

石油化工设备设计参考资料

石油化工工程抗震技术报告会

设备专题报告

上海化学工业设计院石油化工设备设计建设组

总 目 录

《工业设备抗震鉴定标准(报批稿)》介绍	1
石油部北京炼油设计研究院 韦树莲	
《城市公用设施抗震设计规范》介绍	50
北京市市政设计院 沈士杰	
工业设备的抗震	89
石油部海洋及油气田工程技术研究所 项忠权	
化工厂管道震害及防治意见	135
化工部化工设计院 夏德楷	

《工业设备抗震鉴定标准》
(报批稿) 介绍

目 录

几点说明：		1
一	单质点体系地震荷载的计算原理	1
二	式《附2》的推导	10
三	多质点体系的地震反应	11
四	式《附5》的推导	20
五	立式设备计算地震荷载的简化公式——式《附6》 和式《附8》	22
六	《附录五》中各公式的推导——用迭代法求多质点 体系各阶频率和振型的原理	26
七	《附录七》的说明	31
八	《附录八》的说明	35
九	《附录九》的说明	46

石油部北京炼油设计研究院

几点说明

本文仅对计标理论的部分内容作简浅的介绍。为了减少篇幅，方便阅读，谨作如下说明：

1. 本文在引用《工业设备抗震鉴定标准》（1977年报批稿）时，把它简称为《标准》——“标准”二字外加双角括号《》。

2. 本文使用的符号，与《标准》内的符号相同时，一般不再说明符号的意义；当引用新的符号时才附加说明。

3. 本文在引用《标准》中的插图、公式和附录时，在其序号外附加双角括号《》，以资区别于本文自身的插图和公式。

4. 为了力求简单易懂，本文在叙述问题时，在不会引起误会的情况下，有些地方没有按结构动力学的原理严格加以学术性的解释和定义。例如在谈结构变形时，没有说明是弯曲还是剪切变形；在谈质点的运动时，没有提及体系的自由度问题和阻尼作用问题等等。

