界层速度分布公式的

一般形式及其应用

桂尔升

(华中工学院)

一、概 述

在许多应用问题中都用得着乱流动边界层内沿流线方向的平均速度的表达式(简称速度分布公式)。例如,边界层计算的积分法一般只能得到上述平均速度分布的某些分量,需要利用已知的速度分布公式才能预报边界层内的速度。因此,从Prandtl和von Karmam开始许多人致力于寻求可靠的速度分布公式。归结起来看,这些研究的结果是发现了两个重要的相似律,并据此提出了几种速度分布公式。这两个相似律就大众所周知的壁面定律和速度跌落定律。前者确定了在紧靠固体壁面区域内的速度分布规律,后者则限定了在近界层边缘区域内的速度分布规律。在这两个速度分布律对应的区域之间是一个两者都应同时成立的重叠区域,在该区域内的流线方向平均速度是按对数规律分布的(1):

$$\frac{u_s}{u_0} = \frac{1}{K} \ln \frac{yu_0}{\nu} + B_2 \quad (1)$$

在现有的速度分布公式中最有名的是Coles公式,他提出用伴流函数 W 来表示速度跌落定律,并证明该函数对各种边界层情况具有通用性(2):

$$\frac{u_s}{u_0} = \frac{1}{K} \ln \frac{yu_0}{\nu} + B_2 + \frac{B}{2KA} \cdot W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (2)$$

已经提出过几种伴流函数 W 的表达式,然而并不是所有这些表达式都能满足在界边缘 $y = \delta$ 处的边界条件

$$\frac{du_s}{dy} = 0$$

Granville综合各家的意见提出了一个能满足上述条件的伴流函数(3)。据此公式(2)实为:

$$\begin{aligned} \frac{u_s}{u_0} = & \frac{1}{K} \ln \frac{yu_0}{\nu} + B_2 + \frac{B}{KA} \left(3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right) \\ & + \frac{1}{K} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

计算表明,他提出的这个伴流函数大体能适用于各种压力梯度的情况。但是,这公式中的对数函数部分是有缺点的,不适用于近壁处,当 $y \rightarrow 0$ 时,(3)式给出 $u_s \rightarrow -$

为解决这一问题, Musker 提出了新的近壁处速度分布律(4):

$$\frac{du_*}{dy_*} = \frac{K+cy_*^2}{K+cy_*^2+Kcy_*^3} \quad (4)$$

其中: $u_* = \frac{u_s}{u_0}$

$$y_* = \frac{yu_0}{\nu}$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = Q_e \sqrt{\frac{C_f}{2}} = Q_e \cdot K \cdot A \quad (5)$$

将(4)式代替(3)式中的对数律, 并按 $K=0.41$ 和 $C=0.001093$ (相当于 $B_2=0.5$), Musker 给出了如下的边界层速度分布的表达式:

$$u_s = Q_e \left[5.424KA \tan^{-1} \left(\frac{y_* - 4.077}{8.35} \right) + 0.868KA \ln \left(\frac{(y_* + 10.6)^{4.8}}{y_*^2 - 8.15y_* + 86} \right) \right. \\ \left. - 3.52KA + A \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) + B \left\{ 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} \right] \quad (6)$$

这是一个两参数的速度分布公式, 公式中的 δ 可由 $y=\delta$ 处的边界条件 $u_s=Q_e$ 来决定, 当 A 和 B 已知时, 这个公式完全确定了边界层内的速度分布。

以上所述, 是对于边界层速度分布公式的研究概况。

通常, 为节省计算工作量, 在用微分法进行边界层计算时是从驻点下游的某一站处开始的, 首先就要给出在该站上的边界层各速度分量及其导数的初值。这可以根据积分法算出的在该站号上的各积分参数, 按所选定的速度分布公式计算出来, 再用微分法继续算下去。荷兰水池的边界层计算程序 BLSHIP 中就是这样做的〔5〕。该程序采用了 Musker 速度分布公式用壁面摩擦系数 C_f 及动量厚度 θ_{11} 作为主要参数来确定 Musker 公式中的常数 A 和 B 。但是鉴于 Musker 公式比较复杂, 所以仍然采用 Granville 的速度分布公式(3)代入 θ_{11} 的定义积分, 导出下式:

$$\frac{\theta_{11}}{\delta} = -1.91 - 3A^3 - 0.3714B^2 - 1.5214BA + \frac{11}{12}A + \frac{B}{2} \quad (7)$$

