

非线性映像分支点结构中的 一些普遍规律和普适常数

郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

远离平衡突变现象的数学描述通常基于非线性方程的分支点理论。所涉及的非线性方程,从代数方程、微分方程、差分方程到积分方程和泛函方程都有。早就知道,即使是很简单的非线性方程,其分支点的结构也可能相当复杂,然而不同的非线性方程却又具有十分相似的分支点结构。最近 M. J. Feigenbaum⁽¹⁾ 从计算机实验中发现一些简单的单变量的非线性映像的分支点结构具有若干普遍规律,出现一些与方程具体形状无关的普适常数。随后发现,它们对于一些多变量的常微分方程和非线性映像也是适用的。这方面的研究工作正在通过数值和解析两条途径迅速进展,下面作扼要综述,以便引起大家注意。

考虑一个把线段 $[a, b]$ 变换到 $[a, b]$ 本身的一维映像,其中含有一个参数 λ :

$$x \rightarrow f(x, \lambda) \quad (1)$$

或写成差分形式

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \quad (2)$$

对于一定的 λ , 映像 (1) 可能具有不动点 x^* :

$$x^* = f(x^*, \lambda) \quad (3)$$

或者说 x^* 是非线性方程 (3) 的一个解。为了判断这个不动点的稳定性, 令

$$x_n = x^* + \xi_n,$$

$$x_{n+1} = x^* + \xi_{n+1},$$

代入 (2) 式展开后得:

$$\xi_{n+1} = f'(x^*) \xi_n$$

于是不动点 x^* 的稳定条件是

$$|f'(x^*)| < 1 \quad (4)$$

除了不动点之外, 对于某些特定的 λ 值, 还可能有 P 个点组成的周期 $(x_0, x_1, \dots, x_{P-1})$, 简称为 P 点周期:

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \equiv f^{(2)}(x_0),$$

$$x_3 = f(x_2) \equiv f^{(3)}(x_0),$$

$$\dots\dots$$

$$x_{P-1} = f(x_{P-2}) \equiv f^{(P-1)}(x_0),$$

$$x_0 = f(x_{P-1}) \equiv f^{(P)}(x_0).$$

(5)

注意这个 $f^{(k)}(x)$ 不是 $f(x)$ 的 k 阶导数, 而是 f 函数自己套用 k 次。由 (5) 式看出, P 点周期中的每一个点都是 $f^{(P)}(x)$ 这个函数的不动点。这个不动点的稳定条件

$$|(f^{(P)}(x_0))'| < 1 \quad (6)$$

按照复合函数的微分规则和 (5) 式写开就是

$$\left| \prod_{i=1}^{P-1} f'(x_i) \right| < 1 \quad (7)$$

可见这 P 个不动点的稳定条件是相同的, 它们同时是 $f^{(P)}(x)$ 的稳定或不稳定不动点。

许多如 (2) 式那样的非线性映象都具有相同的分支点结构。以

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (0 \leq \lambda \leq 2) \quad (8)$$

为例, 它把 $[-1, 1]$ 变换到 $[-1, 1]$ 。当 $\lambda < \lambda_1 = 0.75$ 时, 只有一个不动点是稳定的。 λ 超过 λ_1 之后这个不动点成为不稳定的, 但出现一个 2 点周期, 它们是 $f^{(2)}(x)$ 的两个稳定不动点。当 λ 超过某个 λ_2 之后, 这两个 $f^{(2)}(x)$ 的不动点变得不稳定, 但出现稳定的 2^2 点周期, 这是 $f^{(4)}(x)$ 的四个稳定不动点。这样不断出现新的 2^n 点周期, 相应 λ_n 的间隔越来越小, 终于在 $\lambda_\infty = 1.40\cdots$ 处, 出现无穷长周期, 即非周期的序列。Feigenbaum 根据大量计算机实验发现这些 λ_n 之间存在极限关系:

