第 16 卷 第 3 期
1994 年 8 月 (304—309)

地 震 学 报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA

Vol. 16, No. 3
Aug., 1994

由动态裂纹退化得到的静态裂纹解*

李世愚　　陈运泰

(中国北京 100081 国家地震局地球物理研究所)

摘　要

用一个二维裂纹沿自身所在的平面扩展，作为断层的模型. 在 Kostrov(1975)的经典模型(线弹性断裂力学模型)的通解的基础上，采用动态解退化的方法，得到了三种类型的二维裂纹的静态解. 本文采用的退化方法有两个便利之处：① 对于三种类型裂纹的解，可以用统一的方法求出；② 避免了采用物理意义不明显的位移势和应力函数. 本文所得到的结果与以往作者采用对平衡方程积分变换得到的结果完全一致. 本文说明：① 静态解和动态解不可分割，因为静态解同样具有持续时间的含义；② 临界裂纹的静态解与动态解需要满足同一组判定条件，它的转化必须以某种形式的附加扰动为前提. 因此，在计算临界裂纹的起始破裂问题时，必须给出一定形式的扰动量.

关键词　地震破裂动力学；断裂力学；静态解；退化方法

引　言

在地震破裂动力学里，断层破裂的起始有三种模拟方式：① 假定断层是突然出现的(Костров，1966；Aki and Richards，1980)，然后开始扩展；②断层从一个起始点开始扩展(Chen *et al*.，1987)；③ 断层从一个准静态的临界长度开始动态扩展(Andrews，1976；陈运泰和王璋，1989). 三种方式各有其物理意义. 显然，断层破裂起始模拟方式的选择，取决于应力降发生的区域的大小和准静态扩展时间的长短.

本文考虑的是第三种方式. 我们假设断层在我们所考虑的时刻 t_i 以前相当长时间已经形成，即假设这个断层形成后一直处于准静态扩展之中. 所谓准静态指的是变化非常缓慢，以至在波动方程中的惯性项可以忽略. 我们称这个断层为初始断层. 我们还假定从 $t=-\infty$ 到 t_i 时刻，地球介质中的构造应力场没有发生显著变化. 根据这种设想，静态裂纹的解可以是扩展速度为无限小的动态裂纹持续无限长时间后扰动作用的结果. 换句话说，静态问题是动态问题的一种特殊情形，静态裂纹的解是动态裂纹解的退化，它也应该是临界裂纹的静态解.

Kostrov 已经给出了二维裂纹问题的动态基本解(Костров，1966；Kostrov，1975). 他

* 地震科学联合基金会资助项目. 国家地震局地球物理研究所论著 94A0007.
1993 年 5 月 25 日收到初稿，1993 年 11 月 29 日决定采用.

采用的是经典模型(线弹性断裂力学模型)，假定裂纹是在 $t=0$ 的时刻突然出现的. 必须指出，Kostrov(1975)讨论的是Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 三种类型裂纹分别单独存在的情形，否则其边界条件将相互牵制. 本文仍然只考虑单独的裂纹类型，而不是混合型.

1 基本公式

我们仍然用一个二维裂纹沿自身所在的平面扩展作为断层的模型. 令二维裂纹位于 $x_1=0$ 的平面上，$l_-(t)<x_2<l_+(t)$，$-\infty<x_3<+\infty$. 其中，x_1，x_2，x_3 为直角坐标系，x_1 轴与裂纹所在的平面垂直，x_3 与裂纹前缘平行.

假定破裂发生在均匀、各向同性的完全弹性介质中，所有的物理量不随 x_3 变化，并设本问题为平面应变问题. 我们可以把解看成两个部分的叠加，一部分是不含裂纹的初始解，另一部分是含有裂纹的扰动解. 若在 $t=-\infty$时刻的预应力为 $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2; -\infty)$，预位移为 u_i^0，裂纹出现后重新分布的应力(扰动解)为 $\sigma_{ij}(x_1, x_2; t)$，位移为 u_i，则总应力为

$$\sigma_{ij}^*(x_1, x_2; t) = \sigma_{ij}(x_1, x_2; t) + \sigma_{ij}^0(x_1, x_2; t) \tag{1}$$

位移也应满足 $u_i^*=u_i+u_i^0$. 体力的作用可以归入初始解. 取齐次初始条件，即在 $t=-\infty$ 时刻，扰动解

$$u_i(x_1, x_2; t) = 0 \qquad t = -\infty \tag{2}$$

边界条件分别为

$$\sigma_i(x_2, t) \equiv \sigma_{i1}(0^+, x_2; t) = \sigma_{i1}(0^-, x_2; t) = -p_i(x_2, t)$$
$$i = 1, 2, 3 \qquad x_1 = 0 \qquad l_-(t) < x_2 < l_+(t) \tag{3}$$

