Proceedings Of the Symposium
On Non-equilibrium Statistical Physics
(The Dissipative-Structures)
Xian • China • 1979

临界动力学与统计场论

郝 柏 林

（中国科学院理论物理研究所）

临界动力学虽与耗散结构没有直接关系，但仍是非平衡统计物理的一个重要课题。特别是要研究高阶分叉点附近的动态行为和涨落所起的作用时，处理普通临界点附近动态行为的经验会是有益的。这篇综述拟从连续相变的物理图象开始，介绍现有动态临界现象理论的概貌，进而略述周光召等人最近引用闭路格林函数方法讨论临界动力学所得的初步结果。

关于临界动力学已有一些很好的总结[1~4]，特别是1979年四月举行的动态临界现象国际会议文集[5]，反映了最新的进展，而且涉及到非平衡开放系统在不稳定点附近的行为。本文限于篇幅，只叙述为了理解我们自己的工作所必需的前提。

连续相变的物理图象

目前对连续相变（包括从前所谓第二类相变和临界点）的理论认识，比对第一类相变要完整深刻的多。没有潜热、不允许过冷和过热等亚稳现象存在的连续相变点附近，最根本的特点就是当控制物理系统状态的参数（如温度、压力或外场）发生无限小变化时，系统中会突然出现或失去一些对称性质。一定的对称性质只能或者有、或者无，即只能发生有限的突变，而引起突变的原因却在于控制参数连续地、无限小的改变，这就是连续相变的本质。因此，新相不能像子晶那样从旧相中连续地长大，也不可能有两相共存现象。

在靠近相变点时，有利于新相出现的关联越来越大，系统中出现局部地具有新相特点的集团或花斑。它们不是象子晶那样具有确定界面的区域，而是一些若隐若现、此起彼伏、互相嵌套的涨落。这些花斑可以在计算机模拟中看到。以各向同性铁磁体为例，当温度从顺磁相向居里点T_c下降时，如果设想取出固定温度下的一个“剖面”，则可以发现许多大大小小的区域，其中磁距的排列基本有序，但相邻或相嵌区域中磁距的取向仍是随机的。如果隔片刻时间再取一次“剖面”，则小区域的形状和取向可能完全改变，而大区域的形状和取向则变得不多。一定温度下最大花斑的特征尺寸基本上就是关联长度，温度趋近T_c时，关联长度也趋向无穷。于是某一种取向的花斑连成一片，形成新相，整个系统的对称、也从各向同性降低到有一个特殊方向。至于新相的具体磁化方向，

则是由理论中通常不能计入的偶然因素决定的。这就是对称的自发破缺。

这样我们看到，连续相变的物理图象从本质上就是动态的。在远大于晶格常数或原子尺度a的范围内，有大量各种尺寸的花斑或涨落存在，它们就是形成比热尖峰、导致输运系数有奇异性，使得光散射反常增强的物理自由度，是统计场论或涨落场论中的“场量”。它们的尺度远大于a，说明这种理论仍是宏观的，而且在相当程度上具有与原子尺度上的细节无关的“普适性”。而另一方面，关联长度趋向无穷时又存在着作尺度变换同时保持物理图象不变的广泛余地，这又说明了相变现象的标度性。动态现象中物理系统的具体特点（如对称性质、守恒量数目、序参量是否守恒）对于临界性质有更大影响，因此标度性、特别是普适性的应用范围比平衡态的临界理论要狭窄。

为了进行理论描述，要选取一组“完备”的宏观变量 $\{\Psi_i, i=1, 2, \cdots n\}$，构造它们所满足的封闭方程组。宏变量的主要特点，是随时间和空间缓慢变化，它们可能是基本场量的平均值，也可能是复合算子的平均值。恰当地选择这些量和确定它们应具备的对称性质，是建立动态临界模型的关键步骤。与平衡问题不同，一组宏变量通常只能描述一个临界点附近的动态行为，因为至少序参量的选取对不同的临界点是不一样的。