这样, A 可以按 C_f 值由(5)式确定, 再利用(6)、(7)式就可以迭代求解出所需要的速度分布值。但是, 应用的结果发现有两个问题: 一是所求出的边界层内的速度分布规律和实际情况还有相当的差别。看来用两个参数来确定整个边界层内的速度分布规律还显得粗糙了一些。其次是求出的边界层速度分布线所围的面积和按 θ_{11} 所要求的值有差异; 显然, 这是由于采用 Granville 公式导出的(7)式所造成的, 这说明该式由于在近固壁处的缺点而造成的影响是不能忽略的。若直接用 Musker 公式来满足 θ_{11} 的条件, 就不会造成这一误差。本研究的目的是要解决这两个问题。

二、Musker 乱流边界层速度分布公式的一般形式

对于乱流边界层速度分布的对数律(1)曾经在不同的情况下做过许多实验并发表了

应的结果。(1)式中 B_2 值可能有相当大的变化。注意到 Musker 用自己提出的壁面处的速度律来代替对数律时要求在 $y_* \rightarrow \infty$ 时新的速度律应对数律拟合这一条件，又考虑到 δ_* 值实际上已足够大，可以用 $y_* = \delta_*$ 来代替 $y_* \rightarrow \infty$ ，由此应有如下的拟合关系式

$$\int_0^{\delta_*} \frac{K + cy_*^2}{K + cy_*^2 + cKy_*^3} dy_* = \frac{1}{K} \ln \delta_* + B_2 \quad (8)$$

这是一个 c 和 B_2 的关系式。对数律中常数 B_2 的变化应该对应于 Musker 速度律中常数 c 的变化。在本文附录中对一关系进行了详细的研究，并且导出了一个数值计算公式

$$c = \frac{1}{89.43 + 71.57 B_2 + 17.448 B_2^2 + 0.6529 B_2^3} \quad (9)$$

可见，相应于 B_2 的变 c 值也有相当大的变化。因此，应该保持(4)式中的 c 为参数以计及 B_2 的变化，从而把 Musker 根据 $B_2 = 5.0$ (相应于 $c = 0.001093$) 所推导的两参数 Musker 公式(6)推广到更一般的三参数的形式。具有推导如下：

对(4)积分则有：

$$u_* = \frac{u_s(y)}{u_0} = \int_0^{y_*} \frac{du_*}{dy_*} dy_* = \int_0^{y_*} \frac{K + cy_*^2}{K + cy_*^2 + cKy_*^3} dy_* \quad (10)$$

右边被积分式的分母是一个三次多项式，当 B_2 取不同值时，常数 c 在 $0-0.002$ 范围内变化（见附录）；因此上述三次多项式的判别式为正，它的三个根是

$$y_{*1} = -2F_1 - \frac{1}{K}$$

$$y_{*2} = F_1 + iF_2$$

$$y_{*3} = F_1 - iF_2$$

$$\text{其中: } \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{3K} \right)^3 + \sqrt{\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{3K} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{3K} \right)^3 - \sqrt{\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{3K} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right) - \frac{1}{3K} \\ F_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{3K} \right)^3 + \sqrt{\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{3K} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2c} + \left(\frac{1}{3K} \right)^3 - \sqrt{\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{3K} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

由于 $c < 0.002$ ，故可对 F_1 、 F_2 表达式右边各开方项作泰勒展开，并略去高阶(1)量，最终得到如下简化的表达式：

$$\begin{cases} F_1 = 0.5 \sqrt[3]{\frac{1}{c}} - \frac{1}{3K} \\ F_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{c}} \end{cases} \quad (12)$$

分母三次多项式可写成:

$$\begin{aligned} y_*^3 + \frac{y_*^2}{K} + \frac{1}{c} &= (y_* - y_{*1})(y_* - y_{*2})(y_* - y_{*3}) \\ &= (y_* + 2F_1 + \frac{1}{K})(y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2) \end{aligned}$$

