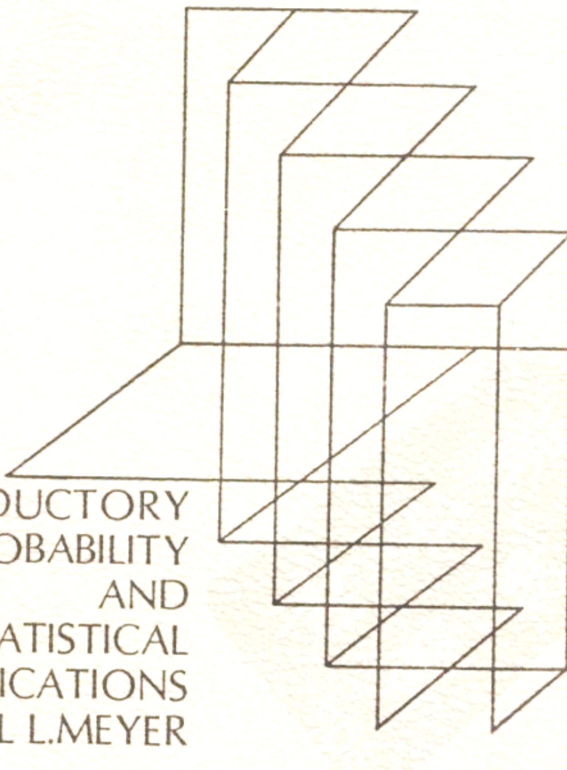
機率導論與統計應用（附解答）

修訂版

曾忠信
黃錦俊合譯
謝茂良



INTRODUCTORY
PROBABILITY
AND
STATISTICAL
APPLICATIONS
PAUL L.MEYER

譯者序言

近代工商業突飛猛進，機率理論與應用日新月異。美國機率學權威Meyer．所著"機率導論及其在統計上的應用"一書，自出版以來，即廣受讀者喜愛，風行各國。

我國目前各大專院校，亦多採用此書。初習者閱讀原文，由於文字隔閡，常不能瞭解其意，影響學習興趣甚大。有志進修機率學科者，英文生疏，雖欲研習亦無法完其所願。譯者有鑒於此，乃利用課餘，歷時年餘，完成翻譯工作。

本書共分十五章，分由譯者三位負責。第一至四章由謝茂良擔任，第五至九章由黃錦俊擔任，第十至十五章由曾忠信擔任。譯者俗務紛紜，付梓倉促，魯魚亥豕，在所難免；且學海無涯，自愧才疏學淺，尚望碩學先進，不吝指正。

本書之完成，承蒙成大統計系黃宗源同學、洪金源同學、成大工管研究所陳通明同學、及成大歷史系藍春華同學等之整理、校對，使本書得以順利完成，在此深表謝意。

謝茂良
黃錦俊 合譯
曾忠信

譯者 謹識
時在民國六十六年
于研究室

目　　錄

第一章 機率概論

§1—1 數學模型 (Mathematical Model)

在這章中，我們將要討論宇宙間所發生現象的類型，並建立數學模式以幫助我們更精確的研討這些現象。

首先，我們必須分別清楚現象的本身及其數學模式。雖然，在選取模式時，我們可以憑著自已的判斷選擇，但這數學模式不能影響我們所觀察的現象。

J. Neyman 紐曼教授對此曾經強調：

“我們欲將宇宙間所發生的現象加以探討，必須先依據所觀測的事實，建立一數學模式（確定模式或機率模式）（deterministic or probabilistic），且這模式要能簡化事實及刪除不重要的因素。這模式建立的成功與否端賴這模式是否能將現象加以簡化。這模式所導出的結果可能是正確的但也可能不是，因為這假設的模式並不能保證沒有偏誤。除非在觀測值得到以前，否則通常是很難判定一個數學模式建立的適當與否。為了要確定一個適當模式，我們必須將數學模式所演繹的結果與真實觀測值加以比較”。

數學模式可分為確定模式（deterministic model）及機率模式（probabilistic）。前者乃指一試驗之條件完全決定其結果，例如我們將一電池置入一電路中，則由數學模式推測的電流為 $I = E / R$，即為歐姆定律（ohm's law）此數學模式中只要 E 及 R 已知，則其 I 值便可求得。

