

**用压力校正法求解二维椭圆型问题
的通用程序分析及应用**

郝英立赠书

用压力校正法求解二维椭圆型问题
的通用程序分析及应用

上 册

用压力校正法
求解二维椭圆
型问题的通用
程序分析及应用

用压力校正法求解二维椭圆型问题
的通用程序分析及应用

上 册

0175.25

引言:

本程序是以 SIMPLE 方法为基础编写的, 它可用以计算稳态, 两维的椭圆流动, 在本程序的处理过程中由于采用了统一的方程表达式, 使程序的通用性大大增加, 不但可以用于求解象轴对称旋转流动, 任意截面的充分发展渠边流动等两维问题, 而且在求解湍流流动方面也能被广为应用, 近年来已有许多人在这方面做了不少的工作, 同时还可以推广应用于求解充分发展管流等抛物形问题。此程序在编制过程中由于作了适当的变换, 对于直角坐标、极坐标和轴对称坐标下的情形均可应用, 在方程的求解过程中, 用来回扫描的行式列的 TDMA 求解结合分块的校正法, 使方程求解速度大大增加。目前, 这套程序在求解流动与传热等方面已被广泛应用。本程序说明的目的是帮助使用程序的同志, 能较快地领会程序编制的思想和方法, 并掌握其使用方法, 此说明主要包括以下三个部分。

- ①介绍本程序所使用的基本原理的方法, 主要使大家能对程序编排的方法有一个全面的了解。
- ②各子程序的功能介绍及其框图, 使大家对程序能有比较直对的了解。同时还介绍了用户子程序 USER 的编排要求的方法。
- ③例题说明, 对本程序后所附的考题进行注释, 使大家在使用程序时有所参考。

一、基本方法简述

§1-1 基本方程及其离散形式

1. 通用方程

为了增加程序的通用性及数学描述的方便起见, 我们可以用一通
通用的方程形式来描述各类问题的控制方程, 若假定所求问题的应
变量为 ϕ , 那么方程的一般形式可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi) + S_{\phi} \quad (1-1)$$

这里, Γ_{ϕ} 为扩散系数, S_{ϕ} 为源项, 这里 ϕ 可以用来表示各种不同
的量, 当 ϕ 表示为某一特定的量时, $\Gamma_{\phi} S_{\phi}$ 对于此特定的 ϕ 有其特
定的意义和表达形式, 这时的方程 (1-1) 亦赋予其特定的意义。
如当 $\phi = \vec{v}$, $\Gamma_{\phi} = \mu$, 此时方程即为动量方程。

在通用方程中, ϕ 与 ρ 同时出现, 因而还要联系到质量守恒方
程, 即连续性方程, 其形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1-2)$$

这实际上可以看作通用方程 $\phi = 1$ $\Gamma_{\phi} = 0$ $S_{\phi} = 0$ 时的特殊形
式。

对于上述方程, 在二维笛卡儿坐标下的表达式为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1-3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S_{\phi} \end{aligned} \quad (1-4)$$

~ 2 ~

$$A(|P|) = [0, (1 - \alpha_1 |P|)^5]$$

在以后各式中，我们略去下标 ϕ 。

非守恒格式

2. 通用方程的离散形式

对于笛卡尔坐标下二维的通用方程 (1-4)，可改为下列形式。

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (1-5)$$

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1-5a)$$

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1-5b)$$

对于上述方程分别进行离散，整理后其最后结果可用下式表示

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (1-6)$$

$$\text{其中: } a_E = D_e A(|P_e|) + (|F_e|, 0) \quad (1-6a)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + (|F_w|, 0) \quad (1-6b)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + (|F_n|, 0) \quad (1-6c)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + (|F_s|, 0) \quad (1-6d)$$

$$a_p^0 = \rho_p^0 \Delta x \Delta y / \Delta t \quad (1-6e)$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^c \quad (1-6f)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \quad (1-6g)$$

$$P = \frac{\Gamma}{D}$$

$$\Gamma = \rho u$$

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

$$\sim 3 \sim \delta x$$

$$Peclet = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

$$A(|P|) = 1 \quad \text{B. } \sim \text{Upwind.}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (1-7a, b, c, d)$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (1-8a, b, c, d)$$

