多元統計分析

习 题 选 解

吉林大学数学系选解编写组

一九八二年七月

前　言

本选解是我们在学习多元统计分析的过程中积累起来的。其中大部分习题选自Giri.N.C“多元统计推断”一书，同时还选了一些Anderson，T.W.“多元统计分析引论”及其它一些书上的习题，另外也有少量自编习题。我们选编习题的指导思想是希望通过解题加深对基本理论的理解，并作为对基本内容的补充。所选的题目绝大部分是和理论部分联系较密切的，有的章也选了一、二个实际计算习题，目的是熟悉基本理论的应用。

每章前面都编写了一个基本概念和主要定理的提要，目的是使全书有一个统一的叙述和记号，以便解题时引用。对于题要中的内容，读者觉得有必要进一步查对时，可参看本书后面所列的有关参考书。一些题目后面编有注释，主要是对一些有代表性的解题方法作进一步的说明，以利于掌握，也有些注释是对解题过程中所用的简单事实进行补充说明。

在选解的编写过程中，我们看到了江西师院倪国熙同志所作的Giri.N.C一书中3—6章部分习题，这使我们的题解质量有所提高，本《选解》得以成书，也与成都地院数学地质专业王伯钧等同志大力协助分不开，在此向上述等同志一并表示感谢。

本选解由郭大伟、姜诗章、赵文、赵振全四同志编写，并经周光亚同志统一审校。由于我们的水平所限，时间匆促，所选的题目难免有挂一漏万之嫌，并且解法中亦一定会有错误和欠缺之处，我们诚恳地欢迎读者阅后能无保留地给予批评指正。

编　者

1981年9月

目　　录

第一章 矩 阵

1. 基本概念

i) 以下用μ (m,n) 表示所有$m\times n$阶矩阵的集合。对于$A\varepsilon\mu(m,n)$，用 rk(A) 表示A的秩数。秩数等于列数的矩阵A称为高矩阵。对于高矩阵来说，显然行数≥列数。

ii) 对于方阵$A=(a_{ij})\varepsilon\mu(p,p)$，称$t_rA=\sum_{i=1}^{p}a_{ii}$为它的迹，显然

$$t_r(A+B)=t_rA+t_rB,\quad t_rAB=t_rBA$$

iii) 一方阵A，若满足$A=A'$，则称其为对称阵。一复的方阵A，若满足$A=A^*$（共轭转置），则称为Hermite阵。一对称（Hermite）阵A，称为是正定的或非负定的，若对任意向量（复向量）X满足$X'AX>0$或$\geqslant 0$（$X^*AX>0$或$\geqslant 0$）。

iV) 一方阵A，称为正交阵，若$A'A=I$。此时也满足$AA'=I$，并且$|A|=I$。一复方阵A，称为酉矩阵，若$A^*A=I$。此时也满足$AA^*=I$。

V) 对一方阵A，称$f(\lambda)=|\lambda I-A|$为A的特征多项式，称$f(\lambda)$的根为A的特征根。

a) 若$A\varepsilon\mu(P,P)$的特征根为$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_P$，则：

$$t_rA=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i,\qquad |A|=\prod_{i=1}^{p}\lambda_i$$

b) 若$A,B\varepsilon\mu(p,p)$，则AB与BA有相同的特征根。

c) 若AB是方阵，则AB与BA有相同的非零特征根。

Vi) 设$A=(a_{ij})\varepsilon\mu(m,n)$，$B=(b_{ij})\varepsilon\mu(p,q)$，则Kronecker 乘积$A\otimes B=(a_{ij}B)$，是一个$mp\times nq$阶矩阵。若表为分块阵，其第（i,j）块为$a_{ij}B,i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$。它还有如下性质：

a) $(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$

b) $A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$

c) $aA\otimes bB=abA\otimes B$

d) $A_1A_2\otimes B_1B_2=(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$

e) $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$ （若这些逆矩阵存在）。

f) $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$)

g) $(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=I$)

2. 矩阵的分解

i) 对任意的$A\varepsilon\mu(m,n)$，若$rk(A)=r$,则存在非奇异阵$P\varepsilon\mu(m,m)$，$Q\varepsilon\mu(n,n)$，

使$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$。

由此进而可知存在$F\varepsilon\mu(m,r)$，$G\varepsilon\mu(n,r)$，使$A=FG'$。

显然$rk(F)=rk(G)=r$，故F，G都是高矩阵。

对任意高矩阵G，$rk(G)=r$，存在高矩阵K，使得$K'G=I_r$。

ii） 对任意的方阵A，存在非奇异阵P，使A化为Jordan标准型，即：

$A=Pd_{iag}(J_1,\cdots\cdots,J_k)P^{-1}$其中：

$$d_{iag}(J_1,\cdots\cdots,J_k)=\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix},\qquad J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1\cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots\lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