而且即使重複上項試驗數次，保持同樣的電路（即 E 及 R 值不變），則得到同樣的一個電流值。因為任何可能發生偏差的機會很少，所以大致而言，以上的描述（亦即，指這模型而言）已經足夠了！重要的是用來產生電流的乾電池，和觀測電流值的安培計，與及我們使用測量儀器的能力，還有所使用的電線，決定了每次實驗的結果，（可能有些因素在每一次實驗都不盡相同，然而並不會很顯著地影響實驗的結果，例如實驗室中的溫度及濕度，或是讀安培計的人之身高，對於實驗的結果，均可假定沒有什麼影響）。

自然界中有許多的“實驗”，確定模式（deterministic model）對其是很合適的。例如，重力法則（gravitational laws）精確的描述在某些穩定情形下的落體發生的情形。克卜勒定律（Kepler's laws）告訴我們行星的運行。

模型規定了一些現象發生的條件，這些條件決定某些可觀察得到的變數值：像速度的大小，某一定時間內掃過的面積等等。這些常常出現在我們所熟悉的公式裏。例如，我們知道在某些條件下，一物體垂直上拋的距離為 $s = -16t^2 + v_0 t$，此處 v_0 為初速，t 為時間。我們的注意力並不集中在此式子的形式，而是

在 t 和 s 之間的關係，右式的數值可決定左式的值。

就大體而言，確定模型是夠用的，然而有許多現象需要不同的數學模型，這些卻非確定模式（Nondeterministic model）或稱之爲機率模式（probabilistic model），另外也常稱之爲隨機模式（stochastic model），在本章後面，我們將討論這些模型是如何描述的，且讓我們先看一些例子。

假定我們有一能放射 α 質點的放射源，藉計數器，我們能記錄在一特定時間內放射之 α 質點數。很顯然的，即使我們知道此放射性物質的確實形狀、大小、化學成份及其質量，我們仍然無法準確預測出放射的質點數，所以似乎沒有一個合宜的模型，使得放射出的質點數 n，爲放射性物質的各種特性的函數，我們只好另外考慮機率模式了！

爲了其他的說明，我們考慮一個有關氣象的情況。我們希望能決定當某一颱風吹過某一地區時，到底有多少雨量，我們需要一些儀器記錄。氣象報告將會給我們一些有關的颱風消息，如各地的氣壓，氣壓變動，風速，颱風中心及其分向等等，但是這些消息僅可以預測雨量的通性（如雨量輕微，中等，大量等），却無法精確地告訴我們有多少雨量，在此不能利用確定模式，而機械模型則可較準確的描述這些情況。

如果已導出此理論（事實上還沒有）則大體上我們可以知道雨量有多少，因此我們利用機率模型。而在放射性物質的例子裏，我們更是要用到機率模式。

簡單的說，確定模式乃指一試驗之條件完全決定其結果，而一非確定模式乃指一試驗之條件僅決定其結果的機率行爲（probabilistic behavior）。

換句話說，在確定模式裏，我們利用“實際的考慮”（physical considerations）去預測的結果，而在機率模式裏，我們則利用同一考慮去說明機率分配。

§1－2　集合介紹　(Introduction to Sets)

爲了研討機率模式（probabilistic model）的基本概念，我們將介紹集合（Sets）的理論，這是一個很廣泛的題材，我們僅僅提出一小部份的觀念。

“集合”是一些東西的統稱。通常以大寫的字母 A，B，……代表之。有三種方法可以判定某些東些是否屬於 A 集合。

(a)列出所有的組成元素（members），如 $A=\{1，2，3，4\}$ 即代表 A 集合包括正整數 1，2，3 及 4。

(b)用文字敘述 A 集合。例如，我們說 A 集合是由 0 到 1 之間所有實數所成的集合。

(c)也可以 $A=\{x \mid 0\leq x\leq 1\}$ 表示 A 集合，亦即其乃是所有 x 所組成的集合，其中 x 是介於 0 與 1 之間的實數。

所有組合集合 A 的個體，我們稱其爲元素（element）當 a 爲 A 的元素時，記爲 $a\in A$；否則爲 $a\notin A$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

另外有兩種特殊的集合，即全集合（universal set）及空集合（empty set）。通常我們討論集合時，常先訂好討論所涉及的範圍，如所有的實數所成集合或24小時內生產線所產出的產品。在這所有考慮的範圍，我們定義其為全集合（universal set），以U表示之。

