大學用書

高等材料力學

ADVANCED STRENGTH OF MATERIALS

ENPICO VOLTERRA and J.H. GAINES

唐山譯

正文書局印行

原著序

在高等材料力學（Advanced Strength of Materials）這個總題目下，我們所討論的主題對於各種工程院系——包括航空工程、土木工程、工程力學和機械工程的高年級學生（senior)和研究所研究生（graduate students），以及從事研究的研究人員和從事實務的工程師，均極重要。本書頭四章的主題包括彈性的數學理論（Mathematical Theory of Elasticity）的高級和研究課程作一般性討論；其餘四章則包括材料力學方面的高級和研究水準（senior-graduate level）。

雖然我們的目的在平衡地提出材料力學方面的高等題目，但一部分特殊的題目亦予強調，例如在第六、七章內亦對曲梁的彎曲以及承在彈性基礎上的曲梁之彎曲，加以討論。所以對這方面予以強調的主要理由，是舊有教材的大部分已不能利用了；而從事這方面而且有貢獻的作家們乃把他們許多年來在各種技術雜誌發表的幾篇論文，集集而成書。由於這些方面大部分工作都能對實際的工程問題提出答案（例如水塔的基礎引起的問題就是），因此相信這一部份對實際從事業務的工程師，具有特殊價值；因此把一些表也包括在書裏。在準備這些數表時，作者特別感謝意大利國家研究委員會（Italian Consiglio Nazionale delle Ricerche）的"Istituto per le Applicagioni del Calcolo"與美國Austin 地方的德州大學計算中心（Computation Center）所提供的資料。並且藉此機會對提供協助的該中心主任Mauro Picone 教授、Aldo Ghizzetti 教授，和D. M. Young 教授，致感謝之忱。

同時對德州大學航空工程系和工程力學教授T.C.Chang 博士，土木工程系N. Al-Rashid博士提供數字演算結果，敬申謝忱。

數學的誘導以基本方式提出而略去必需的嚴密性。在數學知識上并不超過工程院校所需的一般水準。凡討論的題目涉及實驗方面的材料均經慎重考慮後省略，本書主要目的在為學生和工程師提供理論所根據的基礎，俾他們未來在這些方面能作更高深研究。求解問題的基本觀念

，已有很多標準的應用示例，它們是很重要的。

有關歷史的演變在每一章已有扼要說明。各章的前言亦爲讀者提供本章討論上最重要的方面。舉凡引用的參考文獻，亦一一在每章之末附列說明。

本書尚包括所提及的最負盛名或已故的作家，用專欄或在附註中提出。

作者非常感謝提供并准許翻印或複製各種資料的諸君子和各機構。

本書主要特色有：

1. 能量原理、一般處理及其應用。
2. 對於二及三維度（次元）彈性有極具理解性的指導方法，並且舉數字例題說明在土木和機械工程上的實際應用和它們的重要性。
3. 對於呈彈性或呈塑性階段的直梁彎曲理論，有完整討論。
4. 對有軸圓曲梁撓度作廣乏處理。
5. 對承在彈性基礎上的梁，作充分討論，而且兼及有限及無限長直梁和圓梁的處理。
6. 對板的彎曲作廣泛討論并包括許多實際應用示例。

非常感謝倫敦土木工程師協會准許複製他們對金屬梁超過彈性極限的彎曲所作試驗後調製的圖。這些實驗是Enrico Volterra 氏（第一作者）於三十年前在劍橋大學工程實驗所遵照已故Charles Inglis 爵士建議而執行。這些早期實驗結果首次在英國土木工程師協會的雜誌上發表。

在準備手稿期間至友與同事助力甚多，尤其是哈佛大學 Bernard Budiansky 教授和Lloyd H. Donnell 博士的建議更具價值，一併申謝。此外，F.T. Schmaus 先生在研究編排參考文獻方面，熱心協助，特致由衷謝忱。

最後謹對協助本書出版之各機構一併申致感謝之忱。

美國德州大學

Enrico Volterra
J. H. Gaines

譯者贅言

「高等材料力學」一類圖書，坊間一向很少，而大學或研究所的航空、機械、工程力學及土木等系開有這門課程。因此，譯者在譯完材料力學·結構學、鋼結構設計、基本結構理論等一系列有關力學方面的圖書之後即選擇這本書爲翻譯對象。

本書第一作者E. Volterra 氏爲德州大學工程力學教授，三十年前便在英國由Charles Inglis 爵士建議下在劍橋大学從事金屬梁超過彈性極限後的彎曲現象之實驗。學識與經驗均受景仰。至於本書特色甚多，讀者可從作者原序獲知其梗概。