假设(12)中的被积多项式可以分解为两个被积多项式的和:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{c} + \frac{y_*^2}{K}}{y_*^3 + \frac{y_*^2}{K} + \frac{1}{c}} &= \frac{D_1}{y_* + 2F_1 + \frac{1}{K}} + \frac{D_2 y_* + D_3}{y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2} \\ &= \frac{(D_1 + D_2)y_*^2 + (-2F_1 D_1 + (2F_1 + \frac{1}{K})D_2 + D_3)y_* + (F_1^2 + F_2^2)D_1 + (2F_1 + \frac{1}{K})D_3}{(y_* + 2F_1 + \frac{1}{K})(y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2)} \end{aligned}$$

式中 D_1, D_2, D_3 为待定常系数, 比较上式左右两边分子多项式的同类项系数, 得出了如下关系式

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{K} \quad (13)$$

$$-2F_1 D_1 + (2F_1 + \frac{1}{K})D_2 + D_3 = 0 \quad (14)$$

$$(F_1^2 + F_2^2)D_1 + (2F_1 + \frac{1}{K})D_3 = \frac{1}{c} \quad (15)$$

由(13)得: $D_2 = \frac{1}{K} - D_1$

代入(14), 则有 $D_3 = (4F_1 + \frac{1}{K})D_1 - \frac{2F_1}{K} - \frac{1}{K^2}$

再代入(15)则有:
$$D_1 = \frac{\frac{1}{c} + \frac{4F_1^2}{K} + \frac{4F_1}{K^2} + \frac{1}{K^3}}{9F_1^2 + \frac{6F_1}{K} + \frac{1}{K^2} + F_2^2}$$

于是有:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{-\frac{1}{c} + \frac{5F_1^2 + F_2^2}{K} + \frac{2F_1}{K^2}}{9F_1^2 + \frac{6F_1}{K} + \frac{1}{K^2} + F_2^2} \\
 D_3 &= \frac{\frac{4F_1}{c} + \frac{\frac{1}{c} - 2F_1^3 - 2F_1 \cdot F_2^2}{K} - \frac{F_1^2 + F_2^2}{K^2}}{9F_1^2 + \frac{6F_1}{K} + \frac{1}{K^2} + F_2^2}
 \end{aligned} \quad (16)$$

10式可相应的分为两个积分:

$$u_* = \int_0^{y_*} \frac{D_1}{y_* + 2F_1 + \frac{1}{K}} dy_* + \int_0^{y_*} \frac{D_2 y_* + D_3}{y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2} dy_*$$

可以分别进行积分:

$$\int_0^{y_*} \frac{D_1}{y_* + 2F_1 + \frac{1}{K}} dy_* = D_1 \ln(y_* + 2F_1 + \frac{1}{K}) - D_1 \ln(2F_1 + \frac{1}{K})$$

$$\int_0^{y_*} \frac{D_2 y_* + D_3}{y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2} dy_* = \frac{D_2}{2} \ln(y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2)$$

$$-\frac{D_2}{2} \ln(F_1^2 + F_2^2) + \frac{D_3 + F_1 D_2}{F_2} \tan^{-1} \left(\frac{y_* - F_1}{F_2} \right) - \frac{D_3 + F_1 D_2}{F_2} \tan^{-1} \left(-\frac{F_1}{F_2} \right)$$

考虑到(5)式, 并将上述积分整理后, 再结合 Granville 伴流函数, 就可得出 Musker 乱流边界层速度分布公式的一般形式:

$$\begin{aligned}
 u_s(y) &= Q_e \cdot K A \left\{ \frac{D_3 + F_1 D_2}{F_2} \tan^{-1} \left(\frac{y_* - F_1}{F_2} \right) - \frac{D_2}{2} \ln \left(\frac{y_*^2 - 2F_1 y_* + F_1^2 + F_2^2}{F_1^2 + F_2^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(D_1 \ln(2F_1 + \frac{1}{K}) + \frac{D_2}{2} \ln(F_1^2 + F_2^2) + \frac{D_3 + F_1 D_2}{F_2} \tan^{-1} \left(-\frac{F_1}{F_2} \right) \right) \right\} \\
 &\quad + Q_d \left\{ A \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) + B \left(3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

若以 $K = 0.41$, $C = 0.001093$ 代入, 则正好得到 Musker 公式(6), 这也证明上述推导过程是正确的。