# 應用模糊數學

闕頌廉　編著

科技圖書股份有限公司

# 應用模糊數學

闕頌廉　編著





科技圖書股份有限公司

行政院新聞局登記證 局版台業字第 1123 號



# 應用模糊數學

編著者：關 頌 廉

發行人：趙 大 慶

發行者：科技圖書股份有限公司

台北市重慶南路一段 49 號四樓之 1

電 話：3118308 • 3118794

郵政劃撥帳號 0015697-3

81年8月2版 特價新台幣 150 元

ISBN 957-655-152-8

# 緒　論

模糊數學是由美國 California 大學之控制論專家查德（L. A.Zadeh）首先提出來的，他於1965年發表「Fuzzy Sets」一文後，模糊數學便成為一門新的數學分支，並迅速發展起來。它的產生不僅拓廣了經典數學的數學基礎，而且使計算機科學向人們的自然機理方面發展，作出了重大的突破。

由於模糊數學的歷史很短，尚未形成自己的理論體系，在實用方面也有待於新的突破，因此我們必須大力開展模糊理論的研究工作。

數學的源泉是實踐，在實踐中所遇到的現象大致可以分為三類：確定現象、隨機現象與模糊現象。為解決確定現象，相應的數學工具有幾何、代數、數學分析、微分方程等，習慣上稱為經典數學；概率論與數理統計是研究隨機現象的數學工具；而模糊數學則是研究模糊現象的數學工具。

在古代我們已經會利用模糊現象來解決問題。古希臘的《伊索寓言》中，就有一則這樣的故事：某次伊索的主人醉後狂言，跟人打賭發誓說：「我能喝乾大海，並以我的全部財產及奴隸作賭注」。次日，他酒醒後懊悔莫及，但這一消息已轟動全城，人們聚集在海邊等候着他。他不得不求助於聰明的伊索

，伊索在講好條件後給他出了個主意，主人聽後如獲至寶，急忙飛奔海邊，對蜂擁在那裡的人們大聲喊道：「現在，我再說一遍，我能喝乾整個大海。可是如今千萬條江河滙入大海，海水裡混雜了許多河水，如果有誰能把河水和海水分開，我就能把真正的大海喝乾！」伊索簡單地應用了模糊語言學帮助主人度過了難關。因為「海水」是一個模糊概念。正如「水果」與「蔬菜」；「過去、現在、將來」一樣，都沒有一條截然分明的界線。

對於一個是非界限原本不清的概念，若勉強用「是非」標準來作劃分，必將導致謬論。

所謂「禿頭悖論」，就是一個典型的實例，有人首先約定，只有 $n_0$ 根頭髮的人為禿頭，當 $n > n_0$ 時則為非禿頭。別人問：「$n_0+1$ 根頭髮的人是否為禿頭？」後發覺原先的約定不夠合理，於是再作約定：若 $n=n_0$ 為禿頭，則 $n=n_0+1$ 亦為禿頭，如此一來，就導致一切人都是禿頭的悖論。

在實際生活中，「精確」並不永遠是那樣完美無缺的，適當的利用模糊却是大自然對人類的一種恩賜。譬如，當我們判斷走過來的人是誰時，只要把來人的高矮、胖瘦及走路姿勢等，與儲存在大腦中的樣本進行比較，我們就不難得到正確的結論。可是這種事讓電子計算機來做，那就得測量來人的身高、體重或手臂擺動的角度、頻率、速度、加速度等一大批數據，而且非要精確到小數點後幾十位才能罷休。由於人體的各種數據並不是恒定不變的，因而會鬧出「翻臉不認人」的笑話來。可見一定程度的模糊反而能容易認出走過來的人是誰，這是由於人類智慧與機器功能之間有着本質的區別，人腦善於判別與

處理不精確的與非定量的模糊現象，並從中得出具有一定精度的結論，當我們拿起一隻杯子時，究竟用多少力氣，並不需要精確地計算，我們可根據觸覺或視覺等感覺，經幾次反饋及調整，就能以恰如其分的力量握住杯子，既不會因用力過猛而揑碎杯子，也不會因用力太小而使杯子落地，要是讓機器人來完成這一動作就困難得多，因為它只能接受精確的指令。