其中，$p_i(x_2, t)$为已破裂部分上的载荷. 在未破裂部分，错动量为零，这时附加的边界条件

$$W_i(0, x_2; t) = 0 \qquad x_2 < l_-(t) \text{ 或 } x_2 > l_+(t) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

裂纹端部的应力强度因子定义为

$$\sigma_i = \frac{K_i(t)}{(2|x_2 - l_\pm(t)|)^{1/2}} + O(1) \qquad x_2 \to l_\pm(t) \pm 0 \tag{5}$$

以下我们记 $x=x_2$，$\sigma_i(x, t)=\sigma_{1i}(x, t)$，$\alpha$，$\beta$ 为弹性波速，$\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$，$\beta=\sqrt{\mu/\rho}$. 其中，$\rho$ 为介质密度，λ 为拉梅常数，μ 为剪切模量. 本文依据对初始条件的假定修改 Kostrov(1975)的基本公式，修改后的基本公式为

① 边界积分方程：记 G_i 为广义错动，$\nu_1=\nu_3=\beta$，$\nu_2=\alpha$. 在积分域 Δ_i 内：$\nu_i(t_0-t)^2-(x_0-x)^2\geqslant 0$，$-\infty\leqslant t_0\leqslant t$，$i=1, 2, 3$，有

$$\frac{-1}{\nu_i}G_i(x, t) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_i}\frac{F_i(x_0, t_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}t_0}{\left[\nu_i^2(t_0-t)^2-(x_0-x)^2\right]^{1/2}} \tag{6}$$

其中，F_i为广义应力，它与真实应力分量的关系由一个含微分和积分的算子 $F_i(x, t)=L_b(\sigma_i)$给出(详细可参阅 Kostrov，1975). 为了便于积分，引进特征坐标系

$$\xi = (\nu_i t - x)/\sqrt{2} \qquad \eta = (\nu_i t + x)/\sqrt{2}$$

不难证明，在特征坐标系内，边界积分方程(6)中对积分有贡献的积分域是一个条带

(Aki and Richards, 1980)

$$G_i(\xi,\eta)=\frac{-1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{\eta^*(\xi)}^{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta_0}{\eta-\eta_0}\int_{-\infty}^{\xi}\frac{F_i(\xi_0,\eta_0)}{\sqrt{\xi-\xi_0}}\mathrm{d}\xi_0 \tag{7}$$

其中，$\eta^*(\xi)$ 为裂纹端部的 η 坐标.

② 由已破裂部分的广义载荷求未破裂部分的广义应力的计算公式

$$F_i(x,t)=\frac{1}{\pi[x-l_+(t^*)]^{1/2}}\int_{-\infty}^{l_+(t^*)}f_i(x_1,t-\frac{x-x_1}{\alpha})\frac{[l_+(t^*)-x_1]^{1/2}}{x-x_1}\mathrm{d}x_1$$

$$x>l_+(t^*) \tag{8}$$

其中，t^* 为方程 $x-l(t^*)=\nu_i(t-t^*)$的根，f_i 为广义载荷，它与真实载荷 $p_i(x,t)$的关系同样满足算子 $f_i(x,t)=L_b(p_i)$，因此有

$$f_i(x,t)=-F_i(x,t) \tag{9}$$

由于本文假定裂纹是独立型，因此在每一种情形下，只有与 F_i 相应的 u_i 是关于 $x_1=0$. 平面对称的，因而在未破裂部分，有

$$u_i(0,x;t)=0 \qquad x<l_-(t)\text{ 或 }x>l_+(t) \tag{10}$$

例如，对于Ⅰ型裂纹，在 $x<l_-(t)$或 $x>l_+(t)$部分，有 $u_1(x,t)=0$. 但在同样的未破裂部分，u_2 不一定为零. Ⅱ型或Ⅲ型裂纹的情形类推.