动态临界现象的随机模型

连续相变的热力学理论推广到空间不均匀的情形，最成功的例子曾是金兹堡和兰道（以下简称GL）从如下的自由能出发

$$F=\int\left[\frac{1}{2}(\nabla\Psi_i)^2+\frac{r_0}{2}\Psi_i^2+\frac{g_0}{4!}(\Psi_i^2)^2\right]dx \qquad (1)$$

由平衡条件

$$\frac{\delta F}{\delta\Psi_i}=0 \qquad (2)$$

得到的半唯象超导理论：GL方程（2）中竟然包含了对超导中间态和第二类超导体的理论解释。把方程（2）推广到非平衡态，得到所谓含时间的GL（以下简称TDGL）方程。最简单的办法，是对宏变量 Ψ_i 唯象地写出方程：

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}=-\Gamma_{ij}\frac{\partial F}{\partial\Psi_j}, \qquad (3)$$

其中系数矩阵 Γ_{ij} 若是对称的，则对应不可逆的弛豫过程。对角化以后，当 Ψ_i 不是守恒量时，可取 Γ_{ii} 为常数，这就是简单的耗散弛豫。如果 Ψ_i 是守恒量，则与扩散方程类比，看出 Γ_{ii} 中还含有对空间坐标的微分算子，可以写作 $-D_i\nabla^2$，D_i 是扩散系数。这是扩散弛豫，此时耗散是高阶效应。如果取反称的 Γ_{ij}，则它描述可逆的正则运动。最简单情形下

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

方程（3）甚至包含了哈密顿正则方程。

各个模Ψ_i之间的耗散型非线性相互作用，可以借助在自由能（1）中增加耦合项而加以描述，它们通常使输运系数在临界点趋于零。临界动力学的重要进展之一，就是认识到有些非耗散的可逆的模耦合会对临界现象有重要影响，甚至导致输运系数的发散。为了反映后者，必须在TDGL方程（3）中加上川崎[1]引入的模模耦合项：

$$V_i(\Psi)=\lambda\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial\Psi_j}A_{ij}(\Psi)-A_{ij}(\Psi)\frac{\partial F}{\partial\Psi_j}\right)\quad(4)$$

其中反称张量A_{ij}由Ψ_i的对易子或泊松括号构成。（4）式又称为对流或冲流（Streaming）项，因为在方程（3）中再补入随机场，使之成为广义朗之万方程之后，$V_i(\Psi)$乃是相应的福克普朗克方程中的流项之一，而且（4）式的形状本身保证了$V_i(\Psi)$满足定态的概率守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial\Psi_i}\left(V_ie^{-F}\right)=0\ .$$

这是$\{\Psi_i\}$空间中的无散度条件。满足细致平衡条件的概率分布W基本上就是e^{-F}。这时方程（3）的形状是

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}=K_i(\Psi)+\xi_i(t)\ ,\qquad(5)$$

其中非随机部分

$$K_i(\Psi)=-\sigma_{ij}\frac{\partial F}{\partial\Psi_j}+V_i(\Psi)\ ,\qquad(6)$$

而随机力ξ_i反映一切未计入Ψ_i的自由度的影响。通常假定ξ_i遵从高斯分布，即

$$\langle\xi_i(t)\rangle=0$$
$$\langle\xi_i(t)\xi_j(t')\rangle=2\sigma_{ij}\delta(t-t')\qquad(7)$$

如果在（6）式中只保留σ_{ij}的对称部分，则它与（7）式中的σ_{ij}是相同的。这是涨落耗散定理的要求。

对于Ψ_i及其对称性质的各种不同选择，以及自由能（1）的具体化，导致动态临界现象的种种随机模型，它们可以相当好地描述铁磁体、反铁磁体、经典液体和混合溶液（液氦还有一些问题）等系统在临界点附近的动态行为。我们不去讨论这些模型（请参看总结文章[3]），在此只指出两点。