羅索（B. Russel）悖論，對經典數學賴以建立的二值邏輯也是一個挑戰。德國數學家策墨羅（E, Zermelo）認為

$$X=\{x \mid p(x)\}^{*}$$

對於任意 $x$，$p(x)$ 與 $\overline{p(x)}$ 有一成立，且只有一個成立。英國數學家羅素對此提出非議：設

$$X=\{x \mid x \bar{\in} X\}$$

若 $x \in X$，則 $x \bar{\in} X$；若 $x \bar{\in} X$，則 $x \in X$。顯然，$x \in X$ 與 $x \bar{\in} X$ 自相矛盾，於是從根本上否定了「$p(x)$ 與 $\overline{p(x)}$ 二者必居其一」的結論，這就是所謂羅素悖論，多值邏輯就是在它的啓示下發展出來的。二值邏輯「或真或假二者必居其一」，這種絕對化的思想，實質上是揚棄了事物本身的模糊性，並抽象出傾向於某一極端的特點而達到精確之目的。

模糊概念與模糊命題過去也存在，只是經典數學難於給出它的數學描述而已。模糊數學就是用來表現與加工模糊信息的一種新的數學工具，模糊數學在精確的經典數學與充滿模糊性的現實世界之間，架起了一座橋樑。

在以二值邏輯為基礎的集合論裡中，對元素 $x$ 與集合 $A$ 給出一個特徵函數為

※ $X$ 表集合，$x$ 表集合 $X$ 中的元素，$p(x)$ 表元素 $x$ 所具有的某性質，$\overline{p(x)}$ 表 $x$ 不具有某性質。

$$C(x)=\begin{cases} 1 & (x\in A) \\ 0 & (x\overline{\in} A) \end{cases}$$

來描述元素對集合的隸屬關係。對於某些事物，這種絶對化的劃分是合理的。例如，男女的劃分，一個人不可能既屬於男又屬於女。但對於另一些事物，這種絶對化的劃分則是不合理的，例如禿頭，找一個劃分界限是不可能的。查德将集合 $\{0,1\}$（僅有 0 ，1 兩個元素的集合）改為區間 $[0,1]$（包括從 0 至 1 的全體實數）構造一個隸屬函數。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\quad(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1)$$

來刻劃元素 $x$ 隸屬於集合 $\underset{\sim}{A}$ 的程度。

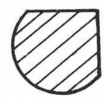


圖 0.1

例如圖 0.1，有人問：「它是圓嗎？」
如果回答是圓，或不是圓，都是不符合實際的或不正確的，若回答「它有 50％的程度是圓——半圓」（$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\frac{1}{2}$）更符合實際，把它改為能反映複雜事物的模糊數學。隸屬函數對我們並不陌生，我們常言「某件事有 80％的把握」,「某人咳嗽多半是感冒引起的」以及統計中常用的加權數等，都表現了隸屬函數的思想，因此隸屬函數的概念是模糊數學中最重要的基礎。

模糊數學自 1965 年問世以來，發展迅速也應用廣泛，本書僅介紹模糊集合理論的基本概念以及主要應用，作為普及模糊數學工作的一個嘗試。

本書着重在實際應用，不追求數學理論的嚴密論證。由於編者水準有限，不足之處在所難免，望讀者批評指正。

# 目　錄

## 緒　論

## 第一章　模糊集合



## 第二章　模糊關係



## 第三章　模糊聚類分析與模式識別

## 第四章 綜合評判



## 第五章 模糊語言與模糊邏輯



## 第六章 模糊數學的應用



## 習題答案

# 第一章　模糊集合

## 1-1　普通集合與特徵函數

### 【1】 集　合

確定的對象物的總體稱爲集合或集，構成集合之每個事物稱爲集合的元素或元。集合一般用大寫字母表示，元素則用小寫字母表示。

例如，把自然數 1,2,3,4,・・・視爲一個整體。便形成一個集合。記爲

$$N=\{1,2,3,4\cdots\}$$

$N$爲自然數集，自然數 1，2，3，4，・・・就是該集的元素，又如方程

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

的根 1，2，3 組成一個集合，可以把它記爲

$$A=\{x\mid x^3-6x^2+11x-6=0\}$$

集合$A$的元素是$x$。事實上$A=\{1,2,3\}$，一般爲

$$X=\{x\mid p(x)\}$$

表示集合$X$中的元素$x$具有屬性$p(x)$。

具有屬性 $p(x)$ 的元素 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$ 所組成之集合也可記爲

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

集合之元素可以有限個，也可以無限個，分別以有限集、無限集來區分。不含任何元素的集合稱爲空集 $\phi$。

集合一般有兩種表示方法：

(1)描述法：如 $X=\{x \mid p(x)\}$；

(2)列舉法：如 $X=\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$

若 $x$ 是集合 $A$ 的元素，用 $x \in A$ 表示；若 $x$ 不是 $A$ 的元素，則用 $\overline{\in}$ 表示。

## 【2】　集合的相等

集合與集合之間有從屬（包含）與相等的關係。

關於集合 $A$，$B$，若 $x \in A$ 有 $x \in B$，則稱 $A$ 是 $B$ 的子集，記爲

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

讀作「$A$ 被 $B$ 包含」或「$B$ 包含 $A$」。

$B \supset A$ 表示眞包含，$A$ 是 $B$ 的眞子集（即若 $A \neq B$，且 $A \subseteq B$ 時，由圖 1.1 來表示這種關係）。

