

中国工程热物理学会

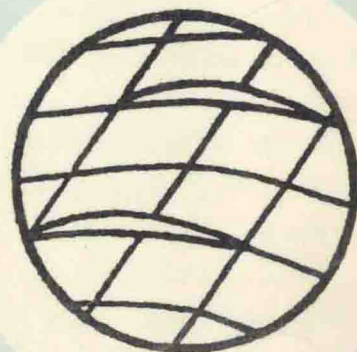
热机气动热力学学术会议

论文集

一九九九

镇江

中国工程热物理学会编



热机气动热力学目录

一、湍流模型及计算方法的研究

- 992006 二维跨声速有旋流动反命题的赝势函数变分原理 沈远胜、刘高联 I -1-5
- 992003 叶栅内通道涡发展及其结构演化* (Part 1 涡结构判别原则) 王松涛、吴猛、冯国泰、韩万金、王仲奇 I -6-6
- 992004 叶栅内通道涡发展及其结构演化* (Part 2 通道涡结构演化的数值模拟) 王松涛、吴猛、冯国泰、韩万金、王仲奇 I -12-7
- 992012 求解 Euler 方程的高精度的空间 — 时间守恒格式 杨吉民、徐建中 I -19-6
- 992016 近壁区理论耗散率 $k-\varepsilon$ 模型的研究 陆利蓬、陈矛章 I -25-4
- 992023 多组份混合工质掺混机理数值研究 蔡剑钢、袁新、叶大均 I -29-6
- 992022 采用高分辨率高精度格式求解跨音压气机转子内三维粘性流场 徐纲、袁新、叶大均 I -35-8
- 992028 激波在收缩 — 扩张喷管中位置的解析 — 数值解 王伯年、曹伟武 I -43-6
- 992049 几何对称性处理对自由平面湍射流大涡模拟的影响 范全林、张会强、郭印诚、王希麟、林文漪 I -49-8

二、数值模拟方法的研究和应用

- 992001 轴向超音来流风扇转子的流场数值模拟 季路成、徐建中、项林、周盛 II -1-6
- 992010 二维气动探针非定常流测量中动态效应的数值研究 李宇红 II -7-8
- 992011 使用流道反算延伸的多叶片排并行计算 赵晓路 II -15-7
- 992018 用非线性双方程湍流模型模拟翼型分离流动 张士杰、袁新、叶大均 II -22-5
- 992044 关于 Krain 实验叶轮几何型线及其流道二次流旋涡结构的讨论 席光 II -27-6
- 992045 汽封结构内三维流动现象的数值研究 蔡虎、朱斌、徐星仲、蒋洪德 II -33-6
- 992057 掠弯叶片前缘曲线同流场结构的关联 邢秀清、周盛、赵晓路 II -39-6
- 992058 子午扩压对环形叶栅流道内旋涡发生和发展的影响 安柏涛、韩万金、芦文才、王仲奇 II -45-7
- 992059 低压透平排汽缸内三维粘性流动的数值模拟 徐旭、康顺、蒋洪德 II -52-7

992061 非光滑叶片对叶栅流道内能量损失系数分布的影响	赵桂林、闻洁、何龙德、董志成、许可法 II -59-6
992063 NASA67 风扇跨音级内粘性流场的准定常数值模拟	赖焕新、康顺 II -65-7
992038 高压联合进汽阀门三维粘性流场数值分析	王继宏、刘建军、崔永强、蒋洪德 II -72-6
992042 基于区域分解算法的叶顶间隙流场的数值模拟	袁宁、张振家、黄洪雁、王松涛、冯国泰 II -78-6

三、设计及优化

992005 不同积叠线形式对涡轮性能的影响	黄洪雁、袁宁、王松涛、王仲奇、冯国泰 III -1-6
992013 基于遗传算法的离心压缩机叶栅多点优化设计	樊会元、席光、王尚锦 III -7-7
992014 端壁边界层抽吸技术在汽轮机调节级静叶栅中的应用	郭绪奎、俞茂铮、毛靖儒 III -14-6
992015 基于遗传算法的透平级多目标优化设计	童彤、丰镇平 III -20-8
992017 二维翼型增升数值模拟	张宏武、江学忠、袁新、叶大均 III -28-6
992020 海豚形涡轮短叶栅的气动优化计算	陶正良、陈康民、王国清 III -34-5
992021 轴向速度变化时叶栅性能修正的 Schlichting 奇点解法	魏兵海、吴克启 III -39-5
992029 正反问题数值解法相结合三维叶片的优化设计	王正明、贾希诚 III -44-8
992035 先进控制流透平设计的展望	徐大懋 III -52-8
992056 考虑粘性及展向掺混的轴流和离心组合压气机流动分析	秦立森 III -60-7
992064 由两个风扇转子设计得到的启示	季路成、项林、邢秀清、周盛、徐建中 III -67-5

四、非定常流动和气动声学

992019 进气非均匀轴流压缩系统的动态失速模型	胡骏 IV -1-6
992026 非均匀来流对转子叶片流体激振的特性分析	陈佐一、霍福鹏、刘红 IV -7-6
992027 振荡流在多级涡轮流动中的传播特性	霍福鹏、陈佐一、刘红 IV -13-6
992037 计及 Re 数影响的气动 — 声学性能实验及优化设计	蔡娜、徐建中 IV -19-8
992046 处于部分进汽时动叶片排内非定常流动现象的数值研究	徐星仲、徐力平、蔡虎、蒋洪德 IV -27-6