正文書局發行人黃開禮先生特別重視科技圖書之出版，繼鍾氏「結構學」一書之後爲譯者再出版此書，謹致謝忱。并祈海內外先進指正，幸甚。

唐　山

符號目録

羅馬字母符號

a	長度，常數
a_n	$\cos n\pi x/l$ 的 Fourier' 係數
A	面積，梁斷面積常數
b	長度，梁腹寬
b_n	$\sin n\pi x/l$ 的 Fourier 係數
B	梁寬，常數
c	曲率，常数
$c_{elastic}$	彈性曲率
$c_{plastic}$	塑性曲率
c_{total}	$c_{elastic}+c_{plastic}$
C	補充能，常數
C_i	常數
d	直徑，常數
$D=\frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$	直徑板的抗撓剛度
e	體積膨脹
E	楊氏模數，常數
E_c	混凝土楊氏模數
E_s	鋼的楊氏模數
F	一般力
G	重心
$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$	剛性模數
h	高梁腹高，板厚
H	梁高
I_x, I_y, I_z	對 x，y，z 軸慣性矩
I	梁斷面對立軸慣性矩
J	面積慣性極矩

k	改正因數，基礎模數
$k=\lambda+\frac{2G}{3}$	流體壓縮性
l	長度
l, m, n	正餘弦
M	彎曲力矩
M_A	力偶
$M_{elastic}$	最大彈性彎曲力矩
$M_{plastic}$	最大塑性彎曲力矩
M_T	扭矩
n	一整數
N	正交力
p	傾向分佈力
p_0	均布載重
P	集中力
Q	面積矩對主軸第一
r	圓的半徑，迴轉半徑
r_2 r_1	中空圓盤的 $\begin{cases}\text{外半徑}\\ \text{內半徑}\end{cases}$
R	曲率半徑
R	線性硬化材料的第二比例模數
R_x, R_y, R_z	在 x，y，z 方向的反力
s	桿中均勻應力強度
u, v, w	彈性位移在 x，y，z 方向上的分力
t	殼、圓筒的厚度
T	溫度
U	應變能
V	橫向剪力，體積
w	重量
$w=\frac{W_{plastic}}{W_{elastic}}$	梁斷面的塑性係數
W	單位體積應變能，重量
$W_{elastic}$	彈性斷面模數
$W_{plastic}$	塑性斷面模數
x, y, z	笛卡爾坐標
X, Y, Z	在 x、y，z 方向的物體力
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	在 x，y，z 方向的表面力

希臘字母符號

α	溫度線膨脹係數，一般角
α_{ij}	影響系數
β	一般角
γ	一般角
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	笛卡爾坐標剪應變
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$	圓柱坐標剪應變

高等材料力學

目 錄

第三章 二維度彈性…………………………………………… 97

第四章 三維度彈性的基本問題……………196

第五章 直梁的彎曲……………244

第一章　應力與應變

1-0 前言

本書第一章所討論者爲彈性理論(theory of elasticity) 的基本事項。在分析時採用下列各項假定：

1. 變形(deformations) 假設爲無限小
2. 物體係假設爲彈性
3. 物體設爲均質(homogeneous，即在每一點上之性質相同) 及各向同性（等方向性 isotropic，即任何方向上之性質相同)

在第(2)及(3)假定下，物體的彈性特性可以僅用兩個常數規定出來，此等常數用大字母E及希臘字母ν表示，前者表示**楊氏模數**（楊氏係數 Young's modulus)，後者稱爲**波遜比**(Poisson's ratio)，圖1-0-1 表示截面不變（固定截面）之桿條的抗拉試驗圖(拉力試驗圖 tensile test diagram)。此圖證明桿內發展的**拉應力**（抗拉應力 tensile stress) σ_x 及其單位伸長度 (elongation) ϵ_x 的關係。此圖和**延性材料**(ductile materials) 如低碳鋼的圖相似。此圖的最初部份OA爲直線；因此，應力正比於單位伸長度，即

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{1.0.1}$$

图1-0-1中之点A相當於應力σ_p，稱爲**比例極限**(proportional limit)，为抗拉试验图直線部分終點，該處，方程式（1-0-1）成立。如應力在比例极限以下则桿之縱向伸長度ϵ_x發生之時有相等的**側向收縮**(*lateral contractions*) ϵ_y 及 ϵ_z 伴隨，與伸長度成比例。即