2 静态退化解

2.1 一般解

在静态情况下，$l_+(t)=c$，$l_-(t)=-c$

$$F_i(x,t)=\sigma_i(x) \tag{11}$$

在裂纹所在的平面上已破裂部分，重新分布的应力是

$$\sigma_i(x)=-p_i(x) \qquad |x|<c \tag{12}$$

其中，$p_i(x)$为裂纹面上的载荷. 对于Ⅱ，Ⅲ型裂纹

$$p_i(x)=\Delta\tau(x) \tag{13}$$

$$\Delta\tau(x)=\tau_{hi}(x)-\tau_{di}(x) \tag{14}$$

其中，$\Delta\tau(x)$为应力降，$\tau_{hi}(x)$为预应力. $\tau_{di}(x)$为滑动摩擦力. 根据广义错动与真实错动的变换公式(Kostrov, 1975)，以及式(10)，对于静态情形，位移为

$$u_i(x,0^+)=-u_i(x,0^-)=\begin{cases}G_i(x)/(2C_i) & |x|<c\\ 0 & |x|\geqslant c\end{cases} \qquad i=1,2,3 \tag{15}$$

其中，$C_1=C_2=\mu(1-\beta^2/\alpha^2)=2\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$，$C_3=\mu/2$. 裂纹面上的位移 $u_i(x)$和裂纹外边的应力是未知的. 在有限长单裂纹的动态解中令各物理量与时间 t 无关，对于时间的积分下限追溯到$t=-\infty$时刻，就得到退化后的静态解. 将式(8)退化为静态，裂纹外边的应力增量为

$$\sigma_i(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{x-c}}\left[\int_{-\infty}^{-c}\sigma_i(\xi)\frac{\sqrt{c-\xi}}{x-\xi}\mathrm{d}\xi-\int_{-c}^{+c}p_i(\xi)\frac{\sqrt{c-\xi}}{x-\xi}\mathrm{d}\xi\right] \qquad x>c \tag{16}$$

这是一个第二类 Fredholm 积分方程，试取

$$\sigma_i(x)=\frac{\operatorname{sgn}x}{\pi\sqrt{x^2-c^2}}\int_{-c}^{+c}p_i(\eta)\frac{\sqrt{c^2-\eta^2}}{x-\eta}\mathrm{d}\eta\qquad |x|>c\tag{17}$$

作为裂纹外边的应力增量的解，其中

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

不难验证，式(17)在 $x<-c$ 部分表达式可以通过坐标变换从 $x>c$ 部分的表达式中得到，反之亦然．将式(17)代回式(16)，容易验证式(17)就是积分方程式(16)的解．将式(17)代入式(8)，得到静态应力强度因子为

$$K_i^{\pm}=\lim_{x\to\pm c_{\pm}}(2)^{1/2}(|x\mp c|)^{1/2}\sigma_i(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c}}\int_{-c}^{+c}p_i(\eta)\frac{\sqrt{c\pm\eta}}{\sqrt{c\mp\eta}}\mathrm{d}\eta\tag{18}$$

在特征坐标系内，式(7)退化为

$$u_i(\xi_0,\eta_0)=-\frac{e_i}{\sqrt{2}}\int_{\eta_*(\xi_0)}^{\eta_0}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}\int_{-\infty}^{\xi_0}\frac{\sigma_i(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi_0-\xi}}\mathrm{d}\xi\tag{19}$$

其中，$e_i=1/(2\pi C_i)$．回到 x-t 坐标系内，并令 $t_0-t=t_1$，则上式化为

$$u_i(x,0^+)=-e_i\nu_i\iint_{S_2}\frac{\sigma_i(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}t_1}{[\nu_i^2t_1^2-(x-x_1)^2]^{1/2}}$$

$$=e_i\nu_i\left\{\int_{-c}^{+c}p_i(x_1)-\int_{+c}^{+\infty}\sigma_i(x_1)\right\}\int_{-\frac{(x+c)+(x_1+c)}{\nu_i}}^{-\frac{|x_1-x|}{\nu_i}}\frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}x_1}{[\nu_i^2t_1^2-(x-x_1)^2]^{1/2}}$$

$$=e_i\left\{\int_{-c}^{+c}p_i(x_1)-\int_{+c}^{+\infty}\sigma_i(x_1)\right\}\ln\left|\frac{\sqrt{x_1+c}+\sqrt{x+c}}{\sqrt{x_1+c}-\sqrt{x+c}}\right|\mathrm{d}x_1\qquad |x|<c\tag{20}$$

把式(20)看作含参变量 x 的积分，我们试对 x 求导，就得到

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{e_i}{\sqrt{x+c}}\left\{\int_{-c}^{+c}p_i(\xi)-\int_{+c}^{+\infty}\sigma_i(\xi)\right\}\frac{\sqrt{\xi+c}}{\sqrt{\xi-x}}\mathrm{d}\xi\qquad |x|<c\tag{21}$$