992051 基于小波变换的离心压气机旋转失速先兆时频分析	程晓斌、陈静宜	IV -33-6
992053 降低叶轮机转 / 静干涉噪声的几种技术途径探讨	李妍、景小东、孙晓峰	IV -39-8
992054 圆孔声学非线性效应的数值模拟	景小东、孙晓峰	IV -47-8
992055 旋转总压畸变对压气机稳定性的影响	胡骏	IV -55-6

五、实验研究

992002 带有后掠转子的跨音速单级风扇设计与试验	魏玉冰、陈葆实	V -1-6
992007 轴流压气机小流量状态转子泄漏涡的三维紊流特性	马宏伟、蒋浩康	V -7-8
992008 离心压气机转子内近端壁区三维紊流流场	马宏伟、蒋浩康	V -15-6
992009 轴流压气机小流量状态转子泄漏涡的时均流动	马宏伟、蒋浩康	V -21-6
992024 可变弯度导叶及其后转子的性能研究	刘红、朱俊强	V -27-6
992025 提高叶片局部粗糙度对风机效率影响的实验研究	霍福鹏、孟繁娟、钟洪亮、陈佐一、孙稳立、杨乃峰、蒋正苗	V -33-6
992039 扩压叶栅出口近端壁区域流动结构和紊流特性	刘火星、陈矛章、蒋浩康	V -39-6
992040 超音流场的 PIV 测量	刘宝杰、杨枝伟、高歌、王同庆	V -45-7
992041 单级轴流后掠跨音风扇性能实验	于清、袁巍、李玲、陆亚钧	V -52-6
992043 扩压叶栅角区马蹄涡的实验研究	刘火星、陈矛章、蒋浩章	V -58-6
992052 跨音压气机转子叶尖间隙复杂流动观测	桂幸民、聂超群、王同庆、于清、李运敏、史伟	V -64-6
992060 非光滑叶片对叶栅流道内通道涡影响的实验研究	赵桂林、闻洁、何龙德、董志成、许可法	V -70-8
992062 动叶可调轴流风机出口流场的实验研究	陈海生、梁锡智、谭春青、吴海、赖焕新	V -78-6
992066 气液两相瞬变流数值计算及实验研究	郑铭、张文涛	V -84-7

六、其它

992030 燃气轮机进气用蒸发式冷却器的两相流数值模拟	林枫、闻雪友、张慧	VI -1-8
992031 颗粒群激波加速运动数值计算	耿继辉、许厚谦	VI -9-6
992034 应用神经网络法智能识别油气水多相流流型	吴浩江、周芳德、何安定	VI -15-6
992048 涡结构对气泡运动的影响	张会强、王赫阳、王希麟、郭印诚、林文漪	VI -21-6

二维跨声速有旋流动反命题的势函数变分原理

沈远胜 刘高联

(上海大学, 上海市应用数学与力学研究所, 200072)

摘要:本文以前文所得正命题变分原理为基础, 通过对边界项进行变域变分的详细分析, 构造出了未知壁面的自然边界条件, 推导出了求解反命题的变域变分原理, 这些工作为采用有限元求解气动反命题奠定了完密的数学基础。

关键词 反命题, 变分原理, 有旋流动, 势函数

I. 引言

在前文献[1]中, 应用缩项法提出了求解叶轮机跨叶后有旋流动(特别是跨声速流动)的势函数模型, 这是常规势函数对有旋流动的一个自然的、物理上相容、数学求解简便的推广。在文[1]中还导出了该模型正命题的变分原理族及其对跨声速叶栅的有限元解, 验证了它的有效性。但文[1]在导出变分原理时, 曾假定涡势函数为已知量, 故需对它进行迭代修正, 这在实用上是很方便的, 但在理论上则未免有欠完密。为了弥补这一缺陷, 在文[2、3]中重新严格建立了正命题完密的变分原理。本文将在前文[2、3]的基础上, 应用泛函变域变分工具, 推广建立了反命题的变分原理。

II 二维有旋流动反命题的势函数模型

二维定常、无粘、有旋流动的势-涡势函数基本方程为[1~3]:
连续方程:

$$\frac{\partial(\rho \Lambda_{\kappa})}{\partial x_{\kappa}} = 0 \quad (1)$$

旋度方程(y向动量方程):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \rho T \frac{ds}{d\psi} = 0 \quad (2)$$

能量方程:

$$\frac{P}{\rho} + E + \frac{\Lambda^2}{2} = 0 \quad (3)$$

流函数定义式:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \rho \Lambda_2 = 0 \quad (4)$$

Gibbs热力学恒等式:

$$Tds = dE + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (5)$$

势函数定义式:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Lambda_1 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \Pi = \Lambda_2 \quad (6)$$