第一、广义朗之万方程（5）虽然包含着很丰富的内容，但它的各个组成部分是根据不同的考虑拼凑出来的，特别是非线性的模耦合流V_i是外加的。

第二、处理这个方程的通常办法，是把K（Ψ）中的非线性项作为微扰，逐次迭代求解（参看[2]第十四章）。这样得到的微扰展开中，出现响应函数和关联函数两种基本构件，因此形式上与量子场论中的费曼图有所不同。虽然可以直接从方程（5）出发，作类似平衡相变理论中的重正化群变换，得出递推公式、不动点和动态临界指数等等，但是这种展开高阶项的结构并不是一目了然的，不便于构造重正化的微扰论。

对于经典的统计场论建立重正化微扰论的认真尝试，来源于湍流理论，而以所谓M

SR场论[7]为代表。这个场论中人为地对经典场量Ψ引入了不对易的共轭场$\hat{\Psi}$（又称响应场），从而比较自然地定义了响应函数和关联函数，写出一套封闭的方程，原则上给出了迭代求解的手续。后来知道，MSR场论与临界动力学中遇到的情形是相同的。两者都是直接从场方程出发，还不便于和量子场论作完全的类比，因此出现了建立拉格朗日形式的统计场论的努力。

拉格朗日形式的统计场论

建立拉格朗日形式统计场论的最初工作，可以追溯到Onsager等人[8]早年为线性马尔可夫过程推导的概率密度泛函。Graham[9]和久保等人[10]大致同时得到了非线性情形下的概率密度泛函。随后Janssen[11]和De Dominicis[12]把它用于临界动力学。所有这些工作的实质，可以简捷地用以下的形式推导过程说明。

既然要保证广义朗之万方程（5）成立，我们可以从连续积分下δ-函数的归一条件出发：

$$\int [d\Psi]\delta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-K(\Psi)-\xi\right)\Delta(\Psi)=1 \tag{8}$$

由于δ函数的自变量不是Ψ，而是整个表达式（5），所以必须在（8）式中写上泛函雅可比行列式Δ（Ψ）。如果把（5）式看作是从高斯随机过程{ξ}到更复杂的随机过程{Ψ}的非线性变换，Δ（Ψ）就是这个变换的雅可比行列式。在文献[9]中首先算出了Δ（Ψ）。忽略常数因子，它等于

$$\Delta(\Psi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\delta K(\Psi)}{\delta\Psi}\,dxdt\right) \tag{9}$$

如果把（8）式中的δ函数也通过连续积分表示出来，则有（省去对dxdt的积分符号不写）

$$\int [d\Psi]\left[\frac{d\hat{\Psi}}{2\pi}\right]\exp\left\{i\hat{\Psi}\left(\dot{\Psi}-K(\Psi)-\xi\right)-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta\Psi}\right\}=1 \tag{10}$$

在此式中再插入因子$\exp(i\int(J\Psi+\hat{J}\hat{\Psi})\,dxdt)$，它就成为Ψ和$\hat{\Psi}$的各种乘积的平均值的生成泛函，概率论中称为特征泛函或矩生成泛函：

$$Z_\xi[J,\hat{J}]=\int\left[d\Psi\frac{d\hat{\Psi}}{2\pi}\right]\exp\left(i\hat{\Psi}(\dot{\Psi}-K(\Psi)-\xi)-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta\Psi}+iJ\Psi+i\hat{J}\hat{\Psi}\right). \tag{11}$$

它仍是ξ的泛函，显然$Z_\xi(0,0)=1$。ξ遵从高斯分布$W(\xi)\sim\exp(-\xi\sigma^{-1}\xi/2)$，其中$\sigma^{-1}$就是（7）式中$\sigma$的逆矩阵。在（11）式中完成对ξ的高斯平均后得

$$Z[J,\widehat{J}]=\int [d\Psi\frac{d\widehat{\Psi}}{2\pi}]\exp\Big(-\frac{1}{2}\widehat{\Psi}\sigma\widehat{\Psi}+i\widehat{\Psi}(\dot{\Psi}-K(\Psi))-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta\Psi}$$

$$+iJ\Psi+i\widehat{J}\widehat{\Psi}\Big),\qquad(12)$$

这就是拉格朗日形式下 MSR 场论的生成泛函，其中$\widehat{\Psi}$就是[7] 中引入的共轭场或响应场。与量子场论中一样，使用连续积分时Ψ和$\widehat{\Psi}$是对易的经典场。（12）式中对$\widehat{\Psi}$的积分又是高斯型的，可以完成积方得到