一、单质点体系地震荷载的计标原理

这一节主要是根据参考文献〔1〕编写的。

众所周知，地震时，由于地基运动，结构物将产生惯性力，这就是地震荷载。

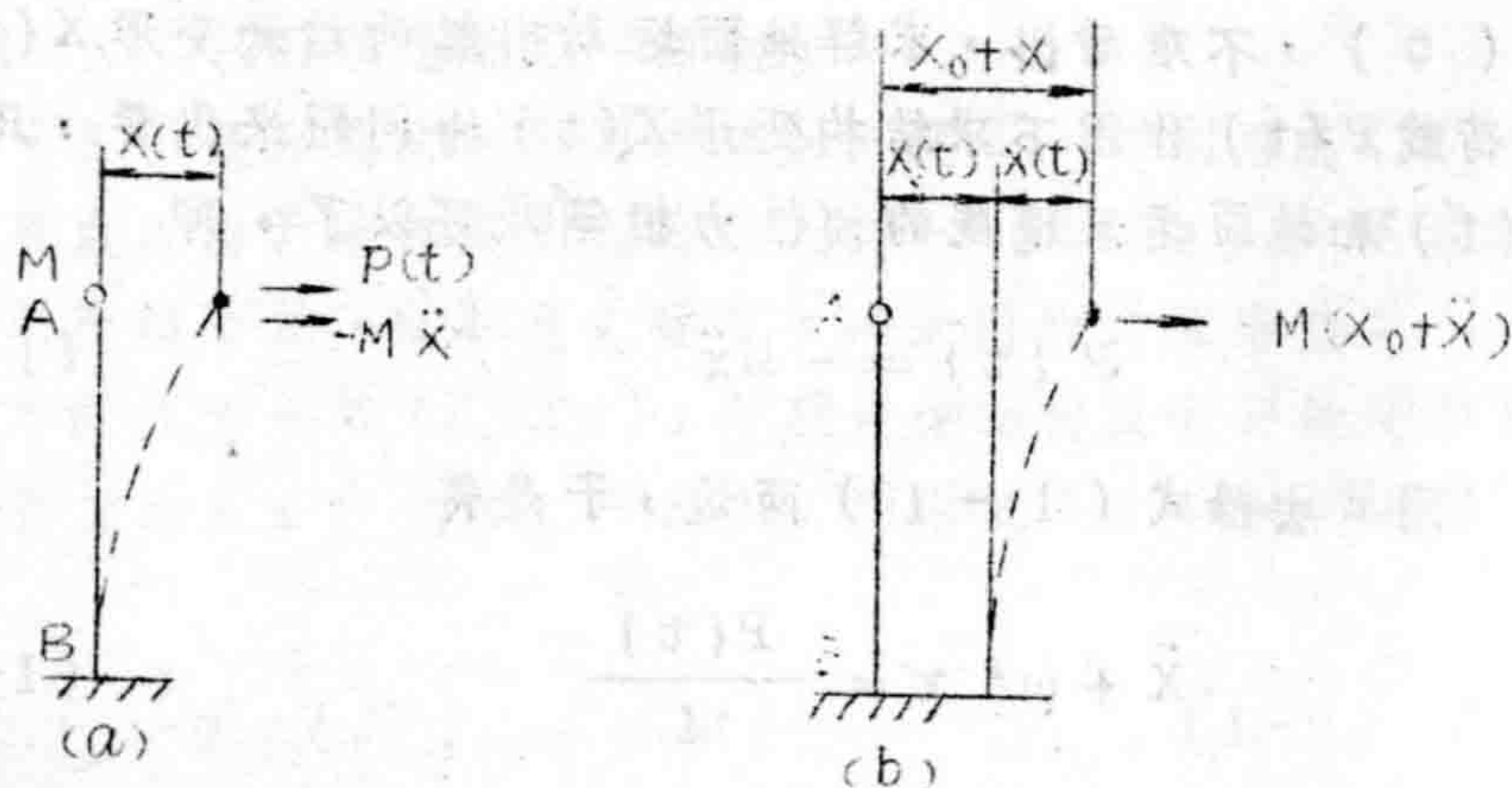


图 (1-1)

考虑如图 (1-1a) 的单质点体系，当它有动荷载 $P(t)$ 作用时，质点 A 产生了位移 $x(t)$ 。设构筑物顶端水平位移刚度为 K （所谓水平位移刚度，就是发生单位水平位移时构筑物的抵抗力，所以 K 是产生单位水平位移所需的力）；质点 A 的质量为 M ，则质点上作用的诸力为：弹性力 Kx ，惯性力 $-M\ddot{x}$ ，外加的动荷载 $P(t)$ 。质点 A 的平衡方程为

$$Kx = -M\ddot{x} + P(t) \quad (1-1)$$

假设这个构筑物没有外加动荷载 $P(t)$ ，但有地基水平运动 $X_0(t)$ 。如果这个构筑物的刚度无穷大，也就是说没有任何变形，那么构筑物上任意点的水平运动与地基的水平运动相等，都是 $X_0(t)$ 。这样，其计标就很简单了。但是，实际上结构物刚度不可能无穷大，其上部会发生弹性变形。因此，具有质量 M 的质点 A，其水平位移除地基运动 $X_0(t)$ 外，还有弹性变形所引起的位移 $X(t)$ ，如图 (1-1b) 所示。这个 $X(t)$ 就是常说的构筑物的地震相对位移反应，即在地震时，由于地面运动 $X_0(t)$ 而引起构筑物发生对地面的相对位移。于是质点 A 的加速度为 $-(\ddot{X}_0 + \ddot{X})$ （这里的 $\ddot{X}_0$ ， $\ddot{X}$ 分别是 $\ddot{X}_0(t)$ 和 $\ddot{X}(t)$ 简写）；作用在质点 A 上的力为弹性力和惯性力，故得

$$Kx = -M\ddot{X} - M\ddot{X}_0 \quad (1-2)$$

比较式 (1-1) 和 (1-2)，或者比较图 (1-1) (a) 和 (b)，不难看出，求解地面运动引起的结构变形 $X(t)$ ，可以用动荷载 $P(t)$ 作用下求结构变形 $X(t)$ 的问题来代替，只要取动荷载 $P(t)$ 和地面运动造成的惯性力相等就可以了。即

$$P(t) = -M\ddot{X}_0 \quad (1-3)$$

用 M 去除式 (1-1) 两边，于是得

$$\ddot{X} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{M} \quad (1-4)$$

式中：

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \quad (1-5)$$

式(1-4)的解为

$$X = \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{P(\tau)}{M} \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (1-6)$$