本文中各符号的含义见文末所附的符号表。

反命题的边界条件

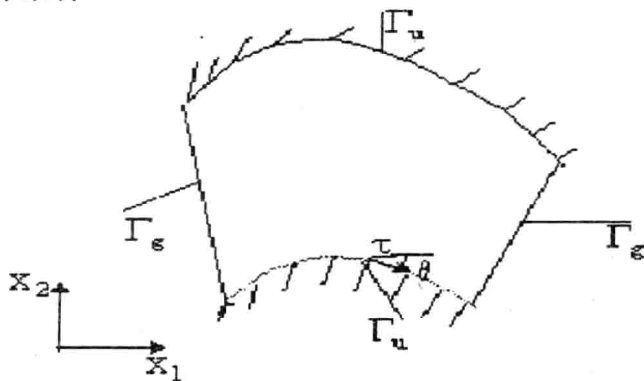


图 1 二维流动的物面

在反命题的问题中, 边界 $\Gamma = \Gamma_g + \Gamma_u$ (图1), 这里 Γ_g 代表已知边界部分, 而 Γ_u 代表未知边界部分。

在 Γ_g 边界段上, 其边界条件仍与正命题时一样, 即已知密流分布:

$$\rho \Lambda_n = q_{n,pr}(x_1) \quad (7)$$

同时 Γ_g 上的流函数分布也可由下式求出:

$$\psi(x_1) = \int -\rho \Lambda_n d\tau = - \int q_{n,pr} \left(\frac{d\tau}{dx_1} \right) dx_1 = - \int q_{n,pr} \cos \theta dx_1 \quad (8)$$

但在未知边界段 Γ_u 上, 边界条件则由下式表示:

$$p = p(x_1) \quad \text{及} \quad q_n = 0 \quad (9)$$

此外在激波面上, 该满足 Rankine-Hugoniot 关系式^[4]。

III 二维有旋流动的势函数反命题变分原理

为进行反命题的计算, 我们对文[2、3]所建立的正命题的变分原理泛函

$$J'(\rho, \psi, \Phi, \Pi) = \iint \left[\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\Pi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 - E(\rho, s(\psi)) \right] \right]$$

$$-\Pi \left[\rho \left(\Pi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right] + \Phi \left[\frac{\partial (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial [\rho (\Pi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2})]}{\partial x_2} \right] \Bigg\} dx_1 dx_2 \quad (10)$$

进行变域变分分析，具体构造出反命题的变分原理。

为此对(10)式分部积分（只保留其面积积分项），得：

$$J'' = - \iint \left\{ \rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\Pi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + E(\rho, s(\psi)) \right] + \Pi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\} dx_1 dx_2 \quad (11)$$

而二维变域变分的公式为^[4]：

$$\begin{aligned} \delta I(\Phi^{(i)}) = & \iint_{(A)} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi^{(i)}} - \nabla \cdot \bar{G}^{(i)} \right) \delta \phi^{(i)} dA \\ & + \oint_{(\Gamma)} \left[G_n^{(i)} \delta \phi^{(i)} + (F - G_n^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial n}) \delta e_n - G_n^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial \tau} \delta e_\tau \right] ds \end{aligned} \quad (12)$$

其中，应对指标 i 应用爱因斯坦求和规则， $\bar{G}^{(i)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_{x_1}^{(i)}} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial \phi_{x_2}^{(i)}} \bar{j}$ 。对本问题而

言，我们有 $\{\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4\}^T = \{\Phi, \rho, \Pi, \psi\}^T$ 。

由(11)式，我们得变域变分公式中 F 项的具体形式为：

$$F = -\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\Pi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + E(\rho, s(\psi)) \right] - \Pi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (13)$$

由(13)式，得： $\frac{\partial F}{\partial \Phi} = 0$ ， $\bar{G}^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_{x_1}} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial \Phi_{x_2}} \bar{j} = -\rho \bar{\Lambda}$ ，同理可求得：

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\Lambda^2}{2} - E - \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} = -\left(\frac{\Lambda^2}{2} + E + \frac{p}{\rho}\right), \quad \bar{G}^{(2)} = \frac{\partial F}{\partial \rho_{x_1}} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial \rho_{x_2}} \bar{j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \Pi} = -\rho \Lambda_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\bar{G}^{(3)} = \frac{\partial F}{\partial \Pi_{x_1}} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial \Pi_{x_2}} \bar{j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} = -\rho \frac{\partial E}{\partial s} \frac{ds}{d\psi} = -\rho T \frac{ds}{d\psi}, \quad \bar{G}^{(4)} = \frac{\partial F}{\partial \psi_{x_1}} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial \psi_{x_2}} \bar{j} = -\Pi \bar{i},$$

将以上各式代入变域变分公式(12)，得(11)式的变域变分表达式如下：

$$\begin{aligned} \delta J'' = & \delta \bar{J} + \oint_{\Gamma} [-q_n \delta \Phi - \Pi n_{x_1} \delta \psi] ds + \int_{\Gamma_u} \left\{ (F + q_n \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial n}) \delta e_n \right. \\ & \left. + [q_n \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}] \delta e_\tau \right\} ds \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{其中 } \delta \bar{J} = \iint \left[\frac{\partial \rho \Lambda_k}{\partial x_k} \delta \Phi - \left(\frac{\Lambda^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} \right) \delta \rho - \left(\rho \Lambda_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \delta \Pi + (-\rho T \frac{\partial s}{\partial \psi} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}) \delta \psi \right] dA$$