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \tag{1.0.2}$$

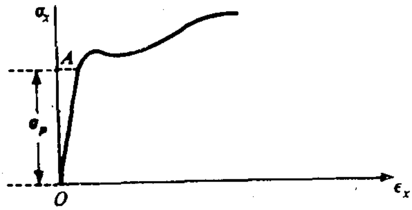


圖 1.0.1

比例因數(factor of proportionality)ν代表每種材料之常數，稱爲**波遜比**。波遜比之倒數$m=1/\nu$，稱爲**波遜數**(Poisson's number)。虎克定律就是由方程式(1-0-1)及(1-0-2)構成。

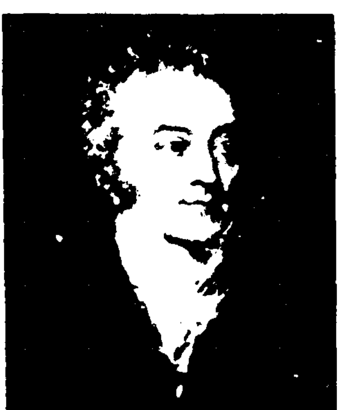
供變形研究的彈性物體，一般稱它爲**笛卡爾正交座標系**(system of orthogonal cartesiar coordinates) $Oxyz$。作用在物體上的力經區別有：

1. 外力 (external forces)
2. 內力 (internal forces)

外力爲：

(a) **表面力**(Surface forces)此等力分布於物體表面，如大氣壓力，水壓力或一物體作用於另一物體所施之壓力等皆是。它們在參考軸x，y及z上之分力由下列記法代表：X，Y，Z。

(b)**濃體力**(徽體力body forces) 分布在物體體積內之力，如重力，磁力、**慣性力**(inertia forces) 等。它們的分力由下列記法代表：X，Y，Z。



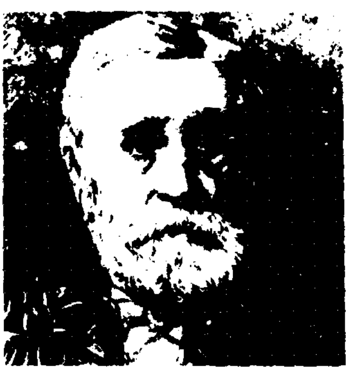
楊氏 (Young, Thomas)英國物理學家、醫生及埃及古物學家(1773 年生於Milverton，索美塞得郡，1829 年逝世於倫敦)。楊氏爲倫敦執業醫生，亦爲皇家學院教授，皇家學會國際書記。發現光干涉原理而導出現在所謂楊氏模數。亦爲第一位能釋明埃及象形文字碑名的人。

波遜(Poisson, Simon-Denis)法國數學家，1781 年生於 Pithiviers，1840 年歿於巴黎。爲巴黎大學文理學院(Sorbonne)及Ecole 多元技術學院分析和力學教授。

虎克(Hooke, Robert)英國物理學家(1635 年生於 Isle of Wight 清水鎮，1693 年歿於倫敦)，爲英國皇家學會實驗所所長，1663年被選爲會員及書記。爲Gresham 學院幾何學教授。

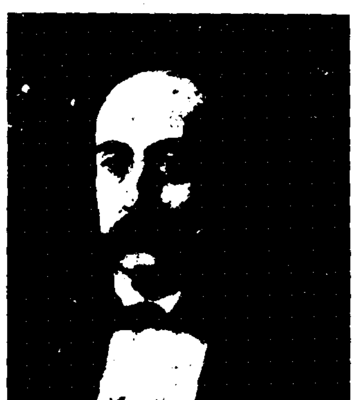
凱齊 (Cauchy, Augustin-Louis) 法國數學家(1789 年生於巴黎，1857 年歿於 Seine 的 Sceaux)，爲Sorbonne(巴黎大學文理學院)、Ecole 多元技術學院、法國大學(College de France)教授。他的基本成就在分析學、力學、彈性的數學理論、光學等，他曾編著二十九本書由法國科學院出版。

拉米(Lam'e Gabriel) 法國數學家(1795 年生於Tors，1870 年歿於巴黎) 爲Ecole多元技術學院物理學教授，亦爲巴黎文理學院教授，講授機率論。他的大著：「Leçons sur la Th'eorie Math'ematique de l'Elaticite des Corps Solides」爲彈性的數學理論第一本書，於1852 年出版。



沙文納(Saint-Venant，Adhemar-Jean-Claude，Barr'e de)法國土木工程師及數學家(1797 年生於Filliers-en-Brie，Seine et Marne，1886年歿於Saint-Ouen，Loire)，爲Versailles 的Agronomique學院教授及土木工程師。他研究動水力學，但最重要的貢獻在彈性的數學理論。有兩本著作：「Sur la Torsion des Prismes」及「Memoire sur la Flexion des Prismes」分別於1855 及1856 年出版。