Peclet 数 $Pe = \frac{F_e}{D_e}$

$$P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (1-9a, b, c, d)$$

A(p)可用下式表示

$$A(|p|) = [1 - Q_1 (1 - Q_1^{|p|})^5] \quad (1-10)$$

记号 $[|a=b|]$ 表示取 a, b 中较大者。

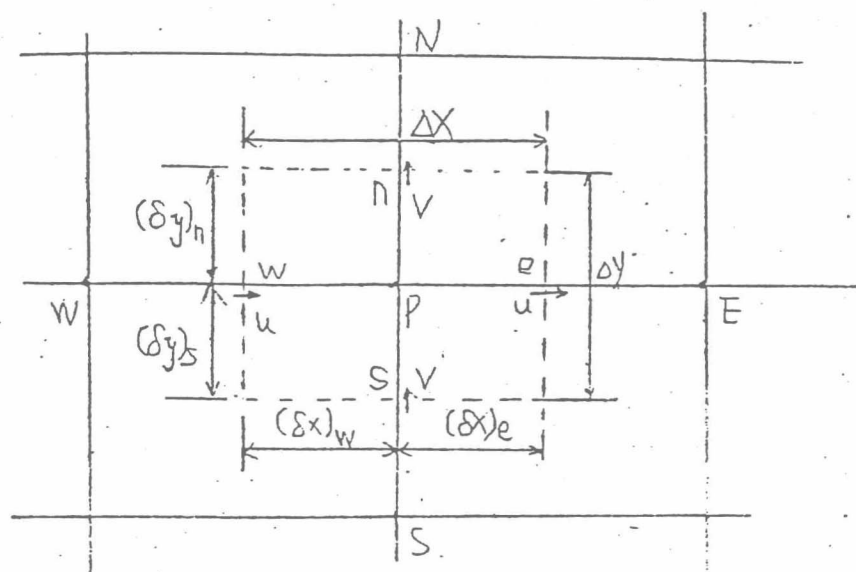
方程 (1-6) 亦可表示为下述形式

$$\text{即 } a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (1-11)$$

引入松弛因子 α , 方程表示为其松弛形式

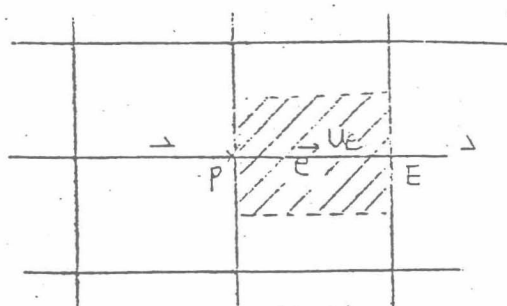
$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + (1-\alpha) \frac{a_p}{\alpha} \phi_p^* \quad (1-12)$$

其中 ϕ_p^* 为前次迭代的 ϕ_p 值

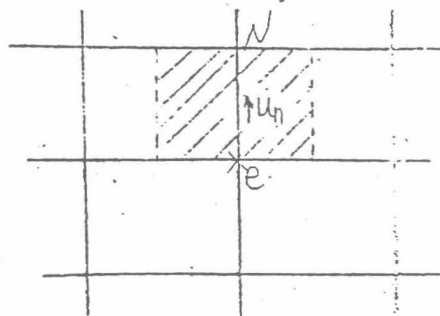


3. 动量方程

从通用方程 (1-1) 我们可以知道, 方程与速度 $\vec{v}$ 有关, 因此在求解许多问题的时候, 往往需要先求得速度场, 或者与速度场联合求解。虽然, 动量方程亦具有通用方程 (1-1) 的形式, 但其中压力场是我们所未知的, 需要特别处理。为了此引入另一种网格形式, 即交错网格或动量网格。这种网格比较有利于消除压力和速度的波动。



u 的动量网格



v 的动量网格

这种网格的优点是可以利用自然网格点的压力值差，来求得作用在动量控制体上的压力梯度。一旦自然网格点上的压力值已经求出，那么动量方程亦就容易求解了。利用动量网格，将动量方程离散后，我们可以得到

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_p - P_E) A_e \quad (1-13)$$

这里， A_e 是动量控制体， y 向上的面积， a_e 其形式相当于方程(1-6)的 a_p ， a_{nb} 的形式层与(1-6)中相同， b 中只是不包含压力梯度项，因为其已被分离出来了，其它形式边与(1-6)中相同。

同样我们还可以得到 v 向的动量方程为

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (P_p - P_N) A_n \quad (1-14)$$

类似，动量方程亦可有它的松弛形式，其形式为

$$\left(\frac{a_e}{\alpha}\right) u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) a_e u_e^* + A_e (P_p - P_E) \quad (1-15)$$

$$\left(\frac{a_n}{\alpha}\right) v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) a_n v_n^* + A_n (P_p - P_N) \quad (1-16)$$