λ_i，$i=1,\cdots\cdots,k$是A的特征根。

iii）三角分解

a） 三角正交分解，设$A\varepsilon\mu(p,n)$（$p\leqslant n$），则存在具有正对角元的p阶下（或上）三角阵T（即$t_{ij}=0$，$i<j$）和$S\varepsilon\mu(p,n)$满足$SS'=I$，使$A=TS$。

b） 设A为对称正定阵，则存在下（或上）三角阵T，使$A=TT'$。特别，T可取为是具有正对角元的，而且这样的T是唯一的。

iV） 对称阵A（p阶的）有以下性质：

a） 存在正交阵Q，使$A=Q\Lambda Q'$，$\Lambda=d_{iag}(\lambda_1\cdots\cdots,\lambda_p)$。

其中$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_p$是A的特征根，它们都是实的。

b） 不同特征根对应的特征向量正交。

c）存在非奇异阵P，使$A=Pd_{iag}(I_r,-I_s,0)P'$。

其中$r+s=rk(A)$。

V） 设A为对称阵，则以下各命题等价：

a） A正定（非负定）；

b） 存在非奇异阵（高矩阵）Q'，使得$A=Q'Q$；

c） A的所有主子式都大于（大于等于）零；

d） A的所有特征根都大于（大于等于）零。

Vi）设A，B都是p阶对称阵，而B还是正定的，则存在非奇异阵Q，使

$A=Q'd_{iag}(\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_p)Q$，$B=Q'Q$

其中$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_p$是$|A-\lambda B|=0$的根，亦即$AB^{-1}$的特征根。

Vii）Hermite阵A（p阶的）有以下性质：

a） 存在酉矩阵U，使$A=Ud_{iag}(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_p)U^*$。

其中$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_p$是A的特征根，它们都是实的。

b） 如B为另一p阶正定Hermite阵，则存在非奇异阵Q，使

$$A = Q^* d_{iag}(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_p)\ Q,\quad B = Q^*Q$$

其中$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_p$是$AB^{-1}$的特征根。

Viii）奇值分解。对任意的$A \varepsilon \mu(m,n)$，$rk(A)=r$，存在m阶酉矩阵U和n阶酉矩阵V，使$A = U\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$，$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_r \end{pmatrix}$

其中$\lambda_i > 0$，而λ_i^2，$i=1, \cdots\cdots, r$是AA^*的非零特征根。

3. 矩阵的分块

以下设方阵A被分块为：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中A_{11}和A_{22}都是方阵，而且都是非奇异的。

i）行列式公式：

$$|A| = |A_{11}|\ |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = |A_{22}|\ |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$$

ii）求逆公式：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22\cdot1}^{-1} \\ -A_{22\cdot1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22\cdot1}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11\cdot2}^{-1} & -A_{11\cdot2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot2}^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}A_{11\cdot2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11\cdot2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$，　$A_{22\cdot1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

iii）反演公式：

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}$$

4. 有关矩阵的微分法

i）设$A = (a_{ij})$为一方阵，则：

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = A_{ii},\quad \frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = \begin{cases} A_{ij} & \text{当A非对称时} \\ 2A_{ij} & \text{当A对称时} \end{cases}$$

其中　A_{ij}表示A的第i行j列元素的代数余子式。

ii）设$A=(a_{ij})$的元素是变量x的函数，定义 $\frac{\partial A}{\partial x}=\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}\right)$。则有：

$$\frac{\partial}{\partial x}(A+B)=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial x}，\quad \frac{\partial}{\partial x}(AB)=\frac{\partial A}{\partial x}B+A\frac{\partial B}{\partial x}$$

iii）以下用X,Y,Z表示向量，用A,B,C表示矩阵。对于向量$X=(x_1,\cdots\cdots x_p)'$的函数f(X)，定义$\frac{\partial f(X)}{\partial X}=\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\cdots\cdots,\frac{\partial f(X)}{\partial x_p}\right)'$，对于矩阵$B=(b_{ij})$的函数f(B)，定义$\frac{\partial f(B)}{\partial B}=\left(\frac{\partial f(B)}{\partial b_{ij}}\right)$则有以下常用的公式：