$$Z[J,\widehat{J}]=\int [d\Psi]\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\dot{\Psi}-K-\widehat{J})\,\sigma^{-1}\,(\dot{\Psi}-K-\widehat{J})-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta\Psi}$$

$$+iJ\Psi\Big\}\qquad(13)$$

（13）式（取$\widehat{J}=0$）是在[9] 中作为概率密度泛函最先得到的，但是它有两个主要缺点。第一、非线性项K（Ψ）以乘积形式进入，导致更高阶的非线性，使由此得到的场论中出现过多复杂的项角；第二、逆矩阵σ^{-1}在守恒量情形下可能导致奇异性，因为完成傅氏变换后$\sigma_i=D_ik^2$。

建立场论形式的临界动力学的方便的出发点乃是（12）式[11,13]，其中只有K（Ψ）的一次项和σ 矩阵本身，代价是引入了使自由度数目扩大一倍的共轭场$\widehat{\Psi}$。其实这正是与闭路格林函数方法相通之处，因为两者都等价于令算子数目增加一倍的超算子方法（参看[14]）。久保等人[10]最初得到（12）式时漏掉了雅可比行列式$\Delta(\Psi)$，而这是为保证因果性所必须的。

既然从（12）式中得到了拉氏量（将$i\widehat{\Psi}$取作新场量$\widehat{\Psi}$后）

$$L(\Psi,\widehat{\Psi})=\frac{1}{2}\widehat{\Psi}\sigma\widehat{\Psi}+\widehat{\Psi}\Big(\dot{\Psi}-K(\Psi)\Big)-\frac{1}{2}\frac{\delta K}{\delta\Psi},\qquad(14)$$

就可以把量子场论中量纲分析、维数正规化、最小重正化、Callen-Symanzik方程等全套武库搬到临界动力学中来，建立完整的理论。

顺便指出，上述用δ函数把广义朗之万方程提升到指数上去的作法，就是法捷耶夫和波波夫在规范场量子化时所用技巧的翻版（可参看[15]，只是这里雅可比行列式$\Delta(\Psi)$已经自动指数化，不必再借助“鬼场”把它提升上去。

以上拉格朗日形式的统计场论尽管有许多好处，但其根本出发点仍是唯象的广义朗之万方程，因此很难讨论其局限性并说明进一步发展这一理论的方向。我们将看到，闭路格林函数方法是统一地得到广义朗之万方程和拉格朗日形式的统计场论的自然框架，而且在推导过程中可以清楚看到所引入的近似和限制，从而认识改进途径。

闭路格林函数

闭路格林函数方法虽由Sch winger[16]提出多年（参看总结文章[17]及其引文），但由于技术上相当烦琐，它的潜力至今尚未完全发挥出来。在[17]中再次指出，闭路格林函数可能成为处理非平衡统计问题的有效方法。最近周光召等人初步完成了用这种方法讨论动态临界现象的一组工作[18-20]，工作过程中还发展了一些有关闭路格林函数本身的变换关系和运算规则[20,21]，用以简化实际计算。这里先叙述有关闭路格林函数的一些知识，后面再扼要介绍用它们处理临界动力学的主要结果。

为简单起见，我们只考虑玻色场φ（x），它可能有多个分量。n点闭路格林函数的定义是

$$G_p(1,2,\cdots\cdots n) = (-i)^{n-1}\mathrm{tr}\left\{T_p\left(\hat{\varphi}(1),\hat{\varphi}(2),\cdots\cdots\hat{\varphi}(n)\right)\hat{\rho}\right\}, \tag{15}$$

其中$\hat{\varphi}$（i）和$\hat{\rho}$是海森堡表象中的场算子和密度矩阵，所有时间变量可在沿着从$-\infty$到$+\infty$（正支）再从$+\infty$回到$-\infty$（负支）的闭回路上取值。算子T_p在此回路上按时间先后排列各算子$\hat{\Psi}$的顺序。各处的下标P用以指明“闭时间回路”。闭路格林函数可以作为变分导数

$$G_p(1,2,\cdots\cdots n) = i\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(1)\delta J(2)\cdots\delta J(n)}\Big|_{J=0} \tag{16}$$