这里的 τ 是时间 t 的起始时刻。因为 X 是 $X(t)$ 的简写，所以其积分上、下限依次是 t 和 0 。

现在进一步讨论地震作用问题。假设地震时地面运动加速度 $\ddot{X}_0(t)$ 为已知，那么将式(1-3)代入式(1-4)和式(1-6)，得

$$\ddot{X} + \omega^2 X = -\ddot{X}_0 \quad (1-7)$$

$$X = \frac{1}{\omega} \int_0^t [\ddot{X}_0(\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (1-8)$$

上式表明，只要知道地震时地面加速度变化规律 $\ddot{X}_0(t)$ 和结构的频率 ω ，就可以求出结构的弹性变形 $X(t)$ 〔因为在式(1-2)中， $\ddot{X}_0$ 和 $\ddot{X}$ 分别是 $\ddot{X}_0(t)$ 和 $\ddot{X}(t)$ ，所以式(1-8)的等号左边 X 也就是 $X(t)$ ，它们都是时间的函数〕。

把式(1-8)微分两次，即可求得加速度 $\ddot{X}$ ，故利用式(1-8)可以求得质点A由于地震而引起的惯性力 $-M(\ddot{X} + \ddot{X}_0)$ 。不过这比较麻烦，可以改用下法，也就是《标准》中采用的反应谱法：

地震引起的惯性力 $-M(\ddot{X} + \ddot{X}_0)$ ，也就是使结构发生弹性变形 X 的力，它等于弹性力 KX 〔见式(1-2')〕，利用式(1-5)，即 $K = M\omega^2$ ，得

$$-M(\ddot{X} + \ddot{X}_0) = M\omega^2 X \quad (1-9)$$

将式(1-8)代入式(1-9)的右边，得

$$\ddot{X} + \ddot{X}_0 = \omega \int_0^t [\ddot{X}_0(\tau) \sin \omega(t-\tau)] d\tau \quad (1-10)$$

上面导出的地震惯性力〔式(1-9)〕和质点A的加速度〔式(1-10)〕都和随时间 t 有关，就是说地震时，它们是随时间 t 而变动着的。工程上不需求出整个地震过程中的变动数值，我们感兴趣的是它的最大绝对值。

假设 A 表示结构物加速度的最大绝对值； F 表示惯性力的最大绝对值，即所谓地震荷载，由式(1-9)和式(1-10)，得

$$A = \max_{0 < t} \left| \omega \int_0^t [\ddot{X}_0(\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau \right| \quad (1-11)$$

$$F = MA \quad (1-12)$$

对某地某次地震，如果我们有了地面加速度记录 $\ddot{X}_0(t)$ ，代入式(1-11)并积分后即可求得结构的最大加速度，但代入不同的结构频率 ω 将得到不同的加速度 A 。这表明 A 是 ω 的函数。 A 称为加速度反应。工程上习惯用周期 T 的倒数来代替频率，即

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ 因此, 也可说 } A \text{ 是 } T \text{ 的函数。根据某次地震对不同的 } T \text{ 值}$$

求出不同的 A 值，作出 $A-T$ 曲线，我们称它为该次地震的加速度反应谱。有了某次地震的加速度反应谱，就可以对不同自振周期的结构，确定该次地震过程不同结构的最大加速度值 A ，并从式(1-12)求得地震荷载 F 。

从上可见，不同地方，不同次地震，其加速度反应谱是不同的，因为它们的地面加速度记录 $\ddot{X}_0(t)$ 各不相同——加速度的大小可能不同，地面加速度随时间变化的规律（例如地面加速度的主要周期及其持续时间等）也可能不同。因此，某地某次地震的加速度反应谱不能直接用来查出别处另一次地震时的结构加速度反应。但是，不同地

