第17卷 第11期
1961年11月
物理学报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 17, No. 11
Nov., 1961

弱作用对輕子电磁性质的影响*

戴 元 本
(中国科学院)

提 要

討論了弱作用对輕子电磁性质的影响. 对于中間玻色子和輕子及电磁場的相互作用应用了 Stueckelberg-Matthews 的矢量場理論,給出了准确到 e, G 的一次方的矩陣元. 得到的輕子反常磁矩的修正項是不发散的,并与中間玻色子的质量无关. 計算中不存在出現于 Зельдович 的工作中的不唯一性.

一、引 言

弱作用对輕子的电磁作用的影响和純粹的电磁作用相比是很小的. 但是由于电子和 μ 介子的电磁作用已有比較精确的計算方法,所以考察一下弱作用的影响是否能产生,可以由实驗检驗的修正仍是有意义的. 对于中微子而言,它和电磁場的作用完全是受弱作用的影响而产生的,由以后的討論可以看到,在中微子和核子散射的問題中,这种作用对跃迁矩陣元的貢献正比于 eG,而純粹的弱作用的貢献正比于 G^2(G 是弱作用耦合常数). 所以在中微子与核子相互作用的問題中,受弱作用影响而产生的电磁作用成为最"強"的作用,对于重原子核而言,它的截面与中微子吸收过程 $\nu + A \rightarrow e + B$ 的截面可以相比,有可能用反应堆的实驗来考察.

在本文中我們只考虑跃迁矩陣元中正比于 eG 的項,正比于 eG^2 的項很难由实驗观察到. 由于在普通的費密作用理論中,唯一可能存在的相当于正比于 eG 的項的費曼图形,是图2中的图形,所以我們将主要地討論弱作用由中間玻色子传递的情形. 在中間玻色子理論中,为了要禁戒沒有观察到的 $\mu \rightarrow e + \gamma$ 过程,必须假設存在两种不同的中微子 ν_μ 和 ν_e[1]. 在这个假設下,中間玻色子理論不与現有实驗矛盾.

在第2节中,将 Stueckelberg-Matthews 的矢量場理論[2,3]用于輕子、电磁場与中間玻色子的相互作用. 在第3节中,求得弱作用对輕子在电磁場中散射的矩陣元的修正項,得到了带电輕子的反常磁矩的修正值. 在第四节中,討論了所得結果,并和 Зельдович 的工作比較.

二、中間玻色子与輕子及电磁場的相互作用

令 $B_\lambda(x)$ 表中間玻色子的場算符,($\lambda = 1, 2, 3, 4$). 按照 Stueckelberg[2],引入輔助矢量場算符 $V_\lambda(x)$ 及标量場算符 $\phi(x)$,使

* 1961年6月27日收到

$$B_\lambda = V_\lambda + \frac{1}{\kappa}\phi_\lambda, \tag{1}$$

其中 $\phi_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\phi$，$\kappa$ 为中間玻色子的質量，V_λ 和 ϕ 服从对易关系

$$\begin{aligned}&[\phi(x), \phi^*(x')] = i\Delta(x - x'),\\ &[V_\lambda(x), V^*_{\lambda'}(x')] = \delta_{\lambda\lambda'} i\Delta(x - x').\end{aligned} \tag{2}$$