4. 压力速度校正和压力校正方程

为了求解动量方程，我们必须先知边压力场，因而我们需要寻求一条求得压力场的途径，这一点通过利用连续性方程来实现。对于任一近似的压力值 P^* ，其真实的压力值可用下式表示

$$P = P^* + P' \quad (1-17)$$

这里 P' 就称为压力校正值，压力校正方程的主要目的就是要求得

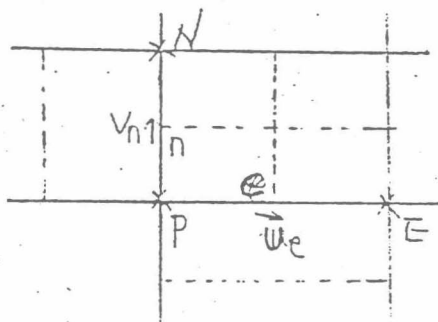
压力校正值 P' ，以得到压力场。

对于速度值，我们同样可以用近似值和校正值来表示，即所谓的速度校正公式：

$$u_e = u_e^0 + u_e' = u_e^0 + d_e (P_p' - P_z') \quad (1-18)$$

$$v_n = v_n^0 + v_n' = v_n^0 + d_n (P_p' - P_N') \quad (1-19)$$

$$\text{其中 } d_e = A_e / a_e \quad d_n = A_n / a_n \quad (1-20 \text{ a. b})$$



将连续性方程离散，并将压力校正与速度校正的公式代入，变换整理后，我们得到压力校正方程的表达式为：

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (1-21)$$

$$\text{其中: } a_E = \rho_e d_e \Delta y$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (1-22 \text{ a. b. c. d. e. f})$$

$$b = \frac{(\rho_p^0 - \rho_p) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y$$

$$+ [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x$$

~7~

§ 1-2 网格的划分及有关参数的确定

1. 网格的划分及网格参数的求法

图示区域, 长为 X_L , 宽为 Y_L , 用虚线划分成若干个控制体, 这些用虚线围成的控制体, 即为主控制体 (Main Control Volume), 控制体的中心点, 也就是图中实线的交界点, 即为自然网格点。自然网格点个数包括边界, 总数为 $L \times M$ 个。除 u_1 和 v_1 以外的其它参数均在这些网格点上求解。在自然网格点左右两侧虚实线交界处, 也即控制体左右边界的中心点, 即为 x 向速度 u 的分布点, u 速度点从左边界以 u_2 开始计数。在自然网格点的上下两侧虚实线交界处, 亦即控制体上下边界的中点, 即为 y 向速度 v 的分布点, v 速度点从下边界以 v_2 开始计数。

自然网格点, 包括边界点, 从左边界为 1 开始计数, 到右边界为 L , 从下边界为 1 开始计数到上边界为 M 。由此可知控制体个数为 $(L-1) \times (M-1)$ 个, 那么主控制体的宽度为 (假定控制体的大小相等)

$$\Delta x = X_L / (L - 1) \quad (2-1)$$

$$\Delta y = Y_L / (M - 1) \quad (2-2)$$

由于速度点正好位于主控制体的边界, 那么速度点的坐标 $X_U(I)$, $Y_V(J)$, (X_{u1}, Y_{v1}) , 可由下式确定。

$$x_{u2} = 0 \quad x_{u1} = x_{u2} + \sum \Delta x_i \quad (i=3, L) \quad (2-3)$$

$$y_{v2} = 0 \quad y_{vj} = y_{v2} + \sum \Delta y_j \quad (j=3, M) \quad (2-4)$$

对于自然网格点的位置, 我们亦可用下式求得, 因为我们已知速度点的坐标即为主控制边界的坐标。 $X(I)$, $Y(J)$ (x_i, y_j)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{u2} & y_1 &= y_{v2} \\ x_{L1} &= x_{uL1} & y_{L1} &= y_{vL1} \end{aligned} \quad (2-5a, b)$$

$$x_i = 0.5^{\circ} (x_{ui+1} + x_{ui}) \quad (2-6) \quad X(I)$$

$$y_j = 0.5^{\circ} (y_{vj+1} + y_{vj}) \quad (2-7) \quad Y(J)$$

自然网格点间的间距 $\underline{XDIF(I)}$, $\underline{YDIF(J)}$ (DX_i, DY_j) 分别为

$$DX_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=2, L1) \quad (2-8) \quad XDIF(I)$$

$$DY_j = y_j - y_{j-1} \quad (j=2, M1) \quad (2-9) \quad YDIF(J)$$

自然网格控制体的宽度 $\underline{XCV(I)}$, $\underline{YCV(J)}$ ($\Delta X_{\omega i}, \Delta Y_{\omega j}$) 为

