

空间机构运动误差的概率分析 和蒙特卡罗模拟

徐卫良 张启先

(北京航空学院)

摘 要

通过引进“间隙特征要素”和“间隙空间”的概念,建立了常见运动副的随机模型,并导出了表征间隙特征要素的独立参数的联合概率密度函数。在考虑运动副间隙对所连两构件相对位姿的影响下,进行了机构运动误差的概率分析。给出间隙特征要素的独立变量的抽样公式后,利用蒙特卡罗技术完成了机构误差的随机抽样计算。

关键词: 空间机构误差、概率分析、间隙运动副、蒙特卡罗模拟

一、引 言

关于公差和间隙引起的机构运动误差,已进行了许多研究,但大多局限于误差建模及确定性分析方面。由于连杆参数误差及运动副间隙的随机性,误差的概率分析又引起不少学者的兴趣。文^[1~5]通过对公差的抽样分析了平面机构输出误差的分布规律和统计特征。文^[6,7]探讨了具有间隙的运动副的随机模型,并进行了随机性分析。但两文都没有考虑间隙对运动副的两相邻构件的相对位姿(位置和姿态)的整体影响。为此,本文对如下两个方面进行了研究:误差概率分析和蒙特卡罗模拟。首先,通过引进“间隙特征要素”和“间隙空间”的概念,建立了常见运动副的随机模型,分析并获得了表征间隙特征要素的独立参数的联合密度函数。进而推得由间隙引起的两相邻构件的相对位姿偏差的均值和方差,完成了机构合成误差的概率分析。接着,给出了间隙特征要素的独立变量的抽样公式,然后利用蒙特卡罗技术完成机构误差的统计抽样计算。最后,以空间RCSR机构为例,进行了数值计算。

二、运动副的随机模型及其分析

为便于分析讨论,首先引进“间隙特征要素”和“间隙空间”两概念。间隙特征要素为能表征具有间隙的运动副的两相邻构件的相对位姿的那种几何要素。“间隙空间”为在运动副

几何条件的限制下, 间隙特征要素的可动范围。间隙特征要素可用一组由间隙空间限制变化的独立参数来描述。因此, 间隙运动副的随机性问题就是间隙特征要素在间隙空间里的随机性问题。而后者又可用其独立参数的联合概率密度函数来描述, 这种密度函数取决于许多因素(如运动副传递的力、间隙引起的冲击、润滑性质、不确定的工况及制造精度等), 无论用理论方法还是实验手段都较难直接表达。但根据误差理论, 较为简单合理的假设就是, 在任何瞬时间隙特征要素位于间隙空间内部或界面上的任何位姿的概率相等。

1. 圆柱副

图 1(a) 为具有间隙 $r_c = R - r$ (长度为 l) 的圆柱副。其间隙特征要素是销轴轴线, 而间隙空间则是以运动副的理想轴线为轴线、间隙 r_c 为半径的圆柱体 (图 1(c))。间隙特征线 l_1 由点 $S(x_1, y_1)$ 和点 $I(x_2, y_2)$ 唯一确定, 这样, 表征间隙特征线的独立参数共有四个 x_1, y_1, x_2, y_2 。根据等概率的假设, 点 S 和 I 分别在圆 Σ_1 和 Σ_2 内呈等概率分布。因此它们的密度函数为