为便于具体计算, 故意规定边界变分一律沿 x_2 方向进行 (显然, 这丝毫不会失去普遍性), 即取 $\delta \bar{e} = \delta x_2 \bar{J}$, 于是 $\delta \bar{e} \cdot \bar{n} ds = \delta x_2 \bar{J} \cdot \bar{n} ds = -\delta x_2 dx_1$, 将其代入(14)式得如下公式:

$$\begin{aligned} \delta J'' = \delta \bar{J} + \oint_{\Gamma} [-q_n \delta \Phi - \Pi n_{x_1} \delta \psi] ds - \int_{\Gamma_u} (F + q_n \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial n}) \delta x_2 dx_1 \\ + \int_{\Gamma_u} [q_n \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}] \delta e_{\tau} ds \end{aligned} \quad (15)$$

由 $\delta J'' = 0$ 得泛函的驻值必要条件组:

欧拉方程组: (1)、(2)、(3)和(4)式

自然边界条件:

沿 Γ_g 上: (7)式。

沿 Γ_u 上:

$$q_n = 0 \quad (16)$$

$$F + q_n \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (17)$$

$$q_n \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Pi n_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 \quad \text{即} \quad q_n \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \Pi n_{x_1} \rho \Lambda_n = 0 \quad (18)$$

在激波上: 满足 Rankine-Hugoniot 关系式^[4]。

将欧拉方程(3)、(4)及(6)式代入(13)式, 再结合 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\rho \Lambda_{\tau}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = q_n$ 和(16)

式, 知(18)式自动满足, 而(17)式可简写为如下形式:

$$F = P + \rho \Pi \Lambda_2 \quad (19)$$

$$P = 0 \quad (20)$$

为了得到反命题的泛函, 应将 J'' 加以改造^[5], 以便得到反命题的自然边界条件 $p = p_{pr}$, 因此必须增补未知壁面 Γ_u 上的下列项: $\int_{\Gamma_u} p_{pr} x_2 dx_1$, 因而可得反命题

的变分泛函如下:

$$J_1 = J'' + \int_{\Gamma_u} p_{pr} x_2 dx_1 \quad (21)$$

IV 结束语

本文以上文所推导的变分原理为基础, 利用二维变域变分理论, 推导出了求解反命题的变域变分原理, 所有这些工作为其有限元计算奠定了坚实的数学基础。

参考文献

- [1] Liu, Gao-Lian and Wang, Hong-guang : A new Pseudo-potential function for rotational flow and its application to transonic turbo-flow : Pt. I -Blade-to-Blade flow .Int.J.Turbo & Jet Engines , 13(1996) 263-275
- [2] 沈远胜: 上海大学博士论文, 1999年4月
- [3] 刘高联, 沈远胜: 二维跨声速有旋流动正命题的赝势函数变分原理, 将发表。
- [4] Liu, Gao-Lian : A variable-domain variable theory using Clebsch variables for hybrid problems of 2-D transonic rotational flow , Acta Mechanica , 99(1993) 219-223.
- [5] 刘高联: 流体力学变分原理的建立与变换的系统性途径, 工程热物理学报, 11 (1990) 136-142 。
- [6] Finlayson B.A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles , Acad.Press, 1972.

符号说明:

Φ	赝势函数	P	压力
Π	涡势函数	ρ	密度
ψ	流函数	$\bar{e}$	边界变位置矢
E	内能	n	外法线
S	熵	τ	边界切线
$q = \rho \Lambda$	密流	Λ	流速
下标:		上标:	
pr	给定	$\sim$	定域变分

叶栅内通道涡发展及其结构演化★

(Part 1 涡结构判别原则)

王松涛 吴 猛 冯国泰 韩万金 王仲奇

(哈尔滨工业大学 241 教研室 哈尔滨 150001)

摘 要

给出了任意曲线坐标系下截面涡结构的判别准则, 并通过对与涡轴垂直和斜交截面上旋涡结构关联式的研究, 给出了在与涡轴斜交的截面上描述旋涡速度矢量的原则。遵循此原则, 可保证在与涡轴斜交的截面上, 所得到的旋涡与流场中实际旋涡在涡结构与旋涡存在性两方面的一致性。

关 键 词 旋涡结构, Godunov 格式, TVD, 数值模拟

1 引 言

叶栅流场中存在着各种各样的复杂旋涡流动, 目前比较明确的典型的集中涡有马蹄涡、通道涡、壁角涡以及尾缘涡, 这些集中涡的生成位置、尺度大小、强度、相互作用以及结构的稳定性都极大地影响着损失的分布及损失的大小。

定常流中集中涡的定义为流体微团绕某公共轴的旋转^[1], 如果集中涡存在, 则旋涡截面轴线上的点是一螺旋点或中心点。在横截面上, 轴线上的点由螺旋点或中心点发生转变, 其过渡状态对应于分叉状态, 这种分叉状态即对应于由螺旋点到节点的过渡。因此可以从涡轴上的点的拓扑结构的变化来预测旋涡的发展过程。