$$\lambda_n - \lambda_\infty \sim \delta^{-n} \quad (9)$$

或写作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}} = \delta \quad (10)$$

其中出现了普适常数

$$\delta = 4.6692016091029\cdots \quad (11)$$

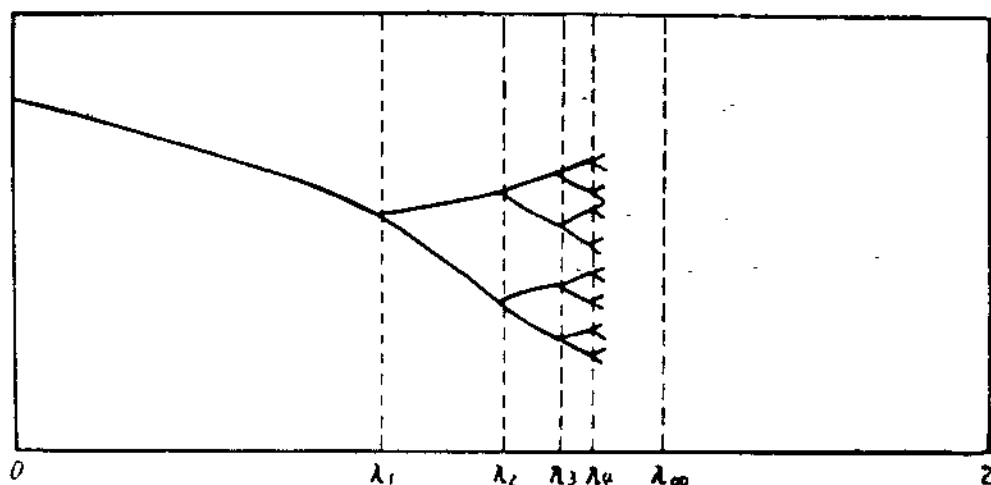


图 1

它与变换 $f(x)$ 的具体形状无关, 只依赖于一些 f 的普遍性质, 如在区间 $[a, b]$ 上

只有一个极大值,在极大值附近可以表示为二次式等。

以上所述示意于图1中。 λ 超过 λ_m 之后,(8)式的例中即在 $[\lambda_m, 2]$ 区间内,以大量非周期的混乱状态为主,但是其中也嵌入了许多周期地带。这些周期带的排列如图2所示。实际上 $P \leq 15$ 的周期带就有2367个之多,其中有许多 2^m 点周期序列, $m = 3, 5, 7 \dots$ 等等。它们的具体位置与间距同 $f(x)$ 的形状有关,但排列顺序与 f 无

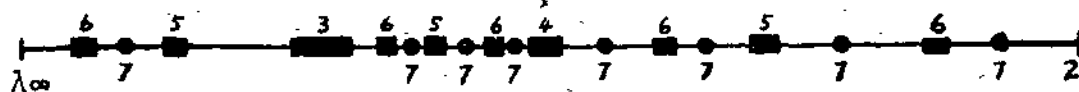


图 2

关。每一组 2^m 点周期对应的 λ_n 之间,也存在(9)、(10)式那样的极限关系,出现同一个普适常数 δ 。

这类一维映象的例子很多。例如早在1973年Metropolis等人(2)就研究了如下的变换:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (3 < \lambda < 4) \quad (12)$$

这是最简单的计入饱和效应的人口模型;

$$x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n) \quad (\lambda_0 < \lambda < 1) \quad (13)$$

以及

$$x_{n+1} = \lambda w (3 - 3w + w^2) \quad (\lambda_0 < \lambda < \frac{64}{63}) \quad (14)$$

其中 $w = 3x_n(1 - x_n)$,还有分段光滑的映象

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} x_n & (0 \leq x \leq a) \\ \lambda & (a \leq x \leq 1-a) \\ \frac{\lambda}{a} (1-x) & (1-a \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (15)$$

等等。

具体检验过上述普适规律的变换,除了若干一维映象外还有一些多变量的映象。例如

1. Hénon模型(3)

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - y_n - \lambda x_n^2 \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases} \quad (16)$$

具体取 $b = 0.3$,讨论分支点结构随 λ 的变化。我们以后还要回到这个模型来。

2. Lorenz模型(4)

这是把流体力学方程作傅立叶展开后,只截取前几个分量所得的常微分方程组。Lorenz当时为讨论对流问题,只保留了三个变量

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = xz + \gamma x - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (17)$$