方，不同次的地震，其加速度反应不会完全没有共同的性质。我们可以找出其共性，去掉其不同的因素，以便根据某些地震记录来推出另一些地震的反应。

有一种观点认为，两次不同的地震其加速度反应谱之所以不同，主要是因为两次地震烈度的不同；而烈度的大小仅由地面最大加速度 $\ddot{X}_{0\max}$ 来确定。所以可把地震荷载公式 (1-12) 的右边分离出一个因子 $\ddot{X}_{0\max}$ ，从而写成

$$F = MA$$

$$= (Mg) \left(\frac{\ddot{X}_{0\max}}{g} \right) \left(\frac{A}{\ddot{X}_{0\max}} \right)$$

$$= W \left(\frac{\ddot{X}_{0\max}}{g} \right) \left(\frac{A}{\ddot{X}_{0\max}} \right) \quad (1-13)$$

式中， W ——结构自重；
 g ——重力加速度。

如果在上式中，令

$$k = \frac{\ddot{X}_{0\max}}{g}$$

它是地震时，地面最大加速度与重力加速度的比值，也就是以 g 为单位的最大地面加速度。按上述观点，它与地震烈度有关。因此，我们可以从过去发生过的地震定出这个关系，其办法就是从某次地震震害程度确定该次地震的烈度，再根据该次地震记录的地面最大加速度

$\ddot{X}_{0\max}$ 来确定与这次地震烈度相对应的 $\frac{\ddot{X}_{0\max}}{g}$ 值。对各个不同烈

度的地震作上面的分析，就可以定出各种烈度所对应的 $\frac{\ddot{X}_{0\max}}{g}$ 值。

这就是文献〔2〕里说的地震系数 k 。

我国缺乏强震记录，只好借助国外研究结果来确定地震系统。由于各国各研究人员所根据的资料不同，他们所建议的地震系数就会各不相同。一般来说，彼此之间的差别可达两倍左右，从文献〔2〕提供的数据看来，个别最大差别竟达6倍多，可见到目前为止，所采用的计标地震荷载方法是相当粗略的！当然，彼此之间采用的地震系数虽然相差数倍，但决不意味着彼此最后计标得的地震荷载也会相差数倍。因为每每可以通过别的系数来弥合彼此之间的差值。尽管各人提出的地震系数差别很大，但是他们都反映了一个共同的规律，就是烈度每增高一度，最大地面加速度大致也增加一倍。文献〔2〕和我国1964年地震规范（草案）建议的数值见表1-1。

表1-1 地震系数值 k

烈 度		7	8	9	10
地震系数	水平方向	0.75	0.15	0.30	0.60
	坚直方向	0.038	0.075	0.15	0.30

苏联的规范采用的水平地震系数见表(1-2)。与表(1-1)比较，可见它恰好是我国所采用数值的 $\frac{1}{4}$ 。

表(1-2)

烈 度	7	8	9
地震系数 k	$\frac{1}{40} = 0.025$	$\frac{1}{20} = 0.05$	$\frac{1}{10} = 0.1$

下面再讨论一下式(1-13)等号右边最后一个因子。我们令

$$\beta = \frac{A}{\ddot{X}_{0\max}}$$

它是结构的最大加速度 A 和地震时地面最大加速度的比值，也就是表

示结构物上最大加速度是地面最大加速度的一个倍数。 β 在文献〔2〕里称为动力系数，它与烈度没有明确的关系。上面已经谈过，加速度反应 A 是和结构本身的自振周期 T 有关，我们可以用 $A - T$ 坐标系，对每一次地震作出一条曲线——加速度反应谱。同样，我们以 $\beta =$