在相互作用表象中，描述中間玻色子和輕子及电磁場相互作用的哈密頓量密度为

$$\begin{aligned}
&H = \sum_{i=1}^{10} H_i,\\
&H_1 = -j_\mu A_\mu, \quad j_\mu \text{ 为电流密度},\\
&H_2 = ieA_\mu[\phi^*\phi_\mu - \phi\phi^*_\mu],\\
&H_3 = e^2\phi^*\phi[A^2_\mu + (n_\mu A_\mu)^2],\\
&H_4 = L_\mu V^*_\mu + L^*_\mu V_\mu, \quad L_\mu = ig\overline{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e,\\
&H_5 = ieA_\mu[V^*_\lambda V_{\lambda\mu} - V_\lambda V^*_{\lambda\mu}], \quad V_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}V_\lambda,\\
&H_6 = e^2V^*_\lambda V_\lambda[A^2_\mu + (n_\mu A_\mu)^2],\\
&H_7 = \frac{i}{\kappa}eA_\mu[L_\mu\phi^* - L^*_\mu\phi],\\
&H_8 = \frac{i}{\kappa}en_\mu A_\mu[n_\lambda L_\lambda\phi^* - n_\lambda L^*_\lambda\phi],\\
&H_9 = \frac{1}{2\kappa^2}[n_\mu L_\mu n_\lambda L^*_\lambda + n_\lambda L^*_\lambda n_\mu L_\mu],\\
&H_{10} = \frac{1}{\kappa}[L_\mu\phi^*_\mu + L^*_\mu\phi_\mu],
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\phi^*_i = -\phi^+_i$，$L^*_i = -L^+_i$（$^+$表厄米共軛）。ψ_e 理解作带电輕子的算符。态矢量服从运动方程

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma} = H\Psi. \tag{4}$$

为了去掉 H_{10} 中含导式的耦合，我們作如下的么正变换[3]：

$$\begin{aligned}&\Psi = \exp(-iS)\Psi',\\ &S = \frac{1}{\kappa}\int(L_\mu\phi^* + L^*_\mu\phi)d\sigma_\mu,\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $d\sigma_1 = dydzdt$，$d\sigma_2 = dzdtdx$，$d\sigma_3 = dtdxdy$，$d\sigma_4 = \frac{1}{i}dxdydz$。

我們有如下的关系式

$$\exp(iS)H_i\exp(-iS) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}[S, H_i]_n, \tag{6}$$

其中 $[S, H_i]_n$ 是 S 和 H_i 的 n 次对易子 $[S, \cdots[S, [S, H_i]]\cdots]$，利用公式(6)、輕子場算符的对易关系及 ϕ 和 V_λ 的对易关系(2)，可以得到 Ψ' 所服从的运动方程式：

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial\sigma} = H'\Psi'. \tag{7}$$

經过一些計算以后得到 H' 准确到 g^2 項的表示式:

$$H' = \sum_{i=1}^{6} H_i + \sum_{j=7}^{11} H'_j,$$

$$H'_7 = -\frac{g^2}{\kappa^2}[\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu - \bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e]\cdot\left[\phi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\phi - \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\phi^*\right],$$

$$H'_8 = -\frac{2g^2 m}{\kappa^2}\bar{\psi}_e\psi_e\phi^*\phi,$$

$$H'_9 = i\frac{2eg^2}{\kappa^2}n_\mu[\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu - \bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e]n_\lambda A_\lambda\phi^*\phi,$$

$$H'_{10} = \frac{2g^2}{\kappa^2}[\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu - \bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e](\phi V^*_\mu - \phi^* V_\mu),$$

$$H'_{11} = ig\frac{m}{\kappa}[\bar{\psi}_\nu(1-\gamma_5)\psi_e\phi^* - \bar{\psi}_e(1+\gamma_5)\psi_\nu\phi], \tag{8}$$

其中 m 为带电輕子的質量、态矢量还应滿足附加条件:

$$(V_{\lambda\lambda} + \kappa\phi)\Psi' = 0, \tag{9}$$

这个条件我們用不到.

三、弱作用对輕子在电磁場中散射的矩陣元的修正

由于 $\bar{u}_{p'}(1-\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_\nu(1+\gamma_5)u_p = 0$, $\bar{u}_{p'}(1-\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\eta\cdot(1+\gamma_5)u_p = 0$. 在二分量中微子理論中, 利用狄拉克方程 $i\gamma p u_p = 0$, $\bar{u}_{p'} i\gamma p' = 0$, 准确到微扰論的任意阶, 恆可以将中微子在电磁場中散射的矩陣元化为如下的形式:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \delta^4(p' - p - q)M,$$
$$M = F(q^2)\bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5)u_p, \tag{10}$$