其中 σ 来自讨论对流时用的无量纲 Prandtl 数, 而 b 来自雷诺数。

3. 在二维环面上截取不可压缩流体的运动方程的傅立叶系数, 得到五个模的方程 (5) 是

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_5x_4 \\ \dot{x}_2 &= -9x_2 + 3x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 - 7x_1x_2 + R \\ \dot{x}_4 &= -5x_4 - x_1x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - 3x_1x_4 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 R 是雷诺数。[5] 的作者们还宣称已经检验过七个模的耦合运动方程。

4. 与耗散结构理论关系更为密切的, 是富田和久等人 [6] 研究的带强迫振动项的布鲁塞尔模型

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2y - Bx + A + a\cos\omega t \\ \frac{dy}{dt} &= -x^2y + Bx \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

强迫振动的幅度 a 和频率 ω , 是可以改变的控制参量。在 $a-\omega$ 相图的一定区域, 例如 $a=0.05$, $\omega=0.8$ 附近出现“混乱”状态。这是输入“信号”, 输出“噪声”的有意思的情况。仔细分析进入混乱状态的过程, 同样发现 $2^n m$ 点周期序列的出现。由于 [6] 完成在 Feigenbaum 的发现之前, 只能从已发表的结果中粗略地估计出 δ 常数。

对于 (17) ~ (19) 这些微分方程, 通常只能观察运动轨迹与一定平面相交的点的分布, 即取所谓 Poincaré 截面。出现“混乱”的标志, 是截面中的点随机地、但是密致地分布在一定区域中。这就是所谓奇异吸引中心 (Strange attractor)。如果奇异吸引中心具有一维结构, 就可以引入一个参数, 由数值计算来恢复从 x_n 到 x_{n+1} 的变换关系。令人惊异的是, 这时往往得到十分简单的由类似 (2) 式表达的变换。可见一维非线性映象并不是没有现实意义的游戏, 它们往往作为多维变换的投影出现。在文献 [6] 中有一个清楚的例子。

奇异吸引中心与湍流的出现机制有密切关系。根据朗道等人早年提出的图象, 湍流是通过无数个相继的分支点而逐渐出现的。Lorenz 模型首次说明, 有可能只经过少数分支点就进入“混乱”态。Ruelle 等人 [7] 进一步提出了经由奇异吸引中心进入湍流的图象 (参看 [8])。

奇异吸引中心的几何结构值得一提。以 Henon 变换 (16) 为例, 其奇异吸引中心是一个马蹄形的图案, 其中有一部分看来是由两条细线和一条粗线构成。如果把粗线取出一部分放大, 它又是由两条细线、一条粗线组成, 如此等等, 可以多次放大和分解。这样的几何结构, 达不到两个一维线段的乘积 $L \otimes L$ 那样密致, 而只是 $L \otimes C$, 其中 C 是具有非整数维数的 Cantor 集合。

Cantor 集合是一种具有自相似结构的几何对象。取 $[0,1]$ 线段三等分之, 舍去中段后把剩下的两段再三等分之, 並分别舍去中段, 这样无限割舍下去, 剩下的点的集合就是 Cantor 集合。为了确定它的维数, 可以推广如下的简单的考虑: 把一个小立方体的边长放大 2 倍, 得到一个体积为 $8 = 2^3$ 的大立方体, 因为这是一个 3 维几何对象。如果把某个几何对象的线度放大 l 倍, 结果得到原来的 k 倍, 而 $k = l^d$, 我们就说这个对象具有维数

$$d = \frac{\ln k}{\ln l} \quad (20)$$

对于 Cantor 集合, 把线段 $[0, 1/3]$ 放大 3 倍, 只得到两个与原来相当的对象, 因此

$$d = \ln 2 / \ln 3 = 0.63093 \dots$$

这样得到的非整数的空间维数称为豪斯道夫 (Hausdorff) 维数, 关于这一概念可以参看 [9]。奇异吸引中心通常具有一个有无穷多层次的由豪斯道夫维数刻划的几何结构。Henon 模型並不是特例, 而是具有代表性的。