$$\Delta X_{\omega i} = x_{ui+1} - x_{ui} \quad (i=2, L1) \quad (2-10) \quad XCV(I)$$

$$\Delta Y_{\omega j} = y_{vj+1} - y_{vj} \quad (j=2, M2) \quad (2-11) \quad YCV(J)$$

u 向动量网格控制体的宽度 $\underline{XCVS(I)}$ ($\Delta X_{s i}$)

$$\Delta X_{s3} = DX_3 + DX_2 \quad \Delta X_{sL2} = DX_{L2} + DX_{L1} \quad (2-12a, b)$$

$$\Delta X_{s1} = DX_1 \quad (i=4, LS) \quad (2-12c) \quad XCVS(I)$$

v 向动量网格控制体的宽度 $\underline{YCVS(J)}$ ($\Delta Y_{s j}$)

$$\Delta Y_{s3} = DY_3 + DY_2 \quad \Delta Y_{sM2} = DY_{sM2} + DY_{sM1} \quad (2-12'a, b)$$

$$\Delta Y_{s j} = DY_j \quad (j=4, MS) \quad (2-12'c) \quad YCVS(J)$$

自然网格点到, 控制体边界速度点处的间距 $\underline{XCVI(I)}$,

$\underline{XCVIP(I)}$, $((\delta X)_{wi} (\delta x)_{ei})$ 分别为:

$$XCVI(I)$$

$$XCVIP(I)$$

~ 9 ~

$$x_4 y_{I+1} - x_5 y_{\overline{I}}$$

$$XCVI$$

XCV ✓

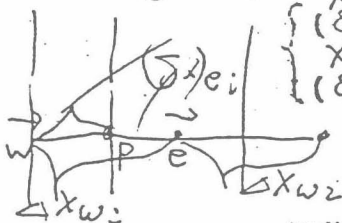
$$X \subset V_1(I).$$

Xc.VI.PCI

$$\begin{aligned} (\delta X)_e &\equiv (\delta X)_w \\ X_{CV} &= P \quad X_{CV}(2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2-13b) \\ (2-13e-d) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} (\delta x) e_2 = \Delta x_{w2} & (2-13e+u) \\ \chi_{CV}(L_2) & \chi_{CV}(L_2) \end{array}$$

$$(\delta X)_{\omega L_2} = \Delta X_{\omega L_2}$$



1カ乙

① I 的确定

$$r_e = \left(\frac{1-f_e}{r_p} + \frac{f_e}{r_E} \right)^{-1} \quad (2-14)$$

$$\begin{array}{c} |-(\delta x)_e^-| \quad |-(\delta x)_e^+| \\ \hline P \qquad c \qquad E \\ | \leftarrow (\delta x)_e \rightarrow | \end{array}$$

$$D_{\theta} = A_e \left\{ \frac{(\delta X)_e^-}{\Gamma_P} + \frac{(\delta X)_e^+}{\Gamma_E} \right\} - I$$

$$= A_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P (\delta X)_e^+ + \Gamma_E (\delta X)_e^-} \quad (2-15)$$

在计算中我们假定在整个控制体内 P 都是均匀的

$$f_e = \frac{(\delta X)_e^+}{(\delta X)_e} \quad (2-14a)$$

② ρ 的确定

在动量网格点上的 ρ 值通常也要通过插值求得，其插值过程可按如下法进行，

$$\begin{aligned} \rho_e &= f_e \rho_P + (1 - f_e) \rho_E \\ &= f'_e \rho_E + (1 - f'_e) \rho_P \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中
$$f_e = \frac{(\delta X)_e^+}{(\delta X)_e} \quad (2-16a)$$