a) $\frac{\partial}{\partial x}(Y'X)=Y$

b) $\frac{\partial}{\partial x}(X'X)=2X$

c) $\frac{\partial}{\partial x}(X'AZ)=AZ$

d) $\frac{\partial}{\partial x}(X'AX)=2AX$　（其中A是对称阵）

e) $\frac{\partial}{\partial B}(Y'BZ)=YZ'$

f) $\frac{\partial}{\partial B}(t_r B)=I$

g) $\frac{\partial}{\partial B}(X'BX)=\begin{cases}XX' & \text{当B非对称时}\\ 2XX'-d_{iag}XX' & \text{当B对称时}\end{cases}$

h) $\frac{\partial|B|}{\partial B}=\begin{cases}|B|(B^{-1})' & \text{当B非对称时}\\ |B|(2B^{-1}-d_{iag}B^{-1}) & \text{当B对称时}\end{cases}$

i) $\frac{\partial}{\partial B}(t_r BC)=\begin{cases}C' & \text{当B非对称时}\\ C+C'-d_{iag}C & \text{当B对称时}\end{cases}$

j) $\frac{\partial}{\partial B}(t_r BCBD)=\begin{cases}T' & \text{当B非对称时}\\ T+T'-d_{iag}T & \text{当B对称时}\end{cases}$

其中　$T=DBC+CBD$

5. 某些变换的Jacobi行列式

设$y_i=f_i(x_1,\cdots\cdots,x_p)$，$i=1,\cdots\cdots,p$,这确定了一个变换$(x_1,\cdots,x_p)\to(y_1,\cdots y_p)$,

定义此变换的Jacobi行列式为：

$$\frac{\partial(y_1,\cdots\cdots,y_p)}{\partial(x_1,\cdots\cdots,x_p)}=\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_{PXP}$$

当矩阵Y的元素都是同阶矩阵X的函数时，变换X→Y的Jacobi行列式也记以$\frac{\partial Y}{\partial X}$，今将一些常用的变换的Jacobi行列式列表如下：

变　　换	条　　　　件	Jacobi行列式
$X\to AX$	$X\varepsilon\mu(p,n)$，$A\varepsilon\mu(p,p)$	$\|A\|^{n}$
$X\to XB$	$X\varepsilon\mu(p,n)$，$B\varepsilon\mu(n,n)$	$\|B\|^{p}$
$X\to AXB$	$X\varepsilon\mu(p,q)$，$A\varepsilon\mu(p,p)$，$B\varepsilon\mu(q,q)$	$\|A\|^{q}\|B\|^{p}$
$B\to S=BB'$	$B=(b_{ij})$是p阶正对角元下三角阵	$2^p\prod_{j=1}^{p}b_{jj}^{p+1-j}$
$G\to HG$	$G,H\varepsilon G_T$	$\prod_{i=1}^{p}h_{ii}^{i}$
	$G,H\varepsilon G_{UT}$	$\prod_{i=1}^{p}h_{ii}^{p+1-i}$
	$G,H\varepsilon G_{BT}$	$\prod_{i=1}^{k}\|H_{ii}\|^{\sigma_i}$
	$G,H\varepsilon G_{BUT}$	$\prod_{i=1}^{k}\|H_{ii}\|^{p-\sigma_{i-1}}$
$G\to GH$	$G,H\varepsilon G_T$	$\prod_{i=1}^{p}h_{ii}^{p+1-i}$
	$G,H\varepsilon G_{UT}$	$\prod_{i=1}^{p}h_{ii}^{i}$
	$G,H\varepsilon G_{BT}$	$\prod_{i=1}^{k}\|H_{ii}\|^{p-a_{i-1}}$
	$G,H\varepsilon G_{BUT}$	$\prod_{i=1}^{k}\|H_{ii}\|^{\sigma_i}$
$S\to CSC'$	$S,C\varepsilon\mu(p,p)$，C非奇异　S对称	$\|C\|^{p+1}$
	S非对称	$\|C\|^{2p}$

G_T表示p阶非奇异下三角阵的集合。

G_{UT}表示p阶非奇异上三角阵的集合。

G_{BT}表示p阶非奇异分块下三角阵

$$G=\begin{pmatrix} G_{11} & O\cdots\cdots O \\ G_{21} & G_{22}\cdots\cdots O \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ G_{K2} & G_{K2}\cdots\cdots G_{KK} \end{pmatrix}$$

的集合，其中$G_{ij}\varepsilon\mu$ $(d_i,\ d_j)$，$\sum\limits_{j=1}^{k} d_i=p$，$\sigma_i=\sum\limits_{j=1}^{i} d_j$，$\sigma_0=o$，

G_{BUT}表示与上面类似的p阶非奇异分块上三角阵的集合。

习　　题

1. 试证：对于v^p（p维向量空间）中任意k（≤p）个线性无关的向量$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$，必可通过正交标准化手续求得相互正交的单位向量$\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_k$使之成为$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$所张成的子空间的标准正交基。