剩下的一種特殊集合，是如此產生的。假定A集合是由實數x所成的集合，x滿足方程式$x^2+1=0$。當然，我們知道是沒有這種數字的，亦即A集合沒有任何的東西組成，如此特殊的情況，我們定義其為空集合（empty set or null set），以ϕ表示之。

當兩個集合A和B同時被考慮時，很可能有A的元素包含於B的元素中的情形，我們說A是B的子集合（Subset），記為$A\subset B$。又若另外一種情況$B\subset A$同時成立，則我們說A和B是相同的集合，$A=B$，若且唯若$A\subset B$和$B\subset A$

也就是說若且唯若兩個集合包含相同的元素，則兩集合是相等的。

下列兩種性質，全集合和空集合，具備此特性：

(a)任一集合A，必存在$\phi\subset A$。

(b)只要全集合存在，則任一集合A，$A\subset U$。

【例題1－1】 假定U是所有實數所成的集合，$A=\{n\mid x^2+2x-3=0\}$ $B=\{x\mid(x-2)(x^2+2x-3)=0\}$，$C=\{x\mid x=-3,1,2\}$ 則$A\subset B$，且$B=C$

其次，我們討論聯集運算（union），有兩種運算：加法（addition）及乘法（multiplication）是要運用到的。假設A和B是兩個集合，則我們定義C是A和B的聯集（union）（或稱A和B的和）如下

$$C=\{x\mid x\in A \text{ or } x\in B\}(\text{or both})$$

記為$C=A\cup B$。在此C集合，同時包含了A或B，或兩者的元素。

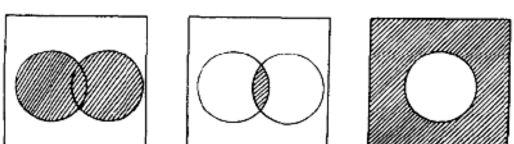
又若D是A和B的交集（intersection）（有時亦稱A和B的乘積），定義如下

$$D=\{x\mid x\in A\text{，及}x\in B\}$$

記為$D=A\cap B$，在此D集合包含了既屬於A又屬於B的元素。

最後，我們介紹一個集合A的餘集（complement）$\overline{A}$，它包含了所有不屬於A（但屬於全集合U）的元素，亦即$\overline{A}=\{x\mid x\notin A\}$

利用文氏圖（Vann diagram），可以更清楚明瞭集合的觀念：在圖1－1中，陰影的部份代表所考慮的範圍。



$A\cup B$ $A\cap B$ $\overline{A}$

圖1－1

【例題1－2】 假定$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，則我們可以知道

$\overline{A}=\{5,6,7,8,9,10\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

和$A\cap B=\{3,4\}$　注意在集合中的元素（如$A\cup B$）

我們不重覆列舉，只列舉一次。

以上所述兩個集合之間的交集與聯集的觀念可以推廣到數個集合之間。因此，$A\cup B\cup C$和$A\cup(B\cup C)$，$(A\cup B)\cup C$是相同的。同理，$A\cap B\cap C$，$A\cap(B\cap C)$和$(A\cap B)\cap C$也是相同的。

下列是一些對等的集合，當我們回想若兩個集合元素相同時，兩集合是相同的，我們不難證明讀者應藉著文氏圖，自己證明。

(a) $A\cup B=B\cup A$　　(b) $A\cap B=B\cap A$　　（1－1）

(c) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　　(d) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cup C$

稱(a)及(b)為交換律（Commutative laws），(c)及(d)為結合律（associative laws）

下面列出一些常見而較重要的等式，是關於聯集，交集，及餘集的。每一等式均可以文氏圖證得。

(e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(f) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(g) $A\cap\phi=\phi$　　(h) $A\cup\phi=A$　　（1－2）

(i) $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$　　(j) $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$

(k) $\overline{\overline{A}}=A$

其中(g)和(h)式中空集合中的作用，和0在加法和乘法中的作用是很類似的。

按照下述的定義，兩個（或更多個）的集合，經由轉換可以形成另一個集合

【定義】 設A及B為兩個集合，A及B的卡氏積（Cartesian product），記為$A\times B$，其所成集合為$\{(a,b),a\in A,b\in B\}$，亦即這些有序元素對（ordered pairs），前面一個元素是取自A，後面是取自B集合。