$\frac{A}{\ddot{x}_{0\max}}$ 为纵座标，以 T 为横座标，也可以对每一次地震作出一条

$\beta - T$ 曲线，这叫做动力系数反应谱。

根据式 (1-11)， A 是地面加速度 $\ddot{x}_0(\tau)$ 的函数，不同的地震有不同的地面加速度 $\ddot{x}_0(\tau)$ ，所以可以看出：对不同地震，其各自的动力系数反应谱曲线虽然相当接近，但并不完全一样。这是由于前面所说的“烈度的大小仅由地面最大加速度来确定”的观点并不完全确切之故。如果我们忽略这种差别，认为所有地震，其动力反应谱曲线都一样，则可以将许多次地震所求得的许多条这种曲线，取一条平均曲线作代表。这样就得出图 (1-2) 的曲线。

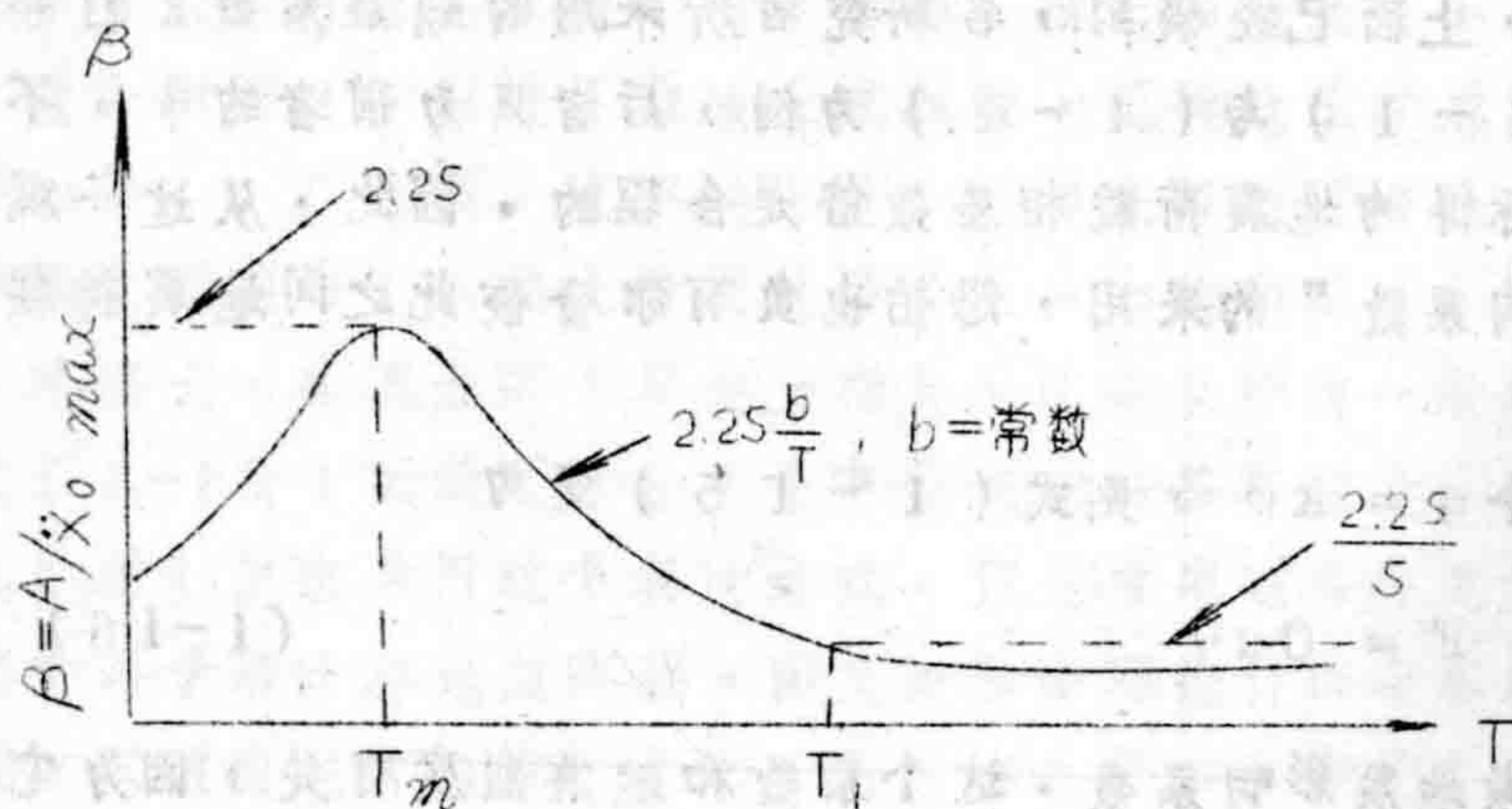


图 (1-2)