其中 $q = p' - p$. 由于中微子不带电, 当 $q^2 \to 0$ 时 $F(q^2) \to 0$. 再利用方程 $\Box A_\mu = -j_\mu$, 可以将(10)式化为

$$M = -(2\pi)^4 C(q^2)\bar{u}_{p'}\gamma j(q)(1+\gamma_5)u_p, \tag{11}$$

当 $q^2 \to 0$ 时 $C(q^2)$ 趋近于常数. 如果考虑中微子与其他带电費密子的作用, 則在动量轉換小时, (11)式相当于哈密頓量密度中有一項电流–电流耦合形式的接触作用:

$$H = C\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu. \tag{12}$$

由(10)可以看到, 在二分量理論中, 中微子的反常磁矩准确地等于零.

在中間玻色子理論中, 对于中微子在电磁場中的散射需要考虑图 1 中的三个图形. 图 1a 对散射矩陣元的貢献由 $H_4H_1H_4$ 的乘积組成, 图 1b 的貢献由 $H_4H_5H_4$ 組成, 图 1c 的貢献由 H'_7H_2 組成、图 1a、b 的貢献都是对数发散的. 但是由 Ward 公式和对玻色子場的相似公式, 容易証明它們的发散部分互相抵消

$$(M^{(1a)})_{q^2=0} = -(M^{(1b)})_{q^2=0}, \tag{13}$$

計算結果当 $q^2 \ll m^2$ 时为

$$M^{(1a)} + M^{(1b)} = \frac{4\pi^2}{3}\frac{eg^2}{\kappa^2}\ln\frac{\kappa^2}{m^2} q^2 \bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5)u_p, \tag{14}$$

当 $m^2 \ll q^2 \ll \kappa^2$ 时为

$$M^{(1a)} + M^{(1b)} = \frac{4\pi^2}{3}\frac{eg^2}{\kappa^2}\left(\frac{13}{6} - \ln\frac{q^2}{\kappa^2}\right) q^2 \bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5)u_p. \tag{15}$$

图 1c 的矩陣元形式上是二次发散的，如果用通常的 Feynman-Dyson 微扰計算方法，得到的結果并不具有規范不变的形式，其中不但存在于 q 无关的項，q 的二次項也不完全以規范不变的組合 $(q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)a_\nu$ 出現．因为在本問題中 q 的二次項也是我們所关心的，所以我們用 Schwinger 原来用于处理真空极化問題的方法[4]来計算．

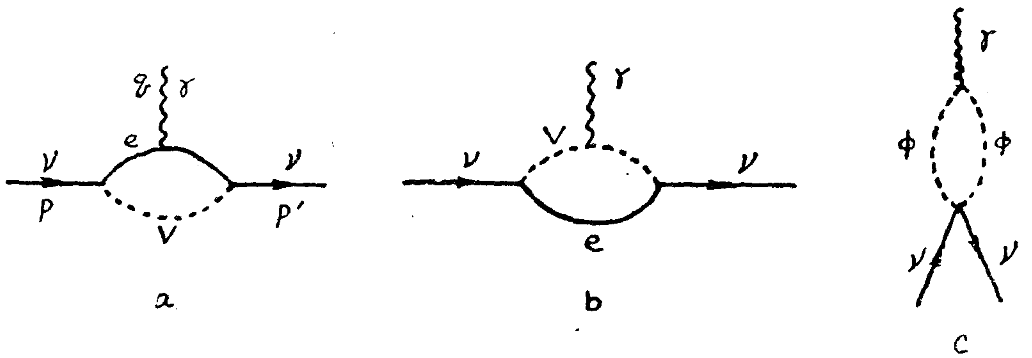

图 1

图 1c 相应于等效哈密頓量密度中存在如下的一項：

$$H^c = -\frac{g^2}{\kappa^2}\bar{\psi}_\nu(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu(x)\left\langle\left|\phi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x)\right)\phi(x) - \phi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x)\right)\phi^*(x)\right|\right\rangle, \tag{16}$$