证：首先将α_1标准化取为γ_1，即$\gamma_1=\alpha_1/\|\alpha_1\|$。

为选取γ_2，先令$\gamma_2^*=\alpha_2-a_{21}\gamma_1$。要使$\gamma_2^*$正交于$\gamma_1$，应有：

$$o=\gamma_1'\gamma_2^*=\gamma_1'\alpha_2-a_{21}\gamma_1'\gamma_1=\gamma_1'\alpha_2-a_{21}$$

因此$a_{21}=\gamma_1'\alpha_2$。再令$\gamma_2=\gamma_2^*/\|\gamma_2^*\|$，则$\gamma_2$是单位向量而且正交于$\gamma_1$。一般地，假定$\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_{j-1}$已经取好，我们令

$$\gamma_j^*=\alpha_j-a_{j1}\gamma_1-\cdots\cdots-a_{jj-1}\gamma_{j-1}$$

显然$\gamma_j^*\neq 0$，否则将导致$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_j$线性相关。要使$\gamma_j^*$与$\gamma_{i},_{i-1},\cdots\cdots,_{j-1}$正交，应有

$$o=\gamma_i'\gamma_j^*=\gamma_i'\alpha_j-a_{ji},\ i=1,\cdots\cdots,j-1\text{因此}$$

$$a_{ji}=\gamma_i'\alpha_j,\ i=1,\cdots\cdots,j-1\text{再令}$$

$$\gamma_j=\gamma_j^*/\|\gamma_j^*\|$$

则γ_j是单位向量并正交于$\gamma_1,\cdots\cdots\gamma_{j-1}$。如此继续下去，最后得到的$\gamma_1,\cdots\cdots\gamma_k$即是所求。

注：从上面的正交化手续可知$\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_k$与$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$之间的关系是：

$$\gamma_i=C_{1i}\alpha_1+\cdots\cdots+C_{ii}\alpha_i,\ i=1,\cdots\cdots,k$$

且其中$C_{ii}>0$，当$k=p$时，记$R=(\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_p)$，$A=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_p)$，$C=(C_{ij})$，则上面一些等式可以写成$R=AC$

这表明对任一非奇异阵A，存在正对角元上三角阵C使AC＝R成为正交阵。如记

$D=C^{-1}$，则D仍是正对角元上三角阵。于是有$A=DR$这就是A的三角正交分解。

2. $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots\cdots,\gamma_k)$是$v^p$的子空间$v^k$的标准正交基，试证其能扩充成$v^p$的标准正交基$(\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_k,\gamma_{k+1},\cdots\cdots,\gamma_p)$。

证： 设$\gamma_i=(a_{i1},\cdots\cdots,a_{ip})$ $i=1,2,\cdots\cdots,k$。由于$k<p$，于是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots\cdots a_{kp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}=0$$

必有非零解γ^*_{k+1}。记

$$\gamma_{k+1}=\gamma^*_{k+1}/\|\gamma^*_{k+1}\|=(a_{k+1,1},\cdots\cdots,a_{k+1,p}),$$

若$k+1<p$，则：

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1p} \\ a_{21}\cdots\cdots\cdots a_{2p} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k+1,1}\cdots\cdots a_{k+1,p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}=0$$

必有非零解γ^*_{k+2}，仿上，一直做下去，便得到v^p的标准正交基：

$$(\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_k,\gamma_{k+1},\cdots\cdots,\gamma_p)$$

注： 本题表明：任一$p\times k$阶矩阵$R_1(k<p)$，若满足$R_1'R_1=I_k$，则必存在$p\times(p-k)$阶矩阵R_2使$R=(R_1,R_2)$成为正交阵。

3. 对v^p中任意二向量x，y，试证：

a) Schwarz不等式 $|x'y|\leqslant\|x\|\|y\|$

b) 三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

证： 对任意实数λ

$$0\leqslant\|x+\lambda y\|^2=(x+\lambda y)'(x+\lambda y)$$
$$=x'x+2\lambda x'y+\lambda^2y'y=\lambda^2\|y\|^2+2\lambda x'y+\|x\|^2$$

上式是关于λ的二次三项式，其恒大于等于零，故判别式

$$[2(x'y)]^2-4\|x\|^2\|y\|^2\leqslant 0 \text{ 即}$$
$$|x'y|\leqslant\|x\|\|y\|。$$

上式等号成立，仅当$x+\lambda y=0$，即当x与y有线性关系时，等式成立。

而对第二个不等式，由

$$\|x+y\|^2=(x+y)'(x+y)=\|x\|^2+2x'y+\|y\|^2$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2 \text{即知。}$$