貝特拉米(Beltrami，Eugenio) 意大利數學家(1835 年生於Cremona，1900 年歿於羅馬)，爲Pisa、Bologna、Pavia及羅馬大學出色的力學及數學物理學教授。重要貢獻在幾何學、流體動力學、勢能理論、電學及磁學，與熱轉移等，完成著作有四種，分別在 1902～1920 年間出版。



麥克尔(Michell,John-Henry) 英裔澳洲數學家(1863 年生於Maldon,Victoria,1943 年卒於Melbourne) Melbourne大學畢業後,麥氏在劍橋大學研究,1890年成爲Trinity(三一)學院會員。返回澳洲後爲母校數學教授。1964 年與其弟 Authony-George-Maldon(著名數學家及水力工程師,1870～1959) 分別發表的論文合成一書公諸於世。

杜瀚米(Duhamel Jean-Marie-Constant) 法國數學家(1797年生於 Saint-Malo,1872 年卒於巴黎) 爲Ecole多元技術學院分析學及數學教授,亦曾任教巴黎大學。

紐曼(Neumann,Franz-Ernst) 德國礦物學家及數學家(1798 年生於 Joachimstal,1895 年卒於Konigsberg),爲Konigsberg 大學礦物學及數學教授。

內力或反力用大寫字母R代表,其分力用R_x、R_y及R_z 代表。

本章,先定義應力。然後定義應變,再及**彈性位移**(elastic displacement) 分力與應變分力間之關係。這些關係曾由法國數學家及機械論者A.L.Cauchy 推得,應力與應變之關係然後用一般形式(廣義虎克定律) 導出。其次討論平衡問題,Navier 氏方程式與Lames 方程式。和諧問題用Saint-Venant、Beltrami 及Miehell等人所採取方式推論。然後討論**边界條件**(boundary conditions)。接着爲**熱應力**(thermal stress)條件,分別由Duhamel 及Neumann 單獨導出,并且使用由Saint-Venant 提出的最簡單形式討論Saint-Venant 原理。

本章在討論彈性三個基本問題後結束,本書,除了有不同的規定之外,彈性物體假設爲簡單的連體。

1-1 應力

茲討論圖1-1-1所示物體，該物體在外力系P_1、P_2、……P_n 作用下呈平衡。現設該物體爲一平面切割而分成1與2兩部分。爲保持這兩個單獨部分亦呈平衡，應分別對部分1及2作用以力$+R$及$-R'$此兩力爲作用在平面截面A上內力之合力。現在討論如圖1-1-2所示此截面之面積的元素ΔA。內力合力之強度ΔR作用在ΔA上時可分成兩分力，一爲垂直於ΔA方向作用的ΔR_n，另一爲在ΔA平面上作用的ΔR_t。設點P位在ΔA中心。點P上應力之垂直（正交）分力定義爲

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta A} \tag{1.1.1}$$

而該點上應力之剪分力定義爲

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R_t}{\Delta A} \tag{1.1.2}$$

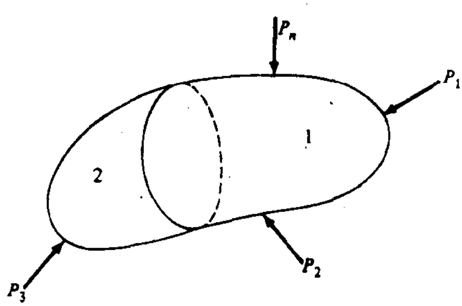


圖 1.1.1

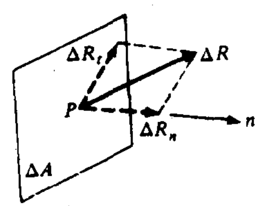


圖 1.1.2

垂直（正交）應力(Normal stress) 常用希臘字母σ表示，剪應力用希臘字母τ表示。如爲拉力，正交應力常視爲正，如爲壓力則視爲負，應力具有的力/長度^2 的維度（大小），有**張量**（拉量 tensor）的特性，由其大小、方向及位置定義。

茲討論邊長dx、dy及dz 的小立方體$OABCDEFG$（圖1-1-3）。向外垂直於面$ABEF$ 者被視爲正，同時面$BCDE$及$DEFG$ 亦被視爲正，因向外垂直於這些面者分別指向y及z軸的正方向。其他三面被視爲負。在面$ABEF$上作用一正交應力σ_x（字母σ表示它是正交應力，下標字x表示此正交應力係作用在垂直於x軸的立體一面上)，剪應力τ_{xy}及τ_{xz}（字母τ表示應力爲剪應力，多一個下標字表示應力係作用在垂直於x軸的立體一面上，而第二個下標字（y或z）表示剪應力