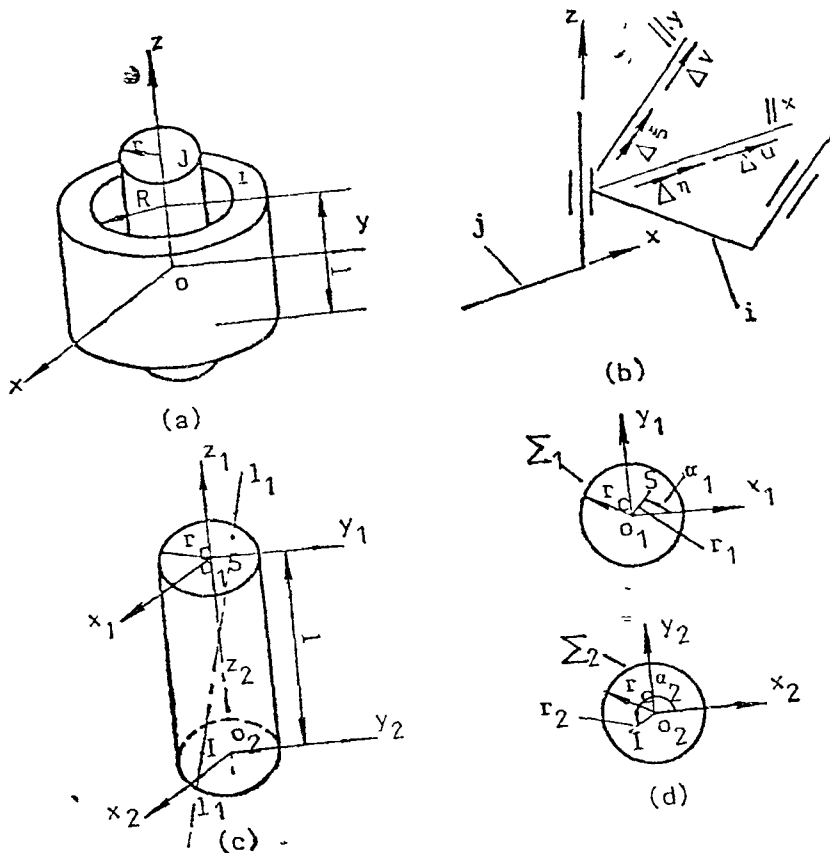


图 1 具有间隙的圆柱副

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = 1/(\pi r_c^2)$$

若用极坐标 (r_1, α_1) 表示点 S , 即

$$x_1 = r_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = r_1 \sin \alpha_1 \quad (0 \leq r_1 \leq r_c, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi)$$

由文〔8〕知, 新变量 (r_1, a_1) 的密度函数为

$$f(r_1, a_1) = f(x_1, y_1) \cdot \partial(x_1, y_1) / \partial(r_1, a_1) = r_1 / (\pi r_c^2) \quad (1)$$

仿上, 同样有

$$f(r_2, a_2) = f(x_2, y_2) \partial(x_2, y_2) / \partial(r_2, a_2) = r_2 / (\pi r_c^2) \quad (2)$$

另外, 按点 S 和 T 的坐标, 可确定销轴相对轴套的位姿偏差为

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x_1 + x_2) / 2 = (r_1 \cos a_1 + r_2 \cos a_2) / 2 \\ \Delta v &= (y_1 + y_2) / 2 = (r_1 \sin a_1 + r_2 \sin a_2) / 2 \\ \Delta \eta &= -(y_1 - y_2) / l = -(r_1 \sin a_1 - r_2 \sin a_2) / l \\ \Delta \xi &= (x_1 - x_2) / l = (r_1 \cos a_1 - r_2 \cos a_2) / l \end{aligned} \quad (3)$$

式中, Δu 和 Δv 为在 x 轴和 y 轴上的位置偏差分量; $\Delta \eta$ 和 $\Delta \xi$ 为在 x 轴 y 轴上的姿态偏差分量 (下同)。

根据概率计算可得, 这些偏差的均值和方差为

$$\begin{aligned} E(\Delta u) &= E(\Delta v) = E(\Delta \eta) E(\Delta \xi) = 0 \\ V(\Delta u) &= V(\Delta v) = r_c^2 / 8, \quad V(\Delta \eta) = V(\Delta \xi) = (r_c / l)^2 / 2 \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $E(\cdot)$ 为均值; $V(\cdot)$ 为方差。