在图 (1-2) 中，实际上当 T 等于某一定值 T_m 时， β 将迅速减小。但考虑到实际结构的自振周期 T 不容易计得十分精确，在 T

$< T_m$ 范围， T 值稍有误差，便会引起较大的动力系数误差。为了安全起见，工程中常把 $T < T_m$ 的谱曲线绘成一水平线，如图 (1-2) 左侧的虚线所示。

在工程中，常常考虑到结构并非完全弹性，而是具有弹性和塑性的混合体。弹塑性结构地震时产生的地震荷载比纯弹性结构小，因此，在式 (1-13) 右边再来一个折减系数 C ，通常叫做结构影响系数。这样，式 (1-13) 便变成

$$F = CW \left(\frac{X_{0\max}}{g} \right) \left(\frac{A}{X_{0\max}} \right) \quad (1-14)$$

或者

$$F = Ck\beta W \quad (1-15)$$

这就是我国64年规范(草案)采用的地震荷载计算公式的基本型式，只不过在求底部剪力时，其中还多一个“剪力系数 q ”；在求底部弯矩时多一个“弯矩系数 m ”。

此外，上面已经谈到，各研究者所采用的地震系数 k 相差较大，就以表 (1-1) 与 (1-2) 为例，后者只为前者的 $\frac{1}{4}$ 。不能设想，彼此间计算得的地震荷载相差数倍是合理的。因此，从这一观点来说，“结构影响系数”的采用，恐怕也负有弥合彼此之间地震荷载差值的作用。

如果令 $\alpha = k\beta$ ，则式 (1-15) 变为

$$F = C\alpha W \quad (1-16)$$

系数 α 叫做地震影响系数。这个系数和地震烈度有关，因为它包含因子 $\ddot{X}_{0\max}/g$ ；它也和结构自振周期 T 有关，因为它包含动力系数 $A/X_{0\max}$ 。

因为动力系数 $\frac{A}{X_{0\max}}$ 最大为 2.25，于是得

$$\alpha_{\max} = 2.25 \frac{X_{0\max}}{g}$$

可见 $\alpha_{\max}$ 只与烈度有关。利用 $\alpha_{\max}$ ，可将 α 写成下式：

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{X_{0\max}}{g} \right) \left(\frac{A}{X_{0\max}} \right) \\ &= \left(\frac{X_{0\max}}{g} \cdot 2.25 \right) \left(\frac{A}{2.25 X_{0\max}} \right) \\ &= \alpha_{\max} \left(\frac{A}{2.25 X_{0\max}} \right) = \frac{\alpha_{\max}}{2.25} \cdot \frac{A}{X_{0\max}}\end{aligned}$$

根据上式，利用动力系数 $\beta (= \frac{A}{X_{0\max}})$ 与周期 T 的关系，即把

动力系数反应谱曲线乘以 $\frac{\alpha_{\max}}{2.25}$ 便可作出 α 与 T 的关系曲线，这就是

《标准》中的《附图 2》的 $\alpha - T$ 曲线。由于场地土对 $\alpha - T$ 曲线有影响，故《附图 2》引进了场地土的因素，把场地土分成三类，每一类土作一条 $\alpha - T$ 曲线。这三类土是：I 类土指较硬的土，如微风化和中等风化的基岩；III 类土指较软弱的土，如饱和松沙、淤泥和淤泥质土、冲填土、杂填土等；II 类土指 I、III 类以外的一般稳定土。

式 (1-16) 就是文献 [7] 中公式 (3) 的基本型式。在本《标准》中，式《附 1》也采用这个表达形式。但是考虑到各种类型的设备均采用这个式子来计标地震荷载，而又要弥合理论计标与客观实际之间的差值，以适应已有的传统设计，所以在《标准》中把 C 改为 C_z ，并改名“综合影响系数”，以资与前者所谓“结构影响系数”有所区别。此外，在《标准》中，还用总地震荷载 Q_0 来代替式 (1-16) 中的地震荷载 F 。这样就得到《标准》中的式《附 1》。