【例題1－3】 設$A=\{1,2,3\}$　；　$B=\{1,2,3,4\}$

則　$A\times B=\{(1,1),(1,2),\cdots\cdots(1,4),(2,1),\cdots\cdots(2,4),(3,1),\cdots\cdots(3,4)\}$

【附註】 一般情形下，$A\times B\neq B\times A$

上述的觀念可以引申更廣，例如$A_1\cdots\cdots A_n$是很多個集合，則$A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2\cdots\cdots,a_n),a_i\in A_i\}$，亦即是由$n$個有序元素所組成的集合。

有一特殊的情形是，集合本身自乘的卡氏積（Cartesian product），如$A\times A$或$A\times A\times A$。在歐幾里得平面（Euclidean plane）中，$R\times R$，（R是所有實數所成的集合）歐幾里得三度空間為$R\times R\times R$。

如果一個集合A中的元素是有限的數目，則我們稱A是有限集合。如果A集合是無限數目的元素組成，且可以與正整數有一對一的對應（one-to-one correspondence）則A爲可數或可數無限（countably or denumerably infinite）（例如，所有有理數所成的集合，是可數無限）。最後，我們要討論不可數無限集合（nondenumberably infinite），這種集合包含無數個不可數的元素。例如，任二個實數，$b>a$，$A=x\mid a\leq x\leq b\}$，則爲不可數無限集合。因爲可以將每一實數表示在實數線上的一點，所以只要不退化（nondegenerate）的情形，任一區間，不可數無限集合所包含的元素，比可數無限集合要多。

雖然上面所介紹集合的觀念僅有一些而已，但是夠滿足我們的目的　詳細且確實的敍述機率的理論。

§1－3　非確定實驗（隨機實驗）的舉例 (Examples of Nondeterministic Experiments)

現在我們將討論隨機或非確定實驗（random or nondeterministic experiment），在此我們將列舉一些實例而不作很嚴密的定義。

E_1：投擲骰子，以觀測其出現之點數。

E_2：擲一枚銅板四次，以觀測其出現正面之次數。

E_3：擲一枚銅板四次，觀測連續出現正面或反面的次數。

E_4：觀測一生產線，計數於 24 小時間所生產之不良品個數。

E_5：觀測裝配飛機機翼時，所用的鉚釘不良品的個數。

E_6：將所生產的電燈炮插於插座，直至其燒壞，觀測其壽命。

E_7：於十件產品中含有 3 件不良品，一件件的選剔，直至所有的不良品均剔除掉，觀測其試驗次數。

E_8：欲生產十件良品，觀測其所生產的件數。

E_9：發射一火箭而於特定時間內，觀測其升空時的三個速度分量V_x，V_y，V_z。

E_{10}：發射一火箭而於特定時間t_1，t_2，t_3 ……，觀測其瞬時高度。

E_{11}：觀測一鋼樑的抗拉強度。

E_{12}：由一僅裝有黑球的袋中抽球，並記錄其顏色。

E_{13}：在一個指定的地點和時日，溫度記錄器連續 24 小時的讀數。

E_{14}：記錄E_{13}中的最高和最低溫度，x和y，

上述的各種試驗，有什麼共同的特徵呢？下列數項乃爲隨機試驗共同的特性

§1－4　樣本空間　(The Sample Space)

【定義】　由一試驗之所有可能結果所組成的集合，稱爲該試驗之樣本空間（Sample Sace），以S記之。（在前曾以S代表全集合，其義不同）。

爲了說明樣本空間，我們以 1－3 所舉之例子，列述每一實驗 E_i 的樣本空間 S_i。

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{$形如 a_1, a_2, a_3, a_4 之所有可能序列，此地 $a_i = H$ 或 T，端視第 i 次投擲出現正或反面而定$\}$

$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\cdots N\}$，$N$ 表示 24 小時的產量。

$S_5 = \{0, 1, 2, \cdots\cdots M\}$，$M$ 表示安裝的鉚釘數目。

$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}$

$S_7 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$S_8 = \{10, 11, 12, \cdots\cdots\}$

$S_9 = \{V_x, V_y, V_z \mid V_x, V_y, V_z$ 是實數$\}$

$S_{10} = \{h_1, \cdots\cdots h_n \mid h_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots\cdots n\}$