国内外许多研究者在集中涡结构及其非线性分叉行为方面进行了深入的研究, 其中张涵信教授在这一领域取得了令人瞩目的进展^[2-4]。目前, 关于叶栅内集中涡拓扑结构的研究还不多见。本文试图将集中涡结构理论引入到叶栅粘性流场分析中, 并将涡结构的改变与损失的变化联系起来。

2 任意曲线坐标系下涡结构的判别准则

文献[3]给出了直角坐标系下, 且与涡轴垂直截面上旋涡结构发生变化的判别准则。下面简述一下文献[3]的有关结论。

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad (1)$$

式中 ρ , w , z 分别为流体密度、沿涡轴的轴向速度及涡轴方向。旋涡的稳定性就由 λ 的符号所决定^[3]。

众所周知, 叶栅内的各种集中涡, 无论是通道涡、马蹄涡还是壁角涡其涡轴方向

★ 国家自然科学基金资助。

均不可能是直线, 因此在研究叶栅流场内旋涡结构时, 有必要给出任意曲线坐标系下截面涡结构的判别准则。

图 1 为任意曲线坐标系, 其中 x^1 为涡轴方向, $x^2 O x^3$ 为所取截面, 则在该截面上流线方程

$$\frac{dx^3}{dx^2} = \frac{V^3}{V^2} \quad (2)$$

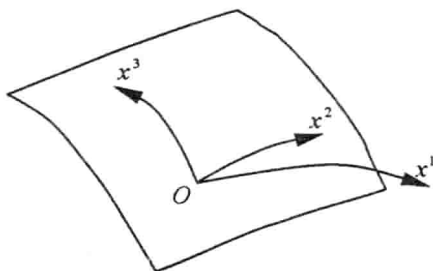


图 1 涡轴附近任意曲线坐标系

上式即为在任意曲线坐标系下, $x^2 O x^3$ 截面上的流线方程, 式中 V^a 为逆变分量。该截面上迹线族的拓扑性质便由上式所决定。另外, 设 O 是涡轴 x^1 与截面 $x^2 O x^3$ 的交点, 则在 O 点处有 $V^3 = V^2 = 0$, 在 O 点附近, V^3 、 V^2 可表示为

$$V^3 = (V^3)_o + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^1}\right)_o x^1 + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)_o x^3 + \dots \quad (3a)$$

$$V^2 = (V^2)_o + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^1}\right)_o x^1 + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^3}\right)_o x^3 + \dots \quad (3b)$$

因为 x^1 为涡轴方向, 在涡轴上便有 $(V^3)_o = (V^2)_o = 0$ 。故而(2)式可写为

$$\frac{dx^3}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial V^3}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)_o x^3}{\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^3}\right)_o x^3} \quad (4)$$

由常微分方程定性分析理论知, 若设

$$J = \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}\right)_o \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)_o - \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^3}\right)_o \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^2}\right)_o \quad (5a)$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)_o \quad (5b)$$

当 $4J - \Delta^2 \leq 0$ 时, 方程(4)在 O 点附近所代表的流态为鞍点、结点或退化结点, 而当 $4J - \Delta^2 > 0$ 时, 所代表的流动为螺旋点或中心点。为了进一步给出 Δ 的物理含义, 我们在如图 1 所定义的任何曲线坐标系下, 将定常可压缩流体的连续方程展开

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (6a)$$

因在涡轴上, $V^3 = V^2 = 0$, 则上式可写为

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\rho V^1)}{\partial x^1} + \sqrt{g}\rho\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right) = 0 \quad (6b)$$

进一步可推得

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}\rho} \frac{\partial(\sqrt{g/g_{11}}\rho u^1)}{\partial x^1} \quad (7a)$$

式中 u^1 为 x^1 向的逆变物理分量。

$$\text{令 } \lambda = \frac{1}{\sqrt{g}\rho} \frac{\partial(\sqrt{g/g_{11}}\rho u^1)}{\partial x^1} \quad (7b)$$

(7b)式即为任意曲线坐标系下判别旋涡形式的准则, 若选取的坐标系为正交坐标系, 则

$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}} = 1$, 进一步可推得(7b)式与张涵信教授所推得的(1)式完全一致。

由常微分方程定性分析理论知, 涡轴附近流线走向即由 λ 决定。当所取截面为任意曲面时, 其上涡轴附近的拓扑结构即为由(7b)式所决定。当 $\lambda > 0$ 时于涡轴附近, 旋涡是稳定的, 即流线指向旋涡中心; $\lambda < 0$, 则在所取截面上于涡轴附近, 旋涡是不稳定的, 即流线指向外部; 若 $\lambda = 0$, 则在该截面上于涡轴附近流线具有中心点形态。若一发展中的旋涡, 沿其轴线 λ 变号, 该值由正变负, 涡心附近的截面流线上开始出现稳定的极限环, 反之则将出现不稳定的极限环。

3 与涡轴垂直和斜交截面上涡结构的关联式

在多数情况下, 尤其是在叶轮机内, 旋涡主轴方向很难确定。因此有必要讨论当所取截面法线平行于涡轴和与涡轴斜交这两种情况下, 涡轴附近截面拓扑结构的变化关系。

为了显示所研究截面上的集中涡结构, 必须将涡轴速度的影响清除掉。截面速度矢量定义如图2所示。按照此种定义方式, 任意速度矢量 $\vec{W}$ 可分解为, 沿径向的分量 u' 和 S_1 流面上的速度分量; 在 S_1 流面上的速度分量可分解为沿涡轴方向上的速度分量