其中 $\langle|A|\rangle$ 表 A 在外电磁場中的平均值．利用場算符的对易关系(2)，可以得到

$$\left\langle\left|\phi^*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x)\right)\phi(x) - \phi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x)\right)\phi^*(x)\right|\right\rangle$$
$$= i\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - ieA_\mu(x')\right)G(x', x)\Big|_{x'\to x}, \tag{17}$$

其中

$$G(x', x) = -i\langle|T(\phi^*(x')\phi(x))|\rangle \tag{18}$$

为 ϕ 場在电磁場中传播的格林函数，写成矩陣形式，G 可表示为

$$G = -\frac{1}{\Pi^2 + \kappa^2} = -i\int_0^\infty \exp[-i(\Pi^2 + \kappa^2)s]ds, \tag{19}$$

其中 $\Pi = p - eA$．由(19)得

$$G(x', x) = -i\int_0^\infty \exp(-i\kappa^2 s)\langle x'|U(s)|x\rangle ds, \tag{20}$$

其中

$$U(s) = e^{-iHs}, \tag{21}$$

$$H = H_0 + H_1,\ H_0 = P^2,\ H_1 = -e(PA + AP). \tag{22}$$

利用下面的微扰公式[4]:

$$U(s) = U_0(s) - is\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv U_0\left(\frac{1-v}{2}s\right) H_1 U_0\left(\frac{1+v}{2}s\right) + \text{高次項}, \tag{23}$$

其中

$$U_0 = e^{-iH_0 s}. \tag{24}$$

由上两式得到

$$\begin{aligned}\langle x'|U(s)|x\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \exp[-ip^2 s + ip(x'-x)] \\ &+ \frac{e}{(2\pi)^4}\int d^4p \int d^4q \exp\left[i\left(p+\frac{q}{2}\right)x' - i\left(p-\frac{q}{2}\right)x\right] \\ &\cdot \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\, dv (is) \exp\left[-i\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 s\frac{1-v}{2}\right] 2p_\nu a_\nu(q) \\ &\cdot \exp\left[-i\left(p-\frac{q}{2}\right)^2 s\frac{1+v}{2}\right],\end{aligned} \tag{25}$$

将(25)代入(20),經过一些計算后得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - 2ieA_\mu(x)\right) G(x', x)\Big|_{x'\to x} = \frac{e}{48\pi^2}\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \exp(-\kappa^2 s)\frac{ds}{s} \\ &\cdot \int d^4q\, e^{-iqx}(q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) a_\nu(q) - \frac{e}{96\pi^2}\int d^4q\, e^{-iqx} \\ &\cdot \int_0^1 v^4 \frac{dv}{\kappa^2 + \frac{1}{4}q^2(1-v^2)} \times q^2(q_\mu q_\nu - q^2\delta_{\mu\nu}) a_\nu(q),\end{aligned} \tag{26}$$

其中 Λ 为切断动量. 上式为規范不变的. 将(26)代入(17)再代入(16), 就可以求出图 1c 的矩陣元 $M^{(1c)}$:

$$\begin{aligned}M^{(1c)} = \frac{\pi^2}{3}\frac{eg^2}{\kappa^2}\bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5) u_p &\left[q^2\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \exp(-\kappa^2 s) s^{-1} ds\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}q^4\int_0^1 \frac{v^4 dv}{\kappa^2 + \frac{1}{4}q^2(1-v^2)}\right].\end{aligned} \tag{27}$$

由(14)、(15)、(27)知有效电流-电流耦合常数为

$$\begin{aligned}C^{(1)} &= -\frac{1}{24\pi^2}\frac{eG}{\sqrt{2}}\left[2\ln\frac{\kappa^2}{m^2} + \frac{1}{2}\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty}\exp(-\kappa^2 s)s^{-1}ds\right],\quad q^2 \ll m^2, \\ C^{(1)} &= -\frac{1}{24\pi^2}\frac{eG}{\sqrt{2}}\left[\frac{13}{3} - 2\ln\frac{q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2}\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty}\exp(-\kappa^2 s)s^{-1}ds\right],\quad m^2 \ll q^2 \ll \kappa^2.\end{aligned} \tag{28}$$