4. 设A是任一p×p阶非奇异阵，且X，y是两非零向量，试证：

$$(A+yX')^{-1}=A^{-1}-\frac{(A^{-1}X)(y'A^{-1})}{1+y'A^{-1}X}$$

（只要 $1+y'A^{-1}X\neq 0$）。

证法1：直接验证等式右端是 $A+Xy'$ 的逆：

$$\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}Xy'A^{-1}}{1+y'A^{-1}X}\right)(A+Xy')=I+A^{-1}Xy'-\frac{A^{-1}Xy'+A^{-1}Xy'A^{-1}Xy'}{1+y'A^{-1}X}$$

$$=I+A^{-1}Xy'-\frac{A^{-1}Xy'\ (1+y'A^{-1}X)}{1+y'A^{-1}X}=I$$

（注意 $y'A^{-1}X$ 是数）

证法2：对分块阵 $\begin{pmatrix}A & -X\\ y' & I\end{pmatrix}$ 使用反演公式便得：

$$(A+Xy')^{-1}=A^{-1}-A^{-1}X\ (1+y'A^{-1}X)^{-1}y'A^{-1}=A^{-1}-\frac{(A^{-1}X)(y'A^{-1})}{1+y'A^{-1}X}$$

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} J_p & J_p & 0\cdots\cdots 0 & I_p\\ J_p & 0 & J_p \quad \vdots & I_p\\ \vdots & & \ddots \quad \vdots & \vdots\\ J_p & 0\cdots\cdots & J_p & I_p\end{pmatrix}$$

其中 I_p 是单位矩阵，J_p 是分量均有1的p维向量，试证 $rk(A)=p+q-1$。

证：显然A的前两列与后 $p+q-1$ 列线性相关，记A的后 $p+q-1$ 列为 $B\varepsilon\mu(pq,p+q-1)$，则

$$B=\begin{pmatrix} 0\cdots\cdots 0 & I_p\\ J_p\cdots\cdots 0 & I_p\\ \vdots \quad \ddots & \vdots\\ 0 \quad\quad J_p & I_p\end{pmatrix}$$

而

$$B'B=\begin{pmatrix} pI_{q-1} & J_{q-1}J_p'\\ J_pJ'_{q-1} & qI_p\end{pmatrix}$$

于是由分块矩阵的行列式公式可知：

$$|B'B|=|qI_p|\cdot|pI_{q-1}-J_{q-1}J_p'\tfrac{1}{q}I_pJ_pJ_{q-1}|$$

$$=q^pp^{q-1}q^{-(q-1)}\ |qI_{q-1}-J_{q-1}J'_{q-1}|=q^pp^{q-1}\cdot q^{1-q}\cdot q^{q-2}=q^{p-1}p^{q-1}>0$$ 故

$rk(A)=rk(B)=(B'B)=p+q-1$

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1q} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots\cdots a_{pq} \end{pmatrix}$$

满足对任意i，$r=1,\cdots\cdots,p$；$j,s=1,\cdots\cdots,q$，　$a_{ij}+a_{rs}-a_{is}-a_{rj}=0$

试证　$a_{ij}=a_i+b_j$，$i=1,\cdots\cdots,p$；$j=1,\cdots\cdots,q$。

证：对q用归纳法证之。当$q=1$时显然为真。假若$q=k$时结论成立，而对$q=k+1$时，满足

$a_{ij}+a_{rs}-a_{is}-a_{rj}=0$，$i,r=1,\cdots\cdots,p$；$j,s=1,\cdots\cdots,k+1$。自然限制$j,s\leqslant k$时上式亦成立。由归纳法假设

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots\cdots a_{pk} & a_{p,k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1\cdots\cdots & a_1+b_k & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p+b_1\cdots\cdots & a_p+b_k & a_{p,k+1} \end{pmatrix}$$

令　$b_{k+1}=a_{1,k+1}-a_1$，即　$a_{1,k+1}=a_1+b_{k+1}$，则对$i=2,\cdots\cdots,p$，$j\leqslant k$，由假设知有$a_{i,k+1}+a_{1j}=a_{ij}+a_{1,k+1}$。从而

$$\begin{aligned} a_{i,k+1}&=a_{ij}+a_{1,k+1}-a_{1j}=a_i+b_j+a_1+b_{k+1}-a_1-b_j \\ &=a_i+b_{k+1},\quad i=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