得自生成泛函

$$Z[J] \equiv e^{-iW[J]} = \mathrm{tr}\left\{T_p\left[\exp\left(-i\int_p \hat{\varphi}(x)J(x)\,dx\right)\right]\hat{\rho}\right\} \tag{17}$$

由连接格林函数的生成泛函W〔J〕经过勒让德变换得到顶角函数的生成泛函

$$\Gamma[\varphi_c] = W[J] - \int_p J(x)\varphi_c(x)\,dx, \tag{18}$$

其中J应通过平均值φ_c的定义

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \tag{19}$$

表示出来。J（x）本身与顶角生成泛函的关系是：

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} \tag{20}$$

如果理论中出现复合算子Ψ（φ），可以引入对应复合算子的外源h，定义相应的生成

泛函$Z[J, h]$、$W[J, h]$和$\Gamma[\varphi_c, \Psi_c]$。所有这些关系式均与普通的格林函数生成泛函相似（可参看[22]），唯一差别只在于时间变量可在闭回路上取值，对时间的积分也定义在闭路上。当然，密度矩阵和初始关联带来一些实质性的差异，这里不去讨论（请参阅[17]）。

如果在（15）式中具体规定各个自变量分居于正负支的各种情况，则得到2^n种不同的可能性，统一记为$G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(1, 2, \cdots n)$，其中希腊字母下标。取 ± 值，它们可以视为一个张量$\hat{G}(1, 2, \cdots n)$的不同元素。

由G_p表示的各种闭路上的关系式，如果明显地分开正负时间支，一律表示成普通时间轴$(-\infty, +\infty)$上的积分，则被积函数成为各种$\hat{G}$函数的乘积，中间要恰当地插入若干泡利矩阵σ_3。关于这些简化计算的规则，详见[21]。此后就可以计算相应的费曼图，与普通量子场论的差别只在于每个k顶点的图，根据顶点处于正负支的情况，对应2^k个图和积分。

各种物理量之间的关系不是直接由$\hat{G}$张量表示，而是通过它的元素的线性组合写出来。这些线性组合是另一个张量$\tilde{G}$的元素，它们可以记为$G_{\cdots}(1, 2, \cdots n)$，其中拉丁下标取1，2两个值。从$\hat{G}$到$\tilde{G}$的变换关系是

$$\tilde{G}_{\cdots}(1,2,\cdots n) = 2^{\frac{n}{2}-1} Q\, Q \cdots Q\, G_{\alpha\beta\cdots}(1,2,\cdots n), \tag{21}$$

其中Q是正交矩阵

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

有趣的是，（21）式中实际上包含了一切n点超前、推迟和关联函数的定义。$n = 2$时有：

$$\tilde{G}(12) = \begin{pmatrix} 0 & G_A(12) \\ G_R(12) & G(12) \end{pmatrix}$$

$$= -i\begin{pmatrix} 0 & \theta(21)\langle[\varphi(2),\varphi(1)]\rangle \\ \theta(12)\langle[\varphi(1),\varphi(2)]\rangle & \langle\{\varphi(1),\varphi(2)\}\rangle \end{pmatrix}, \tag{22}$$

其中引入了两点台阶函数

$$\theta(12) = \begin{cases} 1 & 如 t_1 > t_2 \\ 0 & 如 t_1 < t_2 \end{cases}。$$

n点$\tilde{G}$函数的结构，由以下两组一般公式给出[20]：

$$\tilde{G}_{11\cdots 1}(1,2,\cdots n)=0, \tag{23}$$

$$\tilde{G}_{\underbrace{22\cdots 2}_{k个}11\cdots 1}(1,2,\cdots n)=(-i)^{n-1}\sum_{\rho\in\begin{pmatrix}1,2,\cdots n\\ \rho_1\rho_2,\cdots\rho_n\end{pmatrix}}{}' \theta(\rho_1\rho_2,\cdots\rho_n)\times$$

$$\langle\underbrace{((\cdots(}_{(n-1)\text{重}}\varphi(\rho_1),\varphi(\rho_2)),\cdots),\varphi(\rho_k))\rangle, \tag{24}$$