将(17)代入上式，然后两边对 x 求不定积分，并交换积分次序，利用 $u_i(\pm c)=0$ 的条件确定积分常数，得到边界(裂纹所在平面)上的位移分布为

$$u_i(x,0^+)=\frac{1}{2C_i\pi}\int_{-c}^{+c}p_i(\xi)\left\{\ln\left|\frac{\xi\sqrt{c^2-x^2}-x\sqrt{c^2-\xi^2}+c(\xi-x)}{\xi\sqrt{c^2-x^2}+x\sqrt{c^2-\xi^2}+c(\xi-x)}\right|\right.$$

$$\left.-\ln\left|\frac{\sqrt{c+\xi}+\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{c+\xi}-\sqrt{c-\xi}}\right|\right\}\mathrm{d}\xi\qquad |x|<c\tag{22}$$

式(17)，(18)和(22)就是一般情况下边界上的应力增量、应力强度因子和位移的静态解．

特别，对载荷为常数的情形，$p_i(x)\equiv p_i(|x|<c)$，我们记

$$p_1 = p \qquad p_2 = p_3 = \Delta\tau = \tau_b - \tau_d \qquad |x| < c \tag{23}$$

其中，$\Delta\tau$ 为应力降，τ_b 为预应力，τ_d 为滑动摩擦力，相应的公式如下：

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} -p_i & |x| < c \\ p_i\left(\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} - 1\right) & |x| > c \end{cases} \tag{24}$$

$$K_i^{\pm} = p_i\sqrt{c} \tag{25}$$

$$u_i(x, 0^+) = \begin{cases} \dfrac{p_i}{2C_i}\sqrt{c^2 - x^2} & |x| < c \\ 0 & |x| \geqslant c \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{26}$$

裂纹所在平面上的预应力为 σ_i^0，其中

$$\sigma_1^0 = p \qquad \sigma_2^0 = \sigma_3^0 = \tau_b \tag{27}$$

总应力为

$$\sigma_i^*(x) = \sigma_i(x) + \sigma_i^0 \tag{28}$$

在式(23)－(28)中，取 $i=1$，这正是 Inglis(1913)，Griffith(1920)和 Irwin(1957)在他们的开拓性工作中针对单轴拉伸情况所给出的结果(Sneddon and Lowengrub, 1969)；取 $i=2$，可得与 Starr(1928)一致的结果；取 $i=3$，则得与 Knopoff(1958)一致的结果.

2.2 一般解分解为对称解与反对称解的叠加

在一般情况下，裂纹面上的载荷总可以写成对称项与反对称项之和

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \frac{1}{2}[p_i(x) + p_i(-x)] + \frac{1}{2}[p_i(x) - p_i(-x)] \\ &= p_{is}(x) + p_{ia}(x) \end{aligned} \tag{29}$$

其中，$p_{is}(-x) = p_{is}(x)$ 为对称项，$p_{ia}(-x) = -p_{ia}(x)$ 为反对称项，相应的公式如下：

$$\sigma_i(x) = \frac{2x\,\mathrm{sgn}\,x}{\pi\sqrt{x^2 - c^2}}\int_0^c [x p_{is}(\xi) + \xi p_{ia}(\xi)]\frac{\sqrt{c^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2}\mathrm{d}\xi \qquad |x| > c \tag{30}$$

$$K_i^{\pm} = \frac{\pm 2}{\pi\sqrt{c}}\int_0^c [c p_{is}(\xi) + \xi p_{ia}(\xi)]\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{c^2 - \xi^2}} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} u_i(x) = \frac{1}{2C_i\pi}\int_0^c \Bigg\{ & p_{is}(\xi)\ln\left|\frac{\sqrt{c^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - \xi^2}}{\sqrt{c^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - \xi^2}}\right| \\ & + p_{ia}(\xi)\ln\left|\frac{\xi\sqrt{c^2 - x^2} + x\sqrt{c^2 - \xi^2}}{\xi\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{c^2 - \xi^2}}\right|\Bigg\}\mathrm{d}\xi \qquad |x| < c \end{aligned} \tag{32}$$

令上式中的 $i=3$，我们便得到与陈祥熊和陈运泰(1990)一致的结果.

当裂纹面上的载荷(或应力降)为对称分布，即 $p_{ia}(x)=0$ 时，上述结果在 $i=3$ 情形时与 Chen 和 Knopoff(1986)的结果是一致的.

当裂纹面上的载荷(或应力降)为反对称分布，即 $p_{is}(x)=0$ 时，令式(30)中的 $i=1$ 并乘以 $\sqrt{\pi}$ 考虑到应力强度因子定义的差别)，我们便得到与 Chen(1989)一致的结果.