即　$q=k+1$时命题亦真，本题得证。

7. 设$A\varepsilon\mu\ (p,q)$，$B\varepsilon\mu\ (q,p)$则AB与BA的非零特征根相同。

证法1：不妨设$p\geqslant q$，注意到

$$\begin{vmatrix} \lambda I_p & A \\ B & I_q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda I_q & A \\ B & I_q \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_p & O \\ -B & I_q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda I_p-AB & A \\ O & I_q \end{vmatrix}$$

$$=|\lambda I_p-AB|\text{同理可知}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_q & B \\ A & I_p \end{vmatrix}=|\lambda I_q-AB|，\text{而}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_p & A \\ B & I_q \end{vmatrix}=\lambda^p\begin{vmatrix} I_p & A \\ \frac{1}{\lambda}B & I_q \end{vmatrix}=\lambda^{p-q}\begin{vmatrix} I_p & A \\ B & \lambda I_q \end{vmatrix}=\lambda^{p-q}\begin{vmatrix} \lambda I_q & B \\ A & I_p \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{p-q}|\lambda I_q-BA|$$

可见AB与BA之非零特征根相同。

证法2：设$\lambda\neq 0$是AB的特征根，$x\neq 0$为对应的特征向量，则有$ABX=\lambda X$，左乘以B，得$BA\ (BX)=\lambda\ (BX)$。由于$BX\neq 0$（否则$\lambda X=0$），可见λ也是BA的特征根。同理可证其逆。

8. 设$X\varepsilon\mu(p,q)$，$S\varepsilon\mu(p,p)$，试证

$$|XX'+S| = |S|\,|I+X'S^{-1}X|$$

证法1：设$A\varepsilon\mu(p,q)$，$B\varepsilon\mu(q,p)$ 由上题证法1。

$$(-1)^p|AB-\lambda I| = |\lambda I-AB| = \lambda^{p-q}|\lambda I-BA| = (-1)^q\lambda^{p-q}|BA-\lambda I|$$

由于这是关于λ的多项式的一个恒等式，故当取$\lambda=-1$时，有

$$(-1)^p|AB+I| = (-1)^q(-1)^{p-q}|BA+I|，即$$

$$|AB+I| = |BA+I|$$

取$X=A$，$X'S^{-1}=B$ 则

$$|XX'S^{-1}+I| = |X'S^{-1}X+I|，从而$$

$$|XX'+S| = |S|\,|I+X'S^{-1}X|。$$

证法2：对$\begin{pmatrix} S & -X \\ X' & I \end{pmatrix}$使用分块矩阵的行列式公式即可得证。

9. 设n阶方阵A正定，B非负定，试证AB的特征根非负。

证法1：由题设，存在非奇异阵D使$A=DD'$，于是$AB=DD'B$。又$DD'B$与$D'BD$有相同的特征根，而$D'BD$是非负定阵，从而特征根非负，故$AB=DD'B$之特征根非负。

证法2：设λ是AB的任意特征根，η是相应的特征向量，即$AB\eta=\lambda\eta$。由A正定，存在非零向量ξ，使$\eta=A\xi$。于是$ABA\xi=\lambda A\xi$，从而$\xi'ABA\xi=\lambda\xi'A\xi$，即

$$\lambda=\frac{\xi'ABA\xi}{\xi'A\xi}\geqslant 0$$

注：AB不一定是非负定。另外当B也为正定阵时，上述两个证明均表明AB之特征根大于零。

10. 设A是$p\times p$阶非奇异矩阵，D，D^*都是$p\times p$阶正定阵，且D^*-D是半正定阵，试证

a) $chi(ADA')\leqslant chi(AD^*A)$，$i=1,\cdots\cdots p$

b) 若D，D^*还是对角阵，则有$chi(DAD)\leq chi(D^*AD^*)$

这里$chi(X)$表示矩阵X的第i大特征根。

证a：设$\lambda_1\geqslant\cdots\cdots\geqslant\lambda_p$是$ADA'$的特征根，$\lambda_1^*\geqslant\cdots\cdots\geqslant\lambda_p^*$是$AD^*A'$的特征根。因为

$$\sup_{x\neq o}\frac{X'ADA'X}{X'X}=\lambda_1, \qquad \sup_{x\neq o}\frac{X'AD^*A'X}{X'X}=\lambda_1^*\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\inf_{x\neq o}\frac{X'ADAX}{X'X}=\lambda_p, \qquad \inf_{x\neq o}\frac{X'AD^*A'X}{X'X}=\lambda_p^*\cdots\cdots(2)$$