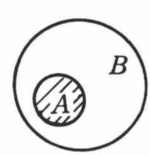



圖 1.1

例如：$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 且 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$，若 $A \subseteq B$，$B \subseteq A$，則稱 $A$、$B$ 相等，記爲 $A=B$。被討論的對象的全體稱爲論域，論域的全體稱爲全集，用 $E$ 來表示之。

## 【3】　集合的並集、文集與補集

由至少屬於集合 $A$、$B$ 二者之一的元素，作爲元素的集合，稱爲 $A$ 與 $B$ 的**並集**，用 $A \cup B$ 來表示，即

$$A \cup B = \{X \mid X \in A \text{或} X \in B\}$$

由集合 $A$、$B$ 二者都含有的元素構成之集合，稱爲 $A$ 與 $B$ 的**交集**，用 $A \cap B$ 來表示。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

若 $A \cap B = \phi$，即當 $A$ 與 $B$ 沒有相同的元素時，則稱 $A$ 與 $B$ **不相交**或**互質**。

對於集合 $A$ 與 $B$，由屬於 $A$ 但不屬於 $B$ 元素之全體構成的集，稱爲 $A$ 與 $B$ 的差集。並用 $A-B$ 來表示。即

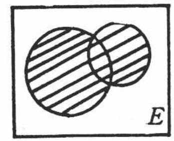
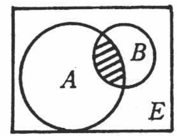
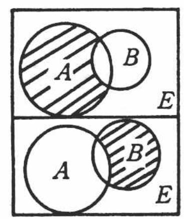
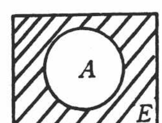
$$A-B=\{x \mid x \in A,\ x \bar{\in} B\}$$

設 $E$ 爲全集，則稱 $E-A$ 爲 $A$ 的**補集**，用 $\bar{A}$ 來表示。即

$$\bar{A}=\{x \mid x \bar{\in} A,\ x \in E\}$$

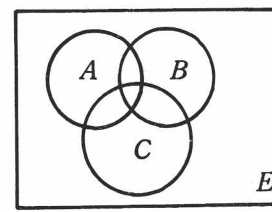
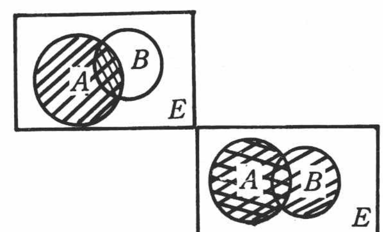
爲了使並集、交集與補集的概念易於理解，我們用維恩(Venn)圖或歐拉(Euler)圖來表示它們。

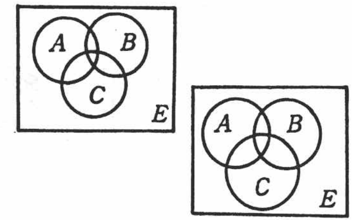
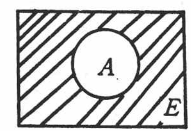
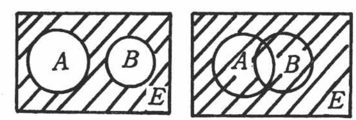
集合的並、交、補與差是集合的基本運算，必須清楚瞭解每一種基本運算的涵義。

| 名稱 | 定　義 | 維 恩 圖 | 例 |
|---|---|---|---|
| 並 | $A \cup B$<br>$=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ |  | $\{1, 2\} \cup \{2, 3\}$<br>$=\{1, 2, 3\}$ |
| 交 | $A \cap B$<br>$=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ |  | $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$<br>$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \phi$ |
| 差 | $A-B=\{x \mid x \in A$，且 $x \overline{\in} B\}$<br>$B-A=\{x \mid x \in B$，且 $x \overline{\in} A\}$ |  | $\{1, 2\} - \{2, 3\} = \{1\}$<br>$\{2, 3\} - \{1, 2\} = \{3\}$ |
| 補 | $\overline{A}=E-A$<br>$=\{x \mid x \overline{\in} A$ 且 $A \in E\}$ |  | $\{\overline{1, 2}\} = \{x \mid x \neq 1, 2\}$<br>$A = \{x \mid x > 0\}$<br>$\overline{A} = \{x \mid x \leqslant 0\}$ |