这些偏差之间的相关系数为零, 因此它们是不相关的。这一点对于机构合成运动误差的统计分析, 尤为重要。至于其他运动副, 这个结论仍是正确的。

2. 转动副

与径向间隙相比, 转动副的轴向间隙一般较小且可略去。这样, 组成转动副的两相邻构件不发生相对偏转。所以间隙特征要素应为销轴轴线在端面上的投影点, 而间隙空间则是以径向间隙 r_c 为半径、理想运动副轴线的投影点为圆心的圆 (参考图 1(d))。根据等概率的条件, 可得间隙特征点的密度函数

$$f(r_1, a_1) = r_1 / (\pi r_c^2) \quad (5)$$

间隙引起的两相邻构件的相对位置偏差为

$$\Delta u = r_1 \cos a_1, \quad \Delta v = r_1 \sin a_1 \quad (6)$$

由概率计算可得, 它们的均值和方差为

$$\begin{aligned} E(\Delta u) &= E(\Delta v) = 0 \\ V(\Delta u) &= V(\Delta v) = r_c^2 / 4 \end{aligned} \quad (7)$$

3. 球面副

图 2(a) 为具有间隙 r_c 的球面副。间隙特征要素为球的球心, 间隙空间为以 r_c 为半径, 理想运动副的球心为球心的球体 (图 2(b))。用独立参数 x, y, z 或 α, β, r 来描述特征点。因此

$$\begin{aligned} x &= \Delta u = r \sin \beta \cos \alpha \\ y &= \Delta v = r \sin \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

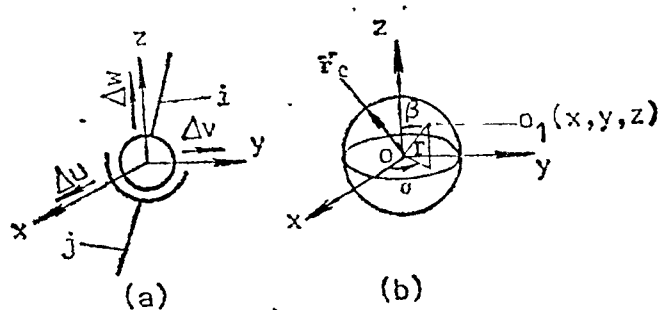


图 2 具有间隙的球面副

$$z = \Delta W = r \cos \beta \tag{8}$$

其中, $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, ΔW 为 z 轴上的位置偏差分量。

根据等概率条件, 可知

$$f(x, y, z) = 3/(4\pi r_0^3) \tag{9}$$

$$\text{或 } f(r, \alpha, \beta) = f(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) / \rho(r, \alpha, \beta) = 3r^2 \sin \beta / (4\pi r_0^3) \tag{10}$$

分析可得, 两相邻构件的相对位置偏差的均值和方差为

$$E(\Delta u) = E(\Delta v) = E(\Delta W) = 0$$

$$V(\Delta u) = V(\Delta v) = V(\Delta W) = r_0^2/5 \tag{11}$$

4. 移动副

图 3(a) 所示为具有两个间隙 $\delta_1 = a - a'$ 和 $\delta_2 = b - b'$ 的移动副 (矩形截面)。暂先不考虑销轴绕其轴线的偏转时, 间隙特征要素是矩形销轴的轴线, 间隙空间是以 δ_1 和 δ_2 为边长的棱柱体 (图 3(c))。间隙特征线 l_i 由点 $S(x_1, y_1)$ 和点 $I(x_2, y_2)$ 唯一确定。由等概率假设知, 点 S 和点 I 分别在矩形 Σ_1 和 Σ_2 内呈均匀分布。它们的密度数为