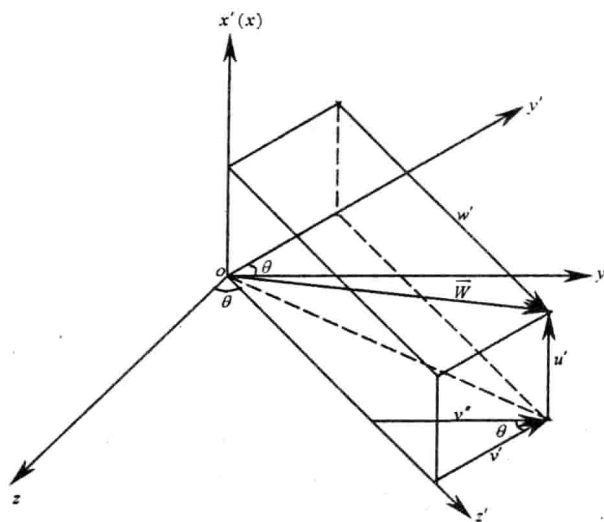


图2 截面速度矢量定义

w' 和垂直于涡轴方向上的速度分量 v' 。尽管此时所研究截面 xoy 并不于涡轴垂直, 但

在大多数实验中仍以垂直于涡轴截面上的两个速度分量 u', v' 作为所研究截面上的速度矢量分量, 即 x 向、 y 向及 z 向的速度分量 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 、 $w(x, y, z)$ (值得注意的是 v, w 两个速度分量, 并不是速度矢量真正沿 y 向及 z 向的速度分量) 与 u', v', w' 的关系如下

$$u' = u, v' = v, w' = w \quad (8)$$

为方便讨论, 我们取与涡轴斜交截面上的局部坐标架 z 轴沿该截面的法向, 另外两个坐标轴 x 轴和 y 轴位于该截面上, 并与 z 轴构成正交坐标系; 为了便于对比分析在与涡轴垂直的截面上构造了另外一套局部正交的坐标架, 该坐标系的 z' 轴沿涡轴方向, 另外两个坐标轴 x' 轴和 y' 轴位于与涡轴垂直的截面上, 并与 z' 轴构成正交坐标系。这两套坐标系关系是 x 和 x' 轴相重合, 坐标原点 o 与 o' 相重合, 轴 oy 与轴 oy' 相差 θ 角。两个坐标系之间的转换关系为

$$x' = x, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \cos \theta, \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = -\sin \theta, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \cos \theta \quad (9)$$

则在 xoy 截面上的流线方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, z)}{u(x, y, z)} \quad (10)$$

在 o 点仍有 $u = v = 0$, 必须注意到, 此时 z 轴不再是涡轴, 故在 o 点附近于 xoy 面上有

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y + \dots \quad v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o y + \dots \quad (11)$$

将上两式代入(10)式有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o y}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y} \quad (12)$$

令

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o, \quad \Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o \quad (13)$$

由两套坐标系下参数的变换关系, 并考虑到沿涡轴恒有 $u' = v' = 0$, 则于涡轴附近有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)_o, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o = \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)_o \cos \theta$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o = \left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_o, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o = \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)_o \cos \theta \quad (14)$$

于是可将(13)式改写为

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_o - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_o \cos \theta$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)_o + \cos \theta \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)_o, \quad \gamma = 4J - \Delta^2 \quad (15)$$

上式即为采用(8)的定义方式得到的与涡轴斜交截面上的判别涡结构的三个基本关系式。在与涡轴垂直截面 $x'oy'$ 平面上的涡结构由下式决定

$$J' = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_o, \quad \Delta' = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)_o + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)_o, \quad \gamma' = 4J' - (\Delta')^2 \quad (16)$$

由(15)及(16)两式知, 若 γ 及 γ' 均为正值, 则在与涡轴斜交截面上和与涡轴垂直截面上的旋涡拓扑结构将分别由 Δ 和 Δ' 的符号决定。为方便讨论, 不妨设 $\Delta' > 0$, 即在涡轴垂直截面上的流线指向外部。在这种情况下, 讨论 Δ 的符号与 θ 角之间的关系。若要求 $\Delta \geq 0$, 则要求 θ 角满足下式

$$\cos \theta \geq -\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)_o / \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)_o \quad (17)$$

由(17)式可以得出, 即便是旋涡保持为稳定的结构, 若采用(8)的定义方式, 当所研究截面的法向与涡轴方向夹角不满足(17)式时, 在与涡轴斜交截面上的涡结构就会表现为是不稳定的, 而这与涡心的实际结构是不同的。因此当采用(8)的定义方式来研究与涡轴斜交截面上的涡结构时, 就一定要仔细地考虑 θ 角的取值范围。然而由(17)式可知, 在实际应用中很难确定 θ 角的取值范围, 因此有必要考虑怎样定义与涡轴斜交截面上的速度矢量, 以使我们能够方便而准确地研究该截面上的涡结构。为此本文对与涡轴斜交截面上的速度矢量参照图 2 采用如下定义方式

$$u = u'' = u', \quad v = v'' = v' / \cos \theta \quad (18)$$

将(18)式代入(8)~(16)的推导过程可得

$$J = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial x'}\right)_o = J'$$

$$\Delta = \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)_o + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)_o\right] = \Delta', \quad \gamma = 4J - \Delta^2 = \gamma' \quad (19)$$