且对$B\varepsilon\mu(p,q)$有

$$\inf_{b}\ \sup_{b'x=o}\ \frac{X'ADA'X}{X'X}=\lambda_{k+1},$$

$$\inf_{b}\ \sup_{b'x=o}\ \frac{X'AD^*A'X}{X'X}=\lambda^*_{k+1}$$

$k=1$，……$p-1$。（3）

由于D^*-D是半正定阵，故

$$X'AD^*A'X-X'ADA'X=X'A(D^*-D)A'X\geqslant 0$$

这样，由上面的（1）、（2）、（3）式，我们就可得到

$$\mathrm{chi}(ADA')\leqslant \mathrm{chi}(AD^*A')\qquad i=1\cdots\cdots,\ p$$

证b：由D，D^*是正定对角阵知DD，D^*D^*都是正定对角阵，并由D^*-D是半正定阵知D^*D^*-DD也是半正定阵。又由于A是正定阵，故存在非奇异阵B使$A=B'B$。这样由上面知

$$\mathrm{chi}(BDDB')\leqslant \mathrm{chi}(BD^*D^*B')\ \text{而}$$

$$\mathrm{chi}(BDDB')=\mathrm{chi}(DDB'B)=\mathrm{chi}(DDA)=\mathrm{chi}(DAD)$$

同理

$$\mathrm{chi}(BD^*D^*B)=\mathrm{chi}(D^*AD^*)\ \text{这样}$$

$$\mathrm{chi}(DAD)\leqslant \mathrm{chi}(D^*AD^*)\ 。$$

注：（1）、（2）、（3）的详细证明可参看Rao“线性统计推断及其应用”第二版。

11. 设A是n阶正定阵，$X=(x_1\cdots\cdots x_n)'$试证

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{it'X-\frac{1}{2}A'AX}dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|A|}}e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t}$$

$$e_{ij}=\int\cdots\cdots\int_{x'a\leqslant c^2}xi\ xj\,dx_1\cdots\cdots dx_n=\frac{c^{n+2}\ \pi^{n/2}\ a^*_{ij}}{(n+2)\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{|A|}}$$

这里a^*_{ij}是A^-之i行j列元素。

证：由$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$，知

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{2}hy^2}dy=\sqrt{2\pi/h}\qquad(1)$$

将上式的h视作参变量，对h求p次导数得

$$\int_{-\infty}^{\infty}y^{2p}e^{-\frac{1}{2}hy^2}dy=\frac{(2p)!}{2^p\cdot p!}\sqrt{2\pi}h^{-p-\frac{1}{2}}\qquad(2)$$

又 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity-\frac{1}{2}hy^2}dy = \sum_{p=o}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(ity)^p}{p!}e^{-\frac{1}{2}hy^2}dy$$

由奇函数在对称区间上积分值为零及（1）式知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity-\frac{1}{2}hy^2}dy = \sum_{p=o}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(it)^{2p}}{(2p)!}y^{2p}e^{-\frac{1}{2}hy^2}dy$$

$$=\sum_{p=o}^{\infty}\frac{(it)^{2p}}{(2p)!}\ \frac{(2p)!}{2p\cdot p!}\sqrt{2\pi}h^{-p-\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi/h}\sum_{p=o}^{\infty}\left(\frac{-t^2}{2h}\right)^p\frac{1}{p!}$$

$$=\sqrt{2\pi/h}\ e^{-t^2/(2h)}$$

令$h=1$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity-\frac{1}{2}y^2}dy=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (3)$$

由于A正定，知存在非奇异阵C，使$A=C'C$。令$CX=Y$，变换行列式为

$$|C^{-1}| = |A|^{-\frac{1}{2}}$$

记$l'=t'C^{-1}$，于是由（3）

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|A|^{-\frac{1}{2}}e^{il'y-\frac{1}{2}y'y}dy_1\cdots\cdots dy_n$$

$$=|A|^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{il_jy_j-\frac{1}{2}y_j^2}dy_j$$

$$=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|A|}}\sum_{j=1}^{n}e^{-\frac{l_j^2}{2}}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{A}}e^{-\frac{1}{2}l'l}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|A|}}e^{-\frac{1}{2}t'A^{-1}t}$$

为证第二个等式，令$A=c^2B$，显然B正定，故存在D使$D'D=B$。再令$Y=DX$，$D^*=D^{-1}=(d_{ij}^*)$，$B^*=B^{-1}(b_{ij}^*)$，则有

$$e_{ij}=\int\cdots\cdots\int_{x'ax\leqslant c^2}x_ix_j\ dx_1\cdots\cdots dx_n$$

$$=|D|^{-1}\int\cdots\cdots\int_{y'y\leqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}d_{ik}^*y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}d_{ik}^*y_k\right)dy_1\cdots\cdots dy_n$$

$$=|D|^{-1}\sum_{k=1}^{n} d_{ik}^{*}d_{ih}^{*}\int\cdots\int_{y'y\leqslant 1} y_{jk}^{2}\,dy_1\cdots\cdots dy_n$$

$$=|D|^{-1}b_{ij}^{*}\int\cdots\int_{y'y\leqslant 1} y_{1}^{2}dy_1\cdots\cdots dy_n。$$