其中$\theta(1,2\cdots n)$是n点台阶函数，而(，)是反对易子或对易子：

$$(\cdots,\varphi(\rho_i))=\begin{cases}\{\cdots,\varphi(\rho_i)\} & 如果1\leqslant\rho_i\leqslant k,\\ [\cdots,\varphi(\rho_i)] & 如果k+1\leqslant\rho_i\leqslant n,\end{cases}$$

(24) 式中对n个数的一切置换求和时，应当扣除$k+1\leqslant P_1\leqslant n$的各项。

在计算中自动出现$\tilde{G}$函数，保证因果关系成立，这是闭路格林函数方法的一大优点。但是只有在通过G_p或$\hat{G}$函数表示时，理论的结构才与普通量子场论完全对应。

Ward—Takahashi恒等式和模耦合

顶角方程 (20) 中包含着丰富的内容，在一定近似下它导致带模耦合项的TDGL方程。我们不去重复[18-20]中的推导，只在此概述主要结果。宏变量Ψ_i是基本场φ的复合算子的平均值。我们在编号方式上稍作区分，把不是守恒量的序参量用拉丁脚标记为Ψ_{ci}，$i=1, 2, \cdots n$，而把守恒量用希腊脚标记为$\Psi_{c n+\alpha}\equiv q_\alpha$，$\alpha=1, 2, \cdots m$。写出相当于 (20) 式的含复合算子的顶角方程，当Ψ_c是随时间空间缓慢变化的函数时，可以对时间变化展开到一阶导数（这相当于马可夫近似），而且在一定条件下引入有效自由能，得到：

$$\gamma(t)\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\delta F}{\delta\Psi}+J(t)\ . \tag{25}$$

这里引入了矩阵记法。系数矩阵γ由推迟顶角函数对时间快变部分的傅氏变换决定：

$$\gamma(x,y,t)=i\frac{\partial}{\partial k_0}\Gamma_R(x,y,k_0,t)\Big|_{k_0=0} \tag{26}$$

一般情形下只能证明γ是个实矩阵，既有对称部分、又有反称部分。引入有效自由能 F 的 "一定条件"，就是顶角函数耗散部分$A=i(\Gamma_{-+}-\Gamma_{+-})/2$（见[23]）的傅氏变换满足

$$\lim_{k_0=0}A(x,y,k_0,t)=0\ . \tag{27}$$

这个条件在平衡态附近和一部分非平衡定态附近是成立的。将γ求逆之后，(25)式可以写成普通TDGL方程（3）的形式（带外源项J）：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\gamma^{-1}\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi} - J\right) \tag{28}$$

如果区分对应序参量和守恒量的脚标，则矩阵γ^{-1}可以分为四块，形象地记为

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & \sigma_{i\beta} \\ \sigma_{\alpha j} & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{29}$$

文献[18]的一个重要结论，就是对应守恒量的两块，$\sigma_{\alpha j}$和$\sigma_{\alpha\beta}$，可以完全确定。这是因为守恒量的方程还可以从 Ward-Takahashi 恒等式（参看[23]）结合线性响应理论得到。对比的结果是

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -\left(l_{\alpha\beta}\nabla_x^2 + i f_{\alpha\beta\gamma} q_\gamma\right)\delta^{(3)}(x-y), \\ \sigma_{\alpha j} &= -iL^{\alpha}_{jk}\Psi_k\delta^{(3)}(x-y), \end{aligned} \tag{30}$$

其中$l_{\alpha\beta}$是线性输运系数，$f_{\alpha\beta\gamma}$是对应守恒量的对称群G的结构常数，L^{α}_{ik}是序参量Ψ_i在群G作用下的表示矩阵。