$$f'_e = 1 - f_e = \frac{(\delta X)_e^-}{(\delta X)_e} \quad (2-16b)$$

因此对于速度点 $u_{i,j}$ 上的 ρ 值，可通过邻近点上的 ρ 值 $\rho_{i-1,j}$ 插值

$$\rho_{u_{i,j}} = f_{x_i} \rho_{i,j} + f_{xm_i} \rho_{i-1,j} \quad (2-17)$$

同样对速度点 $v_{i,j}$ 上的 ρ 值，亦有

$$\rho_{v_{i,j}} = f_{y_j} \rho_{i,j} + f_{ym_j} \rho_{i,j-1} \quad (2-18)$$

其中：
$$f_{x_i} = \frac{1}{2} \Delta X_{i-1} / \Delta X_i$$

$$f_{xm_i} = 1 - f_{x_i} \quad (i=3, L1)$$

$$f_{x_2} = 0 \quad f_{x_{L1}} = 1$$

$$f_{xm_2} = 1 \quad f_{xm_{L1}} = 0 \quad (2-17a, b, c, d, e, f)$$

$$\text{及: } f_{y_j} = \frac{1}{2} \Delta Y_{\omega_j - 1} / D Y_j$$

$$f_{ym_j} = 1 - f_{y_j}$$

$$f_{y_2} = 0 \quad f_{ym_1} = 1 \quad (2-18a, b, c, d, e, f)$$

$$f_{ym_2} = 1 \quad f_{ymM} = 0$$

③在给定主网格点处的质量流量 $\rho v r$ 时, 亦用类似的插值公式求

得,

$$F_{v_j}(\rho v r)_{i,j} + F_{vp_j}(\rho v r)_{i,j+1} \quad (2-19)$$

$$\text{其中, } F_{v_j} = (r \Delta Y)_{v,j} / (r \Delta Y)_{m,j} \quad (2-19a)$$

$$F_{vp_j} = 1 - F_{v_j} \quad (2-19b)$$

3. 方程的柱坐标、极坐标表达式及其变换关系

在柱坐标和极坐标中, 通用方程可分别表示为下列形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z \phi) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\Gamma_r \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S \quad (2-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \phi) \\ = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma}(\Gamma_r \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\Gamma}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + S \quad (2-21) \end{aligned}$$

这些方程同样可以离散为方程(1-3)的形式。分数 a_E, a_W, a_S, a_N 可用与(1-6)(a-d)中同样的表达式。对于 a_P, b, a_P 只可将 $\Delta x \Delta y$ 转换为相应的 ΔV 即可。

其中对于柱坐标

$$D_e = \frac{\Gamma_e \gamma_p \Delta r}{(\delta z)_e} \quad D_w = \frac{\Gamma_w \gamma_p \Delta r}{(\delta z)_w}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \gamma_s \Delta z}{(\delta \gamma)_s} \quad D_n = \frac{\Gamma_n \gamma_n \Delta z}{(\delta \gamma)_n} \quad (2-22a, b, c, d)$$

$$F_e = (\rho u)_e \gamma_p \Delta r \quad F_w = (\rho u)_w \gamma_p \Delta r$$

$$F_n = (\rho v)_n \gamma_p \Delta z \quad F_s = (\rho v)_s \gamma_p \Delta z \quad (2-23a, b, c, d)$$

对于极坐标

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta \gamma}{\gamma_e (\delta \theta)_e} \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta \gamma}{\gamma_w (\delta \theta)_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \gamma_n \Delta \theta}{(\delta \gamma)_n} \quad D_s = \frac{\Gamma_s \gamma_s \Delta \theta}{(\delta \gamma)_s}$$

(2-24 a, b, c, d)

$$F_e = (\rho u)_e \Delta \gamma \quad F_w = (\rho u)_w \Delta \gamma$$

$$F_n = (\rho v)_n \gamma_p \Delta \theta \quad F_s = (\rho v)_s \gamma_p \Delta \theta$$

(2-25 a, b, c, d)

$$\Delta V = 0.5 (\gamma_n + \gamma_s) \Delta \theta \Delta \gamma \quad (2-26)$$

对于各坐标系之间我们有以下对应关系

表 2 - 1

$X - Y$	$Y - Z$	$Y - \theta$
X	Z	θ
Y	Y	Y

综合柱坐标、极坐标及直角坐标各不同因素，为了增加程序的通用性，使其能适用于三种不同坐标。在 $a_E - a_N$ 等系数的表达式的实现过程中，需要引用适当的变换参数，以构成一统一的表达式。为了满足这些条件，对公式的表示作下列变换。

①在 F 等的表达式中引进 $R(J)$ (自然网格点处的半径值 r_j) 以及 $RMN(J)$ (动量网格点 v 的半径值 r_{vj})

②在 D 表达式中引用 $SX(J)$ (在自然网格点) 及 $SMN(J)$ (在动量网格点)。

③在 D 的表达式中，对于 j 向，采用 $\gamma \Delta y$ 代替 Δy ，即引进 $YCVF(J)$ (相对于主控制体的 $\gamma \Delta y$) 及 $YCVRS(J)$ (相对于 $v_{1,j}$ 控制体的 $\gamma \Delta y$)

④在主控制体中，法向为 X 向的表面面积用 $ARX(J)$ 表示，其中在 $v_{1,j}$ 控制体界面上的部分用 $ARXJ(J)$ 表示，在 $v_{1,j+1}$ 控制体界面上的部分用 $ARXJP(J)$ 表示。

对于各坐标之间这些参数的变换关系列于下表。