三 式《附2》的推导

这个式子是基于下面两个假定而推导出来的：

1. 假定《附图1》所示的多质点体系在地震时发生的总水平地震荷载，仍按式《附1》计标，即

$$Q_0 = C_Z a_1 W \quad (2-1)$$

对于多质点体系来说。上式的总水平地震荷载 Q_0 就是各质点 i 的水平地震荷载 P_i 的总和，即

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n P_i \quad (2-2)$$

根据《标准》里的符号意义，得

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \quad (2-3)$$

2. 假设地震时各质点的加速度分布是直线分布，即与质点的高度成正比。因此，质点 i 的加速度反应

$$R_{ai} = K_a H_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-4)$$

式中， K_a ——常数。

由牛顿第二定律得质点 i 的惯性力（即地震荷载）

$$P_i = \frac{W_i}{g} K_a H_i \quad (2-5)$$

式中， g ——重力加速度。

将式（2-5）代入式（2-2），得

$$Q_0 = \frac{K_a}{g} \sum_{i=1}^n W_i H_i \quad (2-6)$$

故得

$$K_a = \frac{Q_0 g}{\sum_{i=1}^n W_i H_i} \quad (2-7)$$

把式(2-7)代入式(2-5), 即得质点*i*的水平地震荷载

$$P_i = \frac{W_i H_i}{\sum_{i=1}^n W_i H_i} Q_0 \quad (2-8)$$

这就是《标准》中的式《附2》。

要说明的是, 上述的求多质点体系的地震荷载方法, 只是一种近似的计标方法, 因为地震时各质点的加速度显然不会完全符合上面的假定“与质点的高度成正比”。此外, 多质点体系的振动一般都是多振型的振动, 因此用式(2-1)来计标其总水平地震荷载也就不可能是精确的。

三 多质点体系的地震反应

这一节主要是根据参考文献〔3〕编写的。

1. 多质点体系在地震中的振动方程

地震时地基发生了运动, 如第一节那样, 用一个时间函数 $X_0(t)$ 来表示地基在时间为 t 时的位移。地震时, 弹性结构上的任一质点 i 不但随地基发生了运动, 而且同时对地基也发生了相对运动(产生相对位移), 我们也用一个时间函数 $X_i(t)$ 来表示质点 i 在时间为 t 时的相对位移。 $X_i(t)$ 一般称为结构的相对位移地震反应。在以后的叙述中, 有时采用 X_0 、 X_i 来分别代表 $X_0(t)$ 和 $X_i(t)$, 即把 X_0 、 X_i 看作是时间 t 的函数。

在多质点体系中, 作用在任一质点 i 的质量 M_i 的弹性力不单是受相邻质点位移的影响, 而且系统中任一质点的位移都可以在该质点

i 上作用以弹性反力。如果我们用 $-K_{im}$ 来表示由于第 m 质点的单位位移在第 i 质点上所引起的弹性反力，那么作用在质点 i 上的总弹性

反力应为 $-\sum_{m=1}^n K_{im} X_m$ 。于是质点 i 的运动方程为

$$-M_i (\ddot{X}_0 + \ddot{X}_i) - \sum_{m=1}^n K_{im} X_m = 0$$

或
$$M_i \ddot{X}_i + \sum_{m=1}^n K_{im} X_m = -M_i \ddot{X}_0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-1)$$

2 多质点体系的自由振动

所谓自由振动，就是结构在振动过程中没有外部动荷载作用的振动。因此，令式 (3-1) 中的 $X_0=0$ 就得到多质点体系的自由振动方程：

$$M_i \ddot{X}_i + \sum_{m=1}^n K_{im} X_m = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-2)$$