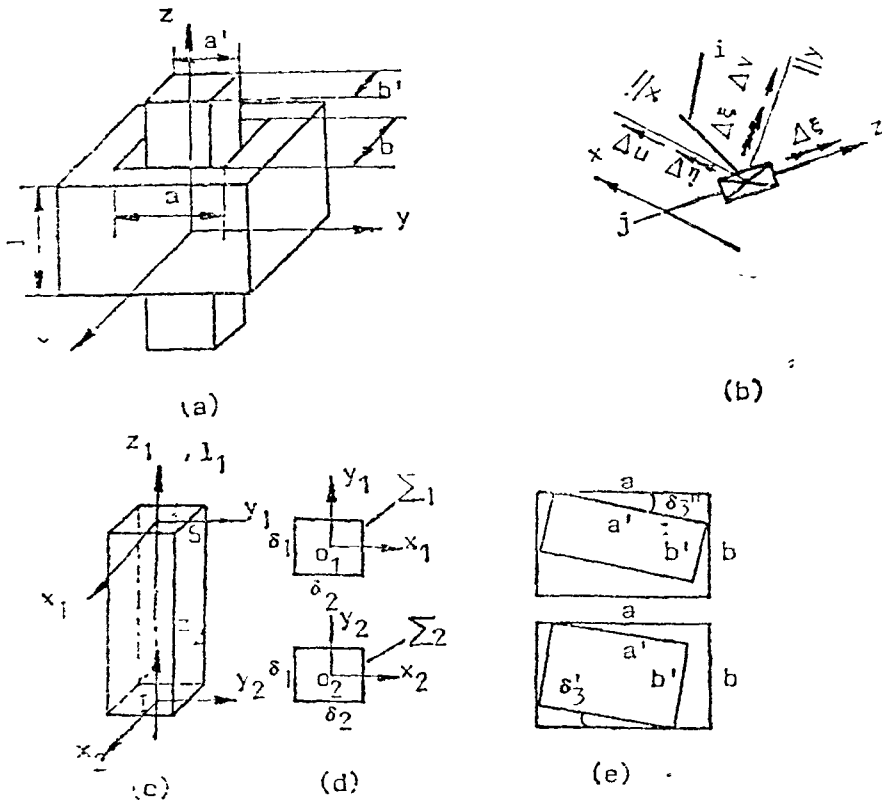


图 3 具有间隙的棱柱副

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = 1/(\delta_1 \delta_2) \tag{12}$$

式中, $-\delta_2/2 \leq z_2 \leq \delta_2/2$, $-\delta_1/2 \leq y_1 \leq \delta_1/2$ 。

当间隙特征线 l_i 处于 SI 位姿时, 两相邻构件的相对位姿偏差为

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x_1 + x_2)/2 & \Delta v &= (y_1 + y_2)/2 \\ \Delta \eta &= -(y_1 - y_2)/l & \Delta \xi &= (x_1 - x_2)/l \end{aligned} \quad (13)$$

事实上, 销轴绕其轴线存在着偏转, 根据等概率的假设, 偏转角 $\Delta \xi$ 在 $(-\delta_3, \delta_3)$ 内均匀分布, 即

$$f(\Delta \xi) = 1/(2\delta_3)$$

式中, $\delta_3 = \text{Min}(\delta_3', \delta_3'')$; $\delta_3' = \delta_2/a'$; $\delta_3'' = \delta_1/b'$

分析可得, 上述偏差的均值和方差为

$$\begin{aligned} E(\Delta u) &= E(\Delta v) = E(\Delta \eta) = E(\Delta \xi) = E(\Delta \zeta) = 0 \\ V(\Delta u) &= \delta_2^2/24, \quad V(\Delta v) = \delta_1^2/24, \quad V(\Delta \eta) = (\delta_1/l)^2/6, \\ V(\Delta \xi) &= (\delta_2/l)^2/6, \quad V(\Delta \zeta) = \delta_3^2/3 \\ f(\Delta \zeta) &= 1/(2\delta_3) \end{aligned}$$

式中, $\delta_3 = \text{Min}(\delta_3', \delta_3'')$, $\delta_3' = \delta_2/a'$, $\delta_3'' = \delta_1/b'$. (14)