## 【4】 集合的運算法則

下面用維恩圖繪出集合的運算法則

| 名　稱 | 運　算　法　則 | 維　恩　圖 |
|---|---|---|
| 1. 冪等律 | $A\cup B=A$，$A\cap A=A$ | |
| 2. 交換律 | $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ | |
| 3. 結合律 | $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$<br>$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ | <br> |
| 4. 吸收律 | $A\cup(A\cap B)=A$<br>$A\cap(A\cup B)=A$ | <br> |

| 名　稱 | 運　算　法　則 | 波　恩　圖 |
| --- | --- | --- |
| 5.分配律 | $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$<br>$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | <br> |
| 6.復原律 | $\overline{\overline{A}}=A$ | <br> |
| 7.對偶律 | $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$<br>$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ | <br> |
| 8.常數運算法則 | $A\cup E=E$，$A\cap E=A$<br>$A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$ | |
| 9.互補律 | $A\cup\overline{A}=E$，$A\cap\overline{A}=\phi$ | |

## 【5】 特徵函數

設 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$A=\{x_2, x_3\}$, $B=\{x_3, x_4, x_5\}$

顯然 $A$、$B$ 均爲 $X$ 的子集。

若我們希望表明 $X$ 中的元素哪些是 $A$（或 $B$）的元素，可以作下列的規定

若 $x_2 \in A$ 記爲 $(x_2|1)$，若 $x_1 \bar{\in} A$ 記爲 $(x_1|0)$

實際上，對 $X$ 的一個子集 $A$，則定義了一個特徵函數

$$\mu_A(x)\begin{cases}1 & (x \in A)\\ 0 & (x \bar{\in} A)\end{cases}$$

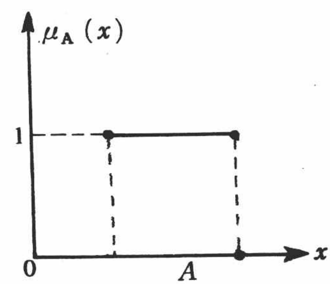


圖 1.2

該特徵函數可以用圖 1.2 來表示之。

$\mu_A(x)$ 在點 $x_i$ 處的值 $\mu_A(x_i)$，稱爲 $A$ 的特徵值或隸屬度，顯然 $\mu_A(x)$ 的值域是 $\{0, 1\}$，可記爲 $\mu_A(x) \to \{0, 1\}$

故 $A=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0)\}$

$B=\{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|1)\}$

特徵函數也可以如此表示

$$(x|\mu_A(x))=\begin{cases}(x|1) & (x \in A)\\ (x|0) & (x \bar{\in} A)\end{cases}$$

## 【6】 特徵函數的運算性質

設 $A$、$B$ 與 $C$ 爲 $X$ 的子集，它們的特徵函數分別是 $\mu_A(x)$、$\mu_B(x)$ 與 $\mu_C(x)$，對任一 $x \in X$ 有如下性質

① $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$

符號「$\Leftrightarrow$」是數學語言「當且僅當」的代號，即$\Leftrightarrow$兩邊數學

式是等價的，也可以互推的。性質①是說，兩個集合間的運算可以歸納爲它們的特徵函數間之運算，列舉如下。

［例1-1］ 設$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，顯然$A\subseteq B$

$$A=\{(1|1)(2|1)(3|0)\}$$

$$B=\{(1|1)(2|1)(3|1)\}$$

此$\mu_A(x)$的值是 1、0，$\mu_B(x)$的值是 1，可見$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，$x=1,2,3$。反之亦然，因此性質①，對本例是成立的。

② $C=A\cup B\Leftrightarrow\mu_C(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$

或 $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$

記號$\vee$，$\wedge$分別是取大或取小之代號。

③ $C=A\cap B\Leftrightarrow\mu_C(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$

或 $\mu_{A\cap B}(x)=\mu_B(x)\wedge\mu_B(x)$

④ $C=\bar{A}\Leftrightarrow\mu_C(x)=1-\mu_A(x)$

或 $\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$

［例1-2］ 設$A=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}$

$B=\{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}$

$\because$ $0\vee1=1,1\vee0=1,0\vee0=0,1\vee1=1$。

$0\wedge1=0,1\wedge0=0,0\wedge0=0,1\wedge1=1$。

$\therefore A\cup B=\{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}$。

$A\cap B=\{(x_1|0),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}$。

在兩個數 0，1 中取大或取小的運算，稱爲眞值表，即