在費密作用的情况下, 中微子在电磁場中散射的矩陣元有相当于图 2 的一項正比于 eG. 它相当于等效哈密頓量密度中有如下的一项:

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\nu(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu(x)\langle|J(x)|\rangle, \tag{29}$$

$$J(x) = \bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e = S_p[G_e(x'-x)(1+\gamma_5)\gamma_\mu]_{x'\to x}, \tag{30}$$

其中

$$G_e(x'-x) = i\langle | T(\psi_e(x)\bar{\psi}_e(x'))|\rangle, \tag{31}$$

为电子在电磁場中传播的格林函数，計算結果：

$$M^{(2)} = \frac{4\pi^2}{3}\frac{eG}{\sqrt{2}}\bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5)u_p\left[q^2\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty}\exp(-m^2s)s^{-1}ds\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}q^4\int_0^1\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{m^2+\frac{1}{4}q^2(1-v^2)}dv\right], \tag{32}$$

在 $q^2 \ll m^2$ 时，上式相当于

$$C^{(2)} = -\frac{1}{12\pi^2}\frac{eG}{\sqrt{2}}\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty}\exp(-m^2s)s^{-1}ds, \tag{33}$$

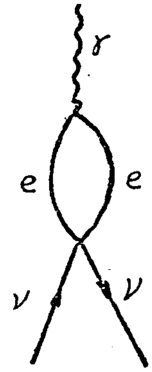

图　2

相似于(32)的公式曾由 Бродский 給出[5].

对于电子在电磁場中散射的弱作用修正，在費密作用的情况下沒有正比于 eG 的矩陣元．在中間玻色子的情况下，有图 3 中的几个图形的矩陣元正比于 eG．由 Ward 公式知图 3a 的矩陣元的发散部分与图 3b 和图 3c 的矩陣元的发散部分互相抵消．图 3d 的矩陣元形式上是二次发散的，我們用計算 $M^{(1c)}$ 的方法来計算它，計算結果得到，当 $q^2 \ll \kappa^2$ 时，

$$M^{(3a)} + M^{(3b)} + M^{(3c)} = \frac{2\pi^2}{9}\frac{eg^2}{\kappa^2}q^2\bar{u}_{p'}\gamma a(1+\gamma_5)u_p$$

$$+\frac{2\pi^2}{3}\frac{eg^2}{\kappa^2}m\bar{u}_{p'}\sigma_{\mu\nu}u_pq_\mu a_\nu, \tag{34}$$

$$M^{(3d)} = -M^{(1c)}. \tag{35}$$

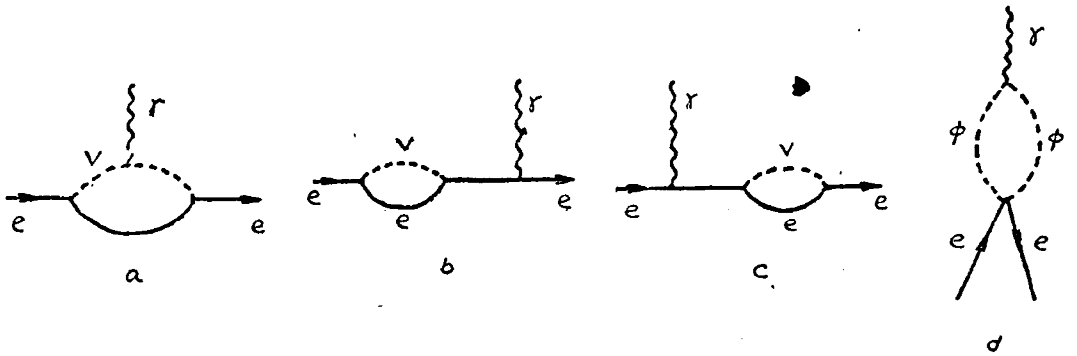

图　3

由(34)(35)得

$$C^{(3)} = -\frac{1}{72\pi^2}\frac{eG}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2}\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty}\exp(-\kappa^2s)s^{-1}ds\right), \tag{36}$$