$S_{11} = \{T \mid T \geq 0\}$

$S_{12} = \{$黑球$\}$

$S_{13} = \{f \mid f$ 是可微函數且滿足 $m \leq f(t) \leq M, \forall t\}$

此樣本空間在此所有考慮的例子中牽涉最廣，我們可具體假設在某一地區的溫度從未超過 M 或低於 m，除此限制外，我們必須允許在任何圖形出現時有某種限制的可能性，大體上圖形將不會跳動（亦即，其爲連續函數。另外，圖形是平穩的，亦即其爲可微分函數，於是我們乃有如上所示之樣本空間）。

$S_{14} = \{(x, y) \mid m \leq x \leq y \leq M\}$

亦即 S_{14} 包含所有在二維 x, y 平面之三角形內或三角形上的點。（在本書中，我們將不再提到像 S_{13} 那樣複雜的樣本空間，但是如此的樣本空間是存在的，只是要研究它們，得要更高深的數學知識）

爲了要描述一個實驗的樣本空間，我們必須要清楚分辨所觀測之事物，因此我們將說某個實驗的"一樣本空間"，而不說"有一樣本空間"，S_2，S_3 的差別即在此。

而且實驗的結果也並不一定是數字，例如在 E_3 裏，每一結果是"正面"或"反面"，E_9 和 E_{10} 之結果各爲向量，而 E_{13} 則爲一函數。

樣本空間結果的次數也是很重要的，有三種可能，第一種爲有限的；第二種爲可數無限，第三種爲不可數無限，在前例中，S_1，S_2，S_3，S_4，S_5，S_7 和 S_{12} 爲有限的，S_8 爲可數無限的，S_6，S_9，S_{10}，S_{11}，S_{13}，S_{14} 爲不可數無限。

此時就數學上理想化的樣本空間，和實驗上可信賴的樣本空間之差異加以區別是很值得的。且考慮 E_6 和 S_6，當我們詳盡記錄燈炮的壽命 t 時，顯然我們成了儀器精密度的"犧牲品"。假設我們有一測量儀器能測到小數第二位，如

16.43，由於這種限制，我們的樣本空間變成可數無限｛0.00，0.01，0.02……｝，又我們可以假設燈炮的壽命不會超過H小時，則我們就有了有限的樣本空間｛0.00，0.01……H｝，其個數有$(H/0.01)+1$，若H很大，則此值將非常的大，例如$H=100$。為了簡單和方便起見，我們假定所有$t\geq 0$均為可能結果，則我們與前面的S_6有相同的樣本空間。回想一下上面的敍述，有些樣本空間都被理想化，在以後所有的情況中，所考慮的樣本空間都是最簡單的，在多數的問題裏，對於樣本空間不會有太困難的選擇。

§ 1－5　事件　(Events)

另外的一個基本概念卽事件，一個事件A（對應於與實驗ε有關的樣本空間S），簡單的說卽可能結果的一個集合。就集合論的術語而言，一個事件卽樣本空間S的一個部份集合。回想以前所討論過的，我們就知道S本身乃一事件，而ϕ也是。任何個別可能的結果，均可視為一事件。下面為事件的例子，A_i表與E_i有關的事件。

A_1：出現偶數，亦卽$A_1=\{2,4,6\}$

A_2：$\{2\}$，出現兩個正面。

A_3：$\{HHHH, HHHT, HHTH, THHH\}$卽正面多於反面。

A_4：$\{0\}$，沒有不良品。

A_5：$\{3, 4, \ldots\ldots M\}$，有兩個以上的壞鉚釘。

A_6：$\{t \mid t<3\}$，卽燈炮壽命少於3小時。

A_{14}：$\{(x, y) \mid y=20+x\}$卽最高與最低，差20度。

當S為有限或可數無限時，其每一個部份集合均可視為一事件〔如果S有n個元素，則其部份集合（卽事件）的個數為2^n〕，然而當S為不可數無限時，則情形就不是這樣了！這時並非所有的部份集合均可被視為事件，某些“不被允許的”部份集合必順除外，其理由超出本書範圍，不加贅述，然而很幸運的，這些不被允許的集合在實際應用上並不眞正的發生，因此可以忽略，以後我們所提到的事件時，顯然是可以考慮的事件。