假设这个方程的解有下面的形式：

$$X_i = X(i) \sin(\omega t + \phi) \quad (3-3)$$

也就是说，假定每一质点的振动频率 ω 和相位角 ϕ 都相同，只是振幅 X 不同。 $X(i)$ 是 i 点的振幅。将式 (3-3) 代入式 (3-2)，得

$$[-\omega^2 M_i X(i) + \sum_{m=1}^n K_{im} X(m)] \sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

为了使上式任何时刻都恒等于零，必须有

$$-\omega^2 M_i X(i) + \sum_{m=1}^n K_{im} X(m) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-4)$$

上式是关于 n 个未知数 $X(i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的线性齐次代数方程组。为了得到非零解，根据克莱姆定理，其系数行列式必须等于零。于是得

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 M_1 + K_{11}) & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & (-\omega^2 M_2 + K_{22}) & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & (-\omega^2 M_3 + K_{33}) & \dots & K_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & (-\omega^2 M_n + K_{nn}) \end{vmatrix} = 0 \quad (3-5)$$

这个方程中， K_{im} 和 M_i 是常数，只是频率 ω 是未知数。将上式展开，可得关于 ω^2 的 n 次代数方程。对于线性弹性体系，可以证明，这个方程 ω^2 的 n 个根都是正实数。将它们从小到大加以编号，即得 n 个频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ，它们就是体系的自振频率， ω_1 称为第一频率或基本频率， ω_2 称为第二频率，其余类推。

从代数学中还可以知道，当式 (3-4) 的系数行列式等于零，但 $n-1$ 阶子行列式不等于零，则这 n 个方程实际上只起到 $n-1$ 个方程的作用。这样，未知数的数目就比方程的数目多出一个。这时，方程只能有不定解，即只有假定其中的一个未知数等于某一定值时，才能从这 $n-1$ 个方程中求出其他未知数。例如，在式 (3-4) 中，假定 $X(1)=1$ ，这时才可能求出 $X(2), X(3), \dots, X(n)$ 。也就是说，只能确定各质点位移的相对比例——体系的振动形状，这就是所谓振型。

因为所有 n 个频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 都能使方程 (3-4) 的系数行列式等于零，即能满足式 (3-5)，故将各个频率代入式 (3-4) 后，就可以求出相应的振型 $X(1), X(2), \dots, X(n)$ 。所以说， n 个质点体系的 n 个频率对应有其 n 个振型，这也是体系的一个固有特性。

3. 振型的正交性

振型有一个重要的特性，即所谓正交性，它对简化复杂结构的地震反应分析起着很重要的作用。

假设 $X_j(i)$ 和 $X_k(i)$ 是质点 i 的两个振型, 它们的序号是 j 和 k (j, k 是振型序号, i 是质点序号)。根据振型的定义, 这两个振型均能满足方程 (3-4), 故得

$$\sum_{m=1}^n K_{im} X_j(m) = M_i \omega_j^2 X_j(i)$$

和

$$\sum_{m=1}^n K_{im} X_k(m) = M_i \omega_k^2 X_k(i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

用 $X_k(i)$ 乘上面的第一式, $X_j(i)$ 乘第二式, 上两式变为

$$\sum_{m=1}^n K_{im} X_j(m) X_k(i) = M_i \omega_j^2 X_j(i) X_k(i)$$

$$\sum_{m=1}^n K_{im} X_k(m) X_j(i) = M_i \omega_k^2 X_k(i) X_j(i)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

将上两式两边对 i 求和, 即将 $i=1, 2, \dots, n$ 代进去并把这 n 个方程加在一起, 则得

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n K_{im} X_j(m) X_k(i) = \omega_j^2 \sum_{i=1}^n M_i X_j(i) X_k(i)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n K_{im} X_k(m) X_j(i) = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n M_i X_k(i) X_j(i)$$

因为上两式左边的双重和中的指标 m, i 只是求和时用的参量, 可以随意命名。所以我们可以交换第一式中的 m 和 i , 然后交换求和次序, 这样可以证明上两式等号左边部分是相等的。因此, 得

$$\omega_j^2 \sum_{i=1}^n M_i X_j(i) X_k(i) = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n M_i X_k(i) X_j(i)$$

或者

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \sum_{i=1}^n M_i X_j(i) X_k(i) = 0$$