下面讨论在与涡轴斜交截面上采用(18)式定义截面速度矢量方法的合理性。当 $\cos\theta \neq 0$ ，即所取截面不与涡轴相切时(以下讨论均在此前提条件下进行)

(1)若在与涡轴垂直截面上存在判别式 $\gamma' > 0$ 时，即在此截面上有旋涡存在时，则由(19)式知，在与涡轴斜交截面上亦必有旋涡存在；反之，若在与涡轴斜交截面上有旋涡存在时，则在与涡轴垂直截面上亦必有旋涡存在。上述结论保证了，与涡轴斜交截面上与涡轴垂直截面上旋涡存在的一致性；

(2)若在与涡轴垂直截面有 $\Delta' > 0$ (或 $\Delta' < 0$)，即在此截面上涡是不稳定(稳定)的，则在与涡轴斜交截面上亦必有 $\Delta > 0$ (或 $\Delta < 0$)，即在此截面上涡是不稳定(稳定)的；反之，若在与涡轴斜交截面上有 $\Delta > 0$ (或 $\Delta < 0$)，则在与涡轴垂直截面必有 $\Delta' > 0$ (或 $\Delta' < 0$)。上述结论保证了，与涡轴斜交截面上与涡轴垂直截面上旋涡结构的一致性。

上述研究给出了如何在与涡轴斜交截面上准确地描述旋涡运动的方法，为流场涡结构的研究给出了理论依据。本篇第二部分将依据上述理论及原则，对弯叶片流场结构尤其是集中涡的发展及演变过程进行研究。

4 结 论

1 为适应描述叶栅流场内集中涡结构的特点，给出了任意曲线坐标系下截面涡结构的判别准则。

2 通过对与涡轴垂直和斜交截面上旋涡结构关联式的研究，给出了在与涡轴斜交的截面上描述旋涡速度矢量的原则。遵循此原则，可保证在与涡轴斜交的截面上，所得到的旋涡与流场中实际旋涡在涡结构与旋涡存在性两方面的一致性。上述成果为研究叶栅内的旋涡结构给出了理论依据。

参 考 文 献

- [1] H. J. Lugt. Dilemma of Defining a Vortex Recent Development in Theoretical and Experiment Fluid Mechanics. Springer-Verlag, 1979:10
- [2] 张涵信. 邓小刚. 三维定常分离流和涡运动的定性分析研究. 空气动力学学报. 1992, 10(1):8-20
- [3] 张涵信. 旋涡沿轴线的非线性分叉. 空气动力学学报. 1994, 12(3):242-251
- [4] 张涵信. 分离流和涡运动横截面流态拓扑. 空气动力学学报. 1997, 15(1):1-11

叶栅内通道涡发展及其结构演化★

(Part 2 通道涡结构演化的数值模拟)

王松涛 吴 猛 冯国泰 韩万金 王仲奇

(哈尔滨工业大学 241 教研室 哈尔滨 150001)

摘 要

采用具有 TVD 性质的三阶精度 Godunov 格式, 对均匀加载叶型及后部加载叶型所构成的叶栅在不同弯角下的流场进行了数值模拟。详细研究了叶片弯曲后对通道涡截面拓扑结构的影响。发现叶片正弯后有利于使通道涡在结构上变得稳定; 同时也指出, 与常规叶片相比, 二次流损失较小的后部加载叶型所构成的叶栅内的通道涡在结构上较为稳定。本文进一步分析了通道涡结构的改变对损失的影响。

关 键 词 旋涡结构, Godunov 格式, TVD, 数值模拟

1 引 言

采用弯叶片可以有效地降低叶栅内的二次流损失^[1-4], 通过合理地控制弯角甚至可以使叶栅总损失显著下降。尽管弯叶片已被广泛采用, 但对于弯叶片减少端壁损失的精确机制仍不很明确, 研究者提出了多种不同的解释^[5]。本文试图通过数值模拟对弯叶片流场结构尤其是通道涡的发展过程及其与直叶栅的差异进行详细的研究。

2 数值方法

差分格式采用具有 TVD 性质的三阶精度的 Godunov 格式, 湍流模型为 B-L 代数模型^[6]。本文采用哈尔滨工业大学低速环形叶栅风洞实验对程序的可靠性加以验证。实验件为某巡航导弹发动机低压涡轮导向器的放大模型。该实验件的一个显著特点是, 在涡轮静叶前有一个较长的扩压段, 这无疑会增加计算的难度。