自相似性在非线形映象中还有另一种反映。 $f(x)$, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$, $f^{(4)}(x) = f^{(2)}(f^{(2)}(x))$ 的图形如果画出来, 大概如图 3 中 (a)、(b)、(c) 所示。有意思的是 (b) 中虚线框出的部分, 基本上就是把 (a) 翻过来並适当改变尺寸比例, 而 (c) 中的虚线框出的部分, 基本上就是 (b) 翻过来再改变一下比例。Feigenbaum 发现,

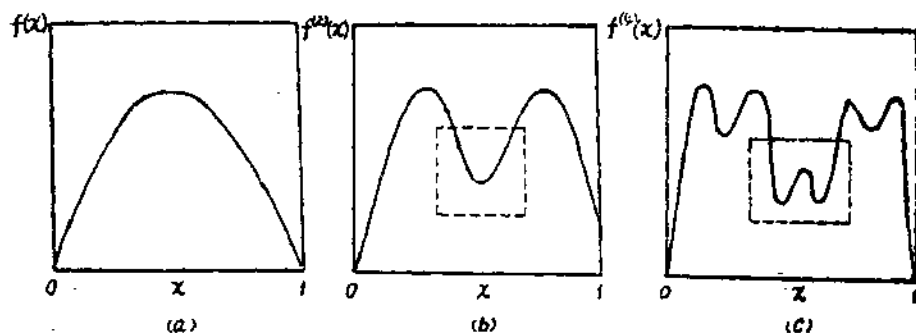


图 3

如果把这个过程无限继续下去, 最后会达到一个普适函数

$$g(x) = -\alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \quad (21)$$

其中出现了普适的自相似系数

$$\alpha = 2.5029078750957 \dots \quad (22)$$

它又是与 $f(x)$ 的具体形状无关的。

非线性映象还具有许多别的普遍规律。例如, 在出现 2^n 点周期时, 如果一个点落在 $f(x)$ 的峰的右边就记 R, 如果落在左面就记 L, 这样由字母 R 和 L 组成的序列, 几乎是一个拓扑不变量。不论考察什么样的变换 $f(x, \lambda)$, 都按同一先后次序出现同一套 RL 字母组成的序列。这类序列目前按发现它们的作者名字⁽²⁾称为 MSS

序列, 又称为 kneading 序列。

关于上面介绍的普适规律, 还有一些即将出版的总结可以参看, 如 [10][11]。

普适性的存在, 增加了我们研究具体模型的信心。因为模型成为一类更普遍的事物的代表, 不再是孤立的、特殊的研究对象。在平衡态相变的最近发展中, 我们看到了普适性的深刻意义, 希望在非平衡相变的研究中也会揭示出更多的普适规律。

参 考 文 献

- [1] M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys., 19 (1978), 25; 21 (1979), 669.
- [2] N. Metropolis, M.L. Stein, P.R. Stein, J. Combinatoric Theory (A), 15 (1973), 25.
- [3] M. Hénon, Comm. Math. Phys., 50 (1976), 69; C. Simó, J. Stat. Phys., 21 (1979), 465.
- [4] E.N. Lorenz, J. Atmospheric Sci., 20 (1963), 130.
- [5] V. Franceschini, C. Tebaldi, Comm. Math. Phys., 64 (1979), 159; J. Stat. Phys., 21 (1979), 707.
- [6] K. Tomita, T. Kai, Prog. Theor. Phys. Supplement, 64 (1978), 280; J. Stat. Phys., 21 (1979), 65.
- [7] D. Ruelle, F. Takens, Comm. Math. Phys., 20 (1971), 167.
- [8] C. Normand, Y. Pomeau, M.G. Verlarde, Rev. Mod. Phys., 49 (1977), 581; P. C. Martin, J. de Phys. Colloque C1, Tome 37 (1976), C1-57.
- [9] B. B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension, W.H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [10] Proceedings of the Conference on Nonlinear Dynamics, December 1979, ed. R.H.G. Helleman, Ann. N.Y. Acad. Sci., 1980/1981.
- [11] Fundamental Problems in Statistical Mechanics, vol. 5, ed. E.G.D. Cohen, North Holland, 1980.

Universal Properties and Universal Constants in Bifurcation Structure of Nonlinear Mappings

Hao Bai-lin

(The Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)