矩阵（29）的另外两块，只能在临界点附近（即Ψ_i很小时）由对称考虑写出其对Ψ展开的首项形状：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \delta_{ij}\sigma(x,y) + \cdots \\ \sigma_{i\beta} &= iL^{\beta}_{ij}\Psi_j\delta^{(3)}(x,y) + \cdots \end{aligned} \tag{31}$$

这样，我们把方程（28）具体化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} &= -\sigma\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_i} - J_i\right) - iL^{\alpha}_{ij}\Psi_j\left(\frac{\delta F}{\delta q_\alpha} - J_\alpha\right), \\ \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} &= l_{\alpha\beta}\nabla^2\left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta\right) + i\Big[\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_i} - J_i\right)L^{\alpha}_{ij}\Psi_j \\ &\quad + f_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta F}{\delta q_\beta} - J_\beta\right)_{p\gamma}\Big]. \end{aligned} \tag{32}$$

只要恰当地选择序参量、守恒量和对称群G，这个方程组中就包括了目前动态临界理论中的各种模型（例如[3]中介绍的那些）。有意义的是，模耦合项不必再外加进去，而是作为Ward-Takahashi恒等式的后果自动出现。

统计场的有效作用量

场方程（32）式是作了一系列近似后得到的。我们不必把它再“提升”起来，去求得拉格朗日形式的统计场论，而应当从闭路格林函数的生成泛函出发，推出更普遍一些的结果。

对于密度矩阵取初始时刻的无规相位近似，即在$t=t_0$时对角

$$\langle \varphi'(x,t_0)|\rho|\varphi''(x,t_0)\rangle = P(\varphi'(x), t_0)\,\delta(\varphi'(x,t_0) - \varphi''(x,t_0)), \tag{33}$$

于是Ψ的闭路生成泛函[17,25]可写为

$$Z[J] = e^{-iW[J]} = N\int [d\varphi]\exp\left[i\int_P \Big(L(\varphi)\,dx - J\Psi(\varphi)\Big)dx\right]\delta(\varphi_+ - \varphi_-), \tag{34}$$

其中对应复合算子$\Psi(\varphi)$的外源J，前面曾记作h，而

$$\delta(\varphi_+ - \varphi_-) \equiv \int d\varphi'(x)\delta(\varphi(x,t_+=t_0) - \varphi'(x))\,\delta(\varphi(x,t_- = t_0) - \varphi'(x))\,P(\varphi'(x), t_0)。$$

用闭时间回路上连续δ函数的归一条件

$$\int [d\Psi]\,\delta(\Psi_+ - \Psi_-)\,\delta(\Psi - \Psi(\varphi)) = 1$$

乘（34）式后，以$\Psi(x)$代指数上的$\Psi(\varphi)$并改变积分顺序，把δ函数变成积分表示，可将（34）式写成

$$Z[J] = N\int [d\Psi]\exp\left[iS_{eff}[\Psi] - i\int_P J\Psi dx\right]\delta(\Psi_+ - \Psi_-), \tag{35}$$

其中

$$e^{iS_{eff}[\Psi]} \equiv \int\left[\frac{dI}{2\pi}\right]\exp\left[i\int_P \Psi(x)\,I(x)dx - iW[I]\right]。 \tag{36}$$

这两个式子只是连续积分的正反傅氏变换，并不包含除（33)外的任何近似。原则上可以从微观拉氏量$L(\varphi)$和生成泛函$W[I]$出发，定义有效作用量S_{eff}，或者根据对称性质构造唯象的模型。然而可以不对$W[I]$作任何具体规定，证明在（35）式中取树图近似，就得到顶角函数生成泛函$\Gamma[\Psi]$，而在单圈图近似下得到泛函雅可比行列式（9），即

$$iS_{eff}[\Psi] = -i\Gamma[\Psi] - \frac{1}{2}\int \frac{\delta K}{\delta\Psi}dx, \tag{37}$$