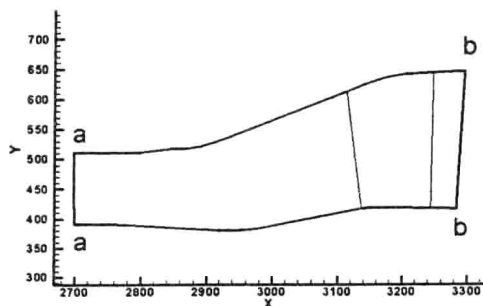


图 1 实验件及测量位置

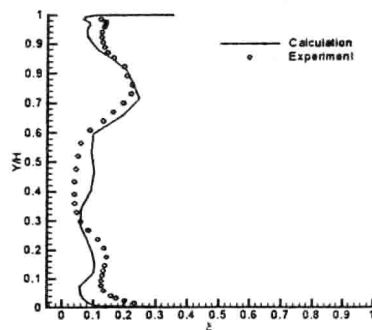


图 2 能量损失系数沿叶高分布

实验件的子午流道及计算站的测量位置见图 1。计算域的进口位置选在 a-a 截面上, 在该截面上的进口总温总压沿叶高的分布由实验提供, 其中径处的值分别为 $1.0045 \times 10^5 \text{ Pa}$ 及 305 K 。周向及径向进口气流角均为 0° 。b-b 截面为计算域的出口截面, 在此截面中径处的出口背压由实验测量提供, 其值为 $1.0021 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

为了详细描述进口扩压段的流场及其对整个流场的影响, 在该段沿轴向布置了 35 个网格点, 叶栅流道及出口延长段沿轴向的网格点数分别为 45 和 20, 这样, 整个计算域的网格点数为 $101 \times 41 \times 41$ 。实验与计算的对比位置选在计算域的近出口截面上。

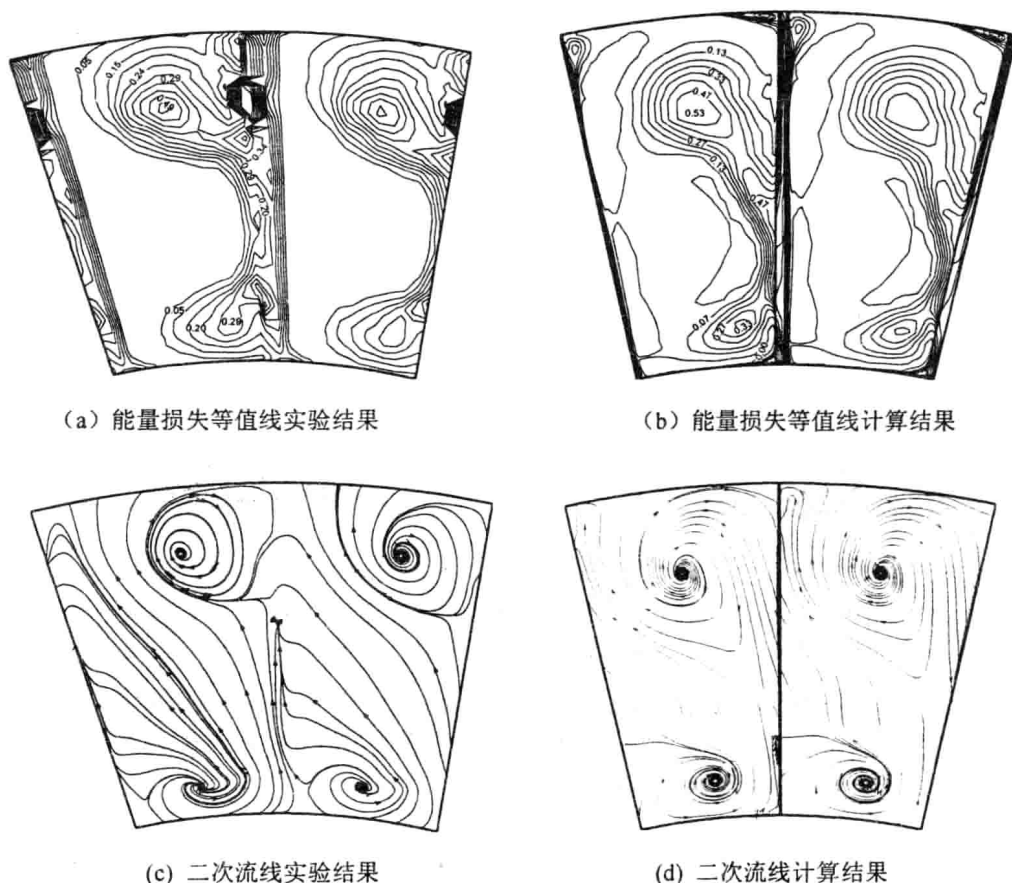


图 3 出口截面实验与计算结果对比

通过图 2 及图 3 可知, 在叶栅近出口截面上, 计算结果较为准确的预测出了通道涡所带来的高损失流动, 但对尾迹损失的预测与实验有所差别。结合截距平均损失系数的对比结果, 可以说明, 采用本文的方法可以较好地预测低马赫数下复杂流场的能量损失分布, 因此具有较强的工程实用性。另外从二次流线的对比分析可以看出, 计算较为准确地描述出了出口截面上的二次流动, 可以较好地预测复杂边界条件下的旋涡运动。

3 通道涡结构的演化及其对损失的影响

本节将对弯、直叶栅内通道涡拓扑结构的差异进行分析。为了增加结论的普遍性, 本节将对均匀加载叶片在正弯 15° 和正弯 30° , 及后部加载叶片在正弯 18° 情况下叶栅