而弱作用对带电輕子的反常磁矩的修正項为

$$\mu_e = -\frac{Gm^2}{12\sqrt{2}\pi^2}\frac{e}{2m}. \tag{37}$$

这个数值是与中間玻色子的质量无关的. 即使对于 μ 介子而言,(37)式所給出的值也比純粹电磁作用的項 $\frac{\alpha}{2\pi}$ 小 10^{-5} 倍，所以必須大大改进現有的对电磁相互作用的計算和实驗技术,才能将(37)式与实驗比較.

在上面的計算中，我們沒有考虑 ϕ 場对图 1a, b, 3a 的貢献，它們分別由 $H'_{11}H_1H'_{11}$, $H'_{11}H_7H'_{11}$ 和 $H'_{11}H_7H'_{11}$ 組成,数量級分別为場 V_λ 相应的貢献的 $\frac{m^2}{\kappa^2}$ 倍，故可忽略不計，乘积 H'_8H_2 对图 3d 的矩陣元的貢献,由于洛伦兹条件应等于零,也可不考虑.

四、討 論

在本工作部分完成后，作者見到 Зельдович[6] 在同一个問題上的工作. Зельдович 对矩陣元的一般形式也得到和本文相似的結論. 本文与文献[6]的不同,在于对中間玻色子与輕子及电磁場的作用应用了不同的計算方法. Зельдович 指出在文献[6]中，由于对微扰論中間态动量的二次发散积分，q 的一次、二次項的系数包含一个不确定的对数发散項. 本文中的計算沒有这样的不唯一性. 事实上如果忽略 q 的高次項,(27)中 q 的二次項的系数可以不用微扰論而得到. 特别是(37)中反常磁矩表示式是不发散的,和切断无关. 在文献[6]中由于不唯一性的存在,沒有能得到矩陣元的数值,而文献[6]中反常磁矩的表示式是对数发散的.

电流-电流耦合形式的弱-电磁作用的存在，引起中微子-原子核散射及电子-核子散射的宇称不守恆效应,它們的散射截面用C表示的公式,已在文献[6]中給出. 除此以外，弱-电磁作用还引起带电粒子輻射中微子对及电子对的过程,前者的截面較輻射光的截面約小一个因子 $(Gq^2)^2$, q 为外場輸送的动量. 后者出現在例如高能电子在核子場中散射产生一个电子对的所謂"电子三叉"过程中. 由于有和純粹电磁作用的干涉項,它对截面的貢献只比主要項小一个因子 Gq^2, 当 $q^2 \sim M^2$ 时,为 10^{-5} 的数量級，并在"电子三叉"过程中产生纵向极化等宇称不守恆效应. 可惜这些現象都很难用目前的实驗技术观察到.

参 考 文 献

[1] Понтеркоbo Б. М.: 在第九次国际高能物理年会上的发言, Ninth International Annual Conference on High Energy Physics (1960).

[2] Stueckelberg E. C. G. *Helv. Phys. Acta*, **11** (1938), 225.

[3] Matthews P. T., *Phys. Rev.* **76** (1949), 1254.

[4] Schwinger J., *Phys. Rev.* **82** (1951), 664.

[5] Бродский А. М., *Ж. Э. Т. Ф.* **39** (1960), 322.

[6] Зельдович Я. Б., *Ж. Э. Т. Ф.* **39** (1960), 1113.

THE EFFECTS OF THE WEAK INTERACTION ON THE ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF LEPTONS

DAI YUAN-BENG

ABSTRACT

The effects of the weak interaction on the electromagnetic properties of leptons are discussed. The theory of the vector meson developed by Stueckelberg and Matthews and Schwinger's gauge-invariant method are applied to the interactions between leptons, the electromagnetic field and the intermediate boson. The matrix elements accurate to first order in e and G are given. The corrections to the anomalous magnetic moments of the charged leptons obtained in the present work are free from divergence. The ambiguity appearing in zeldovich's work is not present.