其中$K = -\gamma^{-1}\dfrac{\delta F}{\delta\Psi}$

连续积分（35）下面的最可几轨道是

$$\frac{\delta Seff\ [\Psi]}{\delta\Psi\ (x)} = J\ (x)\ . \qquad (38)$$

现在考虑在最可几轨道附近的涨落。闭路形式中，Ψ（x）在 正负支上可取不同的值，因而可以令

$$\Psi_c\ (x) = (\Psi_+ (x) + \Psi_- (x))\ /2,$$

$$\Delta\ (x) = \Psi_+ (x) - \Psi_-(x)。$$

将有效作用量对Δ（x）展开到二次项，并在（35）式中完成对Δ（x)的高斯积分，就回到生成泛函（13）式。后者与MSR场论 生成泛函（12）的关系已经清楚。这时物理外场对应$\hat{J} = (J_+ + J_-)\ /2$，而构造生成泛函时引入的形式外场对应$J = J_+ - J_-$。这两种“外场”项，迄今一直是分别引入的[13]。这里我们看到闭路格林函数方法的又一好处。

我们从闭路格林函数的统一框架中，得出了临界动力学理论的各种形式。由此进一步分析现有理论未能反映的问题，例如耗散驰豫与正则运动的交叉效应，今后要继续研究。

参　考　文　献

〔1〕 K.Kawasaki,in"Phase Transitions and Critical Phenomena", ed.by C.Domb and M.S. Green,vol.5A,Academic Press,1976.

〔2〕 S.K.Ma（马上庚）,Modern Theory of Critical Phenomena, Benjamin,1976.

〔3〕 P.C. Hohenberg,B.I. Halperin,Rev.Mod.Phys.,49 (1977), 435.

〔4〕 P.C.Hohenberg, in"Order and Fluctuations in Equilibrium and Non-equilibrium Statistical Mechanics",Wiley,1979.

〔5〕 C.P.Enz (ed.)Dynamical Critical Phenomena and Related Topics, Lecture notes in Physics No.104,Springer,1979.

〔6〕 于渌，郝柏林，相变和临界现象（上），《物理》，（待发表）.

〔7〕 P.C.Martin,E.D.Siggia,H.A.Rose,Phys.Rev.,A8 (1973) ,423.

〔8〕 L.Onsager,S.Machlup,Phys.Rev.,91 (1953) ,1505,1512.

〔9〕 R.Graham,Springer Tracts in Modern Physics,66 (1973) ,1.

〔10〕 R.Kubo,K.Matsuo,K.kitahara,J.Stat.Phys.,9(1973).51.

〔11〕 H.K.Janssen,Z.Physik,B23(1976),377;R.Bausch,H.K.Janssen, H Wagner,Z.Physik,B24(1976),113.

〔12〕 C.De Dominicis,J.Phys. (Paris) ,37(1976),Colloq. C-247.

〔13〕 C.De Dominicis,L.Peliti,Phys.Rev.,B18 (1978) ,353.

〔14〕 M.Schmutz,Z.Physik,B30 (1978) ,97.

〔15〕B.H.Попов,Коммнуальные Инмеграх в Квантовои теории Поля и Статистическио физике.Атомиэдат,1976.

〔16〕J.Schwinger,J.Math.Phys.,2(1961),407

〔17〕周光召、苏肇冰，闭路格林函数和它在非平衡统计物理中的应用，《统计物理学进展》第五章，科学出版社，（待出版）。

〔18〕周光召、苏肇冰、郝柏林、于渌，非平衡统计场论与临界动力学（一）广义朗之万方程，《物理学报》，29（1980）（待发表）。

〔19〕周光召、郝柏林、于渌，非平衡统计场论与临界动力学（二）拉氏场论表述，《物理学报》，29（1980）（待发表）。

〔20〕Zhou Guang-zhao, Su Zhao-bin, Yu Lu, Hao Bai-lin, Closed Time Path Green's Functions and Critical Dynamics, Institute of Theoretical Physics Preprint ASITP 79-003, Beijing, September, 1979 (To be Published in Phys. Rev. B(1980)).

〔21〕周光召、于渌、郝柏林，三套闭路格林函数的变换关系，《物理学报》，29（1980）（待发表）。

〔22〕郝柏林，统计微扰论的生成泛函，《统计物理学进展》第一章，科学出版社，（待出版）。

〔23〕周光召、苏肇冰，高能物理与核物理，3（1979），314.