因此, 上述偏差的均值和方差为

$$\begin{aligned} E(\Delta u) &= E(\Delta v) = E(\Delta \eta) = E(\Delta \xi) = E(\Delta \zeta) = 0 \\ V(\Delta u) &= \delta_2^2/24, \quad V(\Delta v) = \delta_1^2/24, \quad V(\Delta \eta) = (\delta_1/l)^2/6 \\ V(\Delta \xi) &= (\delta_2/l)^2/6, \quad V(\Delta \zeta) = \delta_3^2/3 \end{aligned} \quad (15)$$

三、机构运动误差的随机模型及统计特征

在一般假定输入角 θ , 无误差的情况下, 空间机构运动误差的近似计算公式为

$$\Delta \Phi \doteq \sum_{i=1}^n (\partial \Phi / \partial q_i) \Delta q_i + \sum_{j=1}^m (\partial \Phi / \partial C_j) \Delta C_j \quad (16)$$

式中, Δq_i 为连杆参数误差; ΔC_j 为间隙引起的两相邻构件的相对位置或姿态误差; n 和 m 分别为 Δq_i 和 ΔC_j 的个数。

至于如何建立式 (16), 有许多方法, 作者建议采用文^[9]中叙述的微小位移合成法, 该法能较简便地建立由连杆参数误差和间隙引起的运动误差方程。

由于所有原始误差是不相关的, 故输出误差的均值和方差为

$$\begin{aligned} E(\Delta \Phi) &= \sum_{i=1}^n (\partial \Phi / \partial q_i) E(\Delta q_i) + \sum_{j=1}^m (\partial \Phi / \partial C_j) E(\Delta C_j) \\ V(\Delta \Phi) &= \sum_{i=1}^n (\partial \Phi / \partial q_i)^2 V(\Delta q_i) + \sum_{j=1}^m (\partial \Phi / \partial C_j)^2 V(\Delta C_j) \end{aligned} \quad (17)$$

根据机械制造工艺, Δq_i 通常在其公差带 $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ 内呈正态分布, 即

$$E(\Delta q_i) = 0, \quad V(\Delta q_i) = (\varepsilon_i/3)^2 \quad (18)$$

另外, 由于 $E(\Delta C_j) = 0$, 故机构输出运动误差的均值 $E(\Delta \Phi) = 0$ 。

四、机构运动误差的蒙特卡罗模拟

误差的蒙特卡罗模拟,就是在计算机对具有不同分布的原始误差的随机量(如连杆参数偏差和描述间隙特征要素的独立参数)进行抽样,按机构运动误差模型算出大量的抽样数据,并借助统计分析来研究机构运动误差的分布规律和统计特征的一种方法。

根据概率统计理论中的舍选法^[8, 10],具有密度函数 $f(x)$ 的随机变量 $x \in (l, u)$ 的抽样公式为

$$x = (u - l)\eta_1 + l \quad \text{若 } \eta_2 \leq f(x)/f_0 \quad (19)$$

其中, η_1 和 η_2 为 $(0, 1)$ 上的随机数, f_0 为 $f(x)$ 的最大值。

至于随机向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,若它的各个分量是独立的,则可用上式来抽样这些分量。若不独立,则可用条件密度法^[10]。下面以三维随机向量为例,说明此法。

设随机向量 $X = (x, y, z)^T$ 的联合密度函数为 $f(x, y, z)$,则随机变量 x, y, z 分别具有如下边缘密度函数和条件密度函数

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dy dz$$

$$f_2(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) / f_1(x) dz$$

$$f_3(z|x, y) = f(x, y, z) / [f_2(y|x) \cdot f_1(x)]$$

随机向量 X 的抽样过程,是通过一串随机变量的抽样来实现的。按式(19)由边缘密度 $f_1(x)$ 产生随机变量 x 的抽样值 x_i ;以 x_i 为 x 的已知值,由 $f_2(y|x)$ 产生随机变量 y 的抽样值 y_i ;以 x_i 和 y_i 为 x 和 y 的已知值,由 $f_3(z|x, y)$ 产生随机变量的抽样值 z_i 。这样, $(x_i, y_i, z_i)^T$ 即为向量 X 的抽样值。