而$|D|^{-1}=|B|^{-\frac{1}{2}}=(c^{2n})^{-\frac{1}{2}}|A|^{-\frac{1}{2}}=\frac{c^n}{\sqrt{|A|}}$，$b_{ij}^{*}=c^2a_{ij}^{*}$，故

$$e_{ij}=c^{n+2}\frac{1}{\sqrt{|A|}}a_{ij}^{*}\int\cdots\int_{y'y\leqslant 1} y_{1}^{2}dy_1\cdots\cdots dy_n$$

令$y_1=\cos\varphi_1$，$y_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$，……，$y_n=\sin\varphi_1\cdots\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n$这时积分区域$y'y\leqslant 1$变为

$0<\varphi_i<\pi$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$

变换行列式为$(-1)^n\sin^n\varphi_1\sin^{n-1}\varphi_2\cdots\cdots\sin\varphi_n$，而

$$\int_0^{\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\right]^{-1}\sqrt{\pi},$$

于是

$$\int\cdots\int_{y'y\leqslant 1} y_1^2\,dy_1\cdots\cdots dy_n=\int_0^{\pi}\sin^n\varphi_1\cos^2\varphi_1 d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin^{n-1}\varphi_2\,d\varphi_2\cdots\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_n\,d\varphi_n$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\varphi_1 d\varphi_1\cdots\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_n d\varphi_n-\int_0^{\pi}\sin^{n+3}\varphi_1 d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin^{n-1}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_n\,d\varphi_n$$

$$=\pi^{n/2}\frac{1}{(n+2)\Gamma(n+2/2)}$$

故

$$e_{ij}=\frac{c^{n+2}\pi^{n/2}a_{ij}^{*}}{(n+2)\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{|A|}}$$

注：利用第三章习题18引入的Liou ville公式，容易计算$\int\cdots\int_{y'y\leqslant 1} y_1^2\,dy_1\cdots d\,y_n$

12. 设A，B是两个P阶的正定阵，试证对$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，恒有

$|\alpha A+(1-\alpha)B|\geqslant|A|^{\alpha}|B|^{1-\alpha}$

证：由题设存在非奇异阵E，使得$EAE'=I$。而EBE'是正定阵，故存在正交阵F，

使$FEBE'F'=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_p)$，显然$\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots\cdots,p$。令$FE=G$，于是$|G|=|E|$，$|A|=|E|^{-2}$。而

$$|G|^2|\alpha A+(1-\alpha)B|=|\alpha GAG'+(1-\alpha)GBG'|$$

$$=|\alpha I+(1-\alpha)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_p)|=\prod_{i=1}^{p}(\alpha+(1-\alpha)\lambda_i$$

因此利用熟知的初等不等式

$|a|^{\alpha}|b|^{1-\alpha}\leqslant\alpha|a|+(1-\alpha)|b|$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，便得

$$|G|^2|\alpha A+(1-\alpha)B|\geqslant\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{1-\alpha}$$

$$=|GBG'|^{1-\alpha}=|E|^{2(1-\alpha)}|B|^{1-\alpha}$$

$$=|E|^2|E|^{-2\alpha}|B|^{1-\alpha}=|E||A|^{\alpha}|B|^{1-\alpha}$$

$=|G|^2|A|^{\alpha}|B|^{1-\alpha}$从而

$$|\alpha A+(1-\alpha)B|\geqslant|A|^{\alpha}|B|^{1-\alpha}$$

下面我们通过考虑积分

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-X'(\alpha A+(1-\alpha)B)X}dX$$

给出另一证法。

由上题易证对正定阵C，$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-X'CX}dx=\pi^{p/2}|C|^{-\frac{1}{2}}$。于是

$$J=\pi^{\frac{p}{2}}|\alpha A+(1-\alpha)B|^{-\frac{1}{2}}$$

另外，由积分形式的Hölder不等式得

$$J\leqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\alpha x'Ax})^{\alpha}dx\right]^{\alpha}\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-(1-\alpha)x'Bx})^{\frac{1}{1-\alpha}}dx\right]^{1-\alpha}$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x'Ax}dx\right)^{\alpha}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x'Bx}dx\right)^{1-\alpha}$$

$=(\pi^{\alpha p/2}|A|^{-\alpha/2})(\pi^{(1-\alpha)p/2}|B|^{-(1-\alpha)/2})$ 于是