根据前述的随机变量和向量的抽样方法,就可得各运动副的间隙特征要素的独立参数的抽样公式

对于圆柱副和转动副

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\pi\eta_1 \\ r_1 &= r_0\eta_2 \quad \text{若 } \eta_3 \leq \eta_2 \\ \alpha_2 &= 2\pi\eta_4 \\ r_2 &= r_0\eta_5 \quad \text{若 } \eta_6 \leq \eta_5 \end{aligned}$$

对于球面副

$$\begin{aligned} u &= 2\pi\eta_1 \\ \beta &= \pi\eta_2 \quad \text{若 } \eta_3 \leq \sin(\pi\eta_2) \\ r &= r_0\eta_4 \quad \text{若 } \eta_5 \leq \eta_4^2 \end{aligned}$$

对于移动副

$$\begin{aligned} x_1 &= -\delta_2/2 + \delta_2\eta_1, & y_1 &= -\delta_1/2 + \delta_1\eta_2 \\ x_2 &= -\delta_2/2 + \delta_2\eta_3, & y_2 &= -\delta_1/2 + \delta_1\eta_4 \\ \Delta \xi &= -\delta_3 + 2\delta_3\eta_5 \end{aligned}$$

其中, $\eta_1 \sim \eta_6$ 为 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数。

至于连杆参数误差的抽样, 见文^[5]。

五、数值例题

图 4 所示的空间 RCSR 机构具有如下机构参数

$$h_1 = 24.5 \pm 0.245, h_2 = 39.5 \pm 0.395, h_3 = 3.9 \pm 0.039, h_4 = 39.5 \pm 0.395$$

$$s_3 = s_4 = 0 \pm 0.05(\text{cm}), a_3 = 0 \pm 0.1^\circ, a_4 = \pi/2 \pm 0.1^\circ.$$

各运动副的径向间隙 $r_c = 0.05\text{cm}$, 其中圆柱副的轴套长度 $l = 4\text{cm}$ 。该机构的输入参数为 θ_4 , 输出参数为 θ_1 。

按微小位移合成法^[9], 可得输出误差 $\Delta\theta_1$ 。然后利用前述的蒙特卡罗法, 对输出误差进行统计模拟, 得到其经验频数直方图、数字统计特征及机构整个工作循环的输出误差的变化范围。其结果如图 5 至图 7 所示。其中样本大小 $n = 300$, 经验频数直方图的分格数 $K = 20$ 。

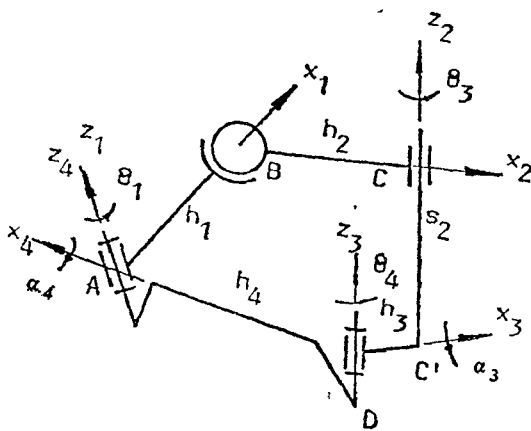


图 4 空间 RCSR 机构 (D-H 标记)

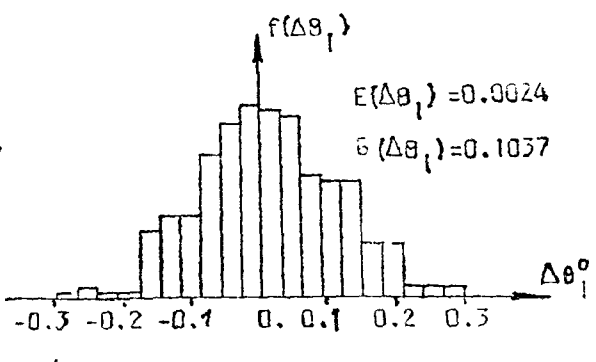


图 5 所有间隙引起的输出误差的直方图 ($\theta_4 = 10^\circ$)

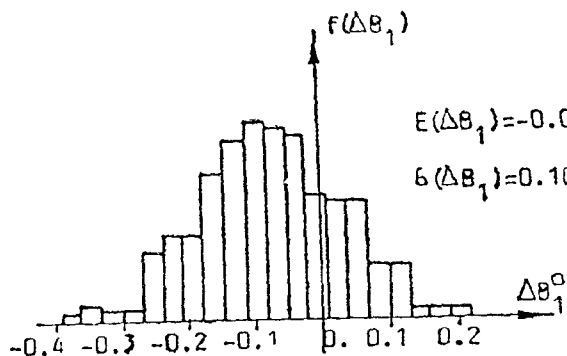


图 6 连杆参数偏差取正极限值时所有间隙引起的输出误差的直方图 ($\theta_4 = 40^\circ$)

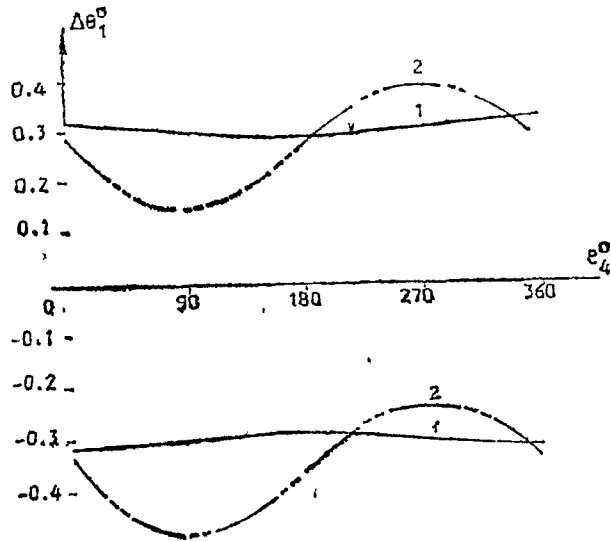


图7 曲线1、2分别为图5、图6中的原始误差引起的输出误差的 3σ 范围

六、结 论

本文建立了更为精确的间隙运动副的随机模型，以此能分析间隙对运动误差的整体影响。

蒙特卡罗技术是误差分析综合中一种很有用的CAD工具。利用它能够先于加工装配，分析了解未来机构误差的概率特征。

参 考 文 献

- [1] R. E. Grati, A. J. Hall, Effects of tolerance and clearance in linkage design, Trans ASME, J. ENG. IND. 91, 1 (1969), 198-202
- [2] L. F. Knappe, Mechanism tolerances, Machine Design, 4 (1963), 155-157.
- [3] S. G. Dhande, J. Chakraborty, Analysis and synthesis of mechanical error in linkages—a stochastic approach, Trans. ASME, J. Eng. Ind., 95, 3 (1973), 672-676.
- [4] J. Chakraborty, Synthesis of mechanical error in linkages, Mech. Mach. Theory 10 (1977), 155-165.
- [5] 徐卫良, 连杆机构运动误差分析的统计模拟法, 江苏机械, 1 (1986), 7-11
- [6] S. G. Dhande, J. Chakraborty, Mechanical error analysis of spatial linkages, Trans. ASME. J. Mech. Design, 100, 10 (1978), 732-738.
- [7] 仇时雨, 金芝英, 张启先, 空间六杆机构的误差分析及考虑公差和间隙的多目标优化综合, 北京航空学院学报, 2 (1983), 113-130
- [8] J. N. Siddal, Probabilistic Engineering Design, Marcel Dekker, Inc. New York, (1983), 528.

(下转第89页)