現在我們可以用集合的合成法得到新的集合（事件）。

(a)若A，B為事件，若且唯若A或B發生，（或同時發生），則$A\cup B$為一事件。

(b)若A，B為事件，若且唯若A和B都發生，則$A\cap B$為一事件。

(c)若A為事件，若且唯若A不發生，則$\bar{A}$為一事件。

(d)若A_1……A_n為有限個事件，若且唯若至少有一個A_i發生，則事件$\cup_{i=1}^{n}$發生。

(e)若A_1……A_n為有限個事件，若且唯若所有的事件A_i發生，則事件$\cap_{i=1}^{n}$發生。

(f)若A_1……A^n，……為可數無限個事件，若且唯若至少有一個A_i發生，

則事件 $\cup_{i=1}^{\infty}$ 發生。

(g)若 A_1 ……A_n ……爲可數無限個事件，若且唯若所有的事件 A_i 發生，則事件 $\cap_{i=1}^{\infty}$ 發生。

(h)若 S 爲實驗 Σ 之樣本空間，重覆兩次實驗 Σ，則 $S\times S$ 代表這兩次實驗之所有可能結果，亦即 $(S_1, S_2)\in S\times S$ 代表第一次實驗得 S_1，第二次實驗得 S_2。

(i)推廣(h)的例子，若重覆實驗 n 次，則 $S\times S\cdots\cdots\times S=\{(s_1, s_2\cdots\cdots s_n), s_i\in S, i=1,\cdots\cdots n\}$ 代表重覆實驗 n 次時所有可能的結果，$S\times S\times\cdots\cdots\times S\times S$ 爲 n 次重覆實驗 ε 的樣本空間。

【定義】 如果兩事件 A 和 B 不能同時發生，則稱其爲互斥事件（mutually exclusive），以 $A\cap B=\phi$ 表之，亦即 A 與 B 之交集爲空集合。

【例1－4】 測驗一電子裝置的使用時間 t，並記錄之，我們假定其樣本空間 $S=\{t\mid t\geq 0\}$，三事件 A，B，C 定義如下。

$A=\{t\mid t<100\}$ ； $B=\{t\mid 50\leq t\leq 200\}$

$C=\{t\mid t>150\}$

則

$A\cup B=\{t\mid t\leq 200\}$	$A\cap B=\{t\mid 50\leq t<100\}$
$B\cup C=\{t\mid t\geq 50\}$	$B\cap C=\{t\mid 150<t\leq 200\}$
$A\cap C=\phi$	$A\cup C=\{t\mid t<100$ 或 $t>150\}$
$\overline{A}=\{t\mid t\geq 100\}$	$\overline{C}=\{t\mid t\leq 150\}$

如上一節所討論的，實驗的一項基本特性，是當我們進行實驗時會得到什麼的結果。換句話說，若 A 是與實驗有關的一個事件，則我們無法肯定的說 A 是否會發生，因此對事件 A 給予一數值，表示事件 A 發生的可能性，這是很重要的。這使我們進入機率的領域。

§ 1－6 相對次數 (Relative Frequency)

爲了探求上面的問題的解答，我們考慮下面的步驟，假定我們重複 n 次的實驗之，且令 A 和 B 爲與實驗之有關的事件。n_A，n_B 分別爲在 n 次實驗中 A 及 B 發生的次數。

【定義】 $f_A=n_A/n$ 稱爲重複 n 次實驗 Σ 中；事件 A 的相對次數（Relative Frequeney），則 f_A 有下列的性質，且很容易即可證得。

(a) $0\leq f_A\leq 1$

(b) $f_A=1$ 若且唯若 n 次重複實驗中，每次都是發生 A 事件。

(c) $f_A=0$ 若且唯若 n 次重複實驗中，事件 A 從未發生過。

(d)若 A，B 互斥且若 $f_{A\cup B}$ 代表 $A\cup B$ 之相對次數，則 $f_{A\cup B}=f_A+f_B$

(e)依據 n 次重複試驗且被視爲 n 的函數的 f_A，當 $n\to\infty$ 時，以機率的意義而言，可以說是收斂到 $P(A)$。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【附註】 上面的性質(e)在此有些含糊，在以後的章節中（見12－2）節，對此觀念將解釋更明確，目前簡單的說性質(e)的直覺觀念，亦即觀察次數愈多，則相對次數愈來愈“穩定”，趨近於某一數值，但這和數學上收斂的觀念不同，事實上，在此所述的，並不是數學上的結論，只不過是個經驗的事實。

雖然我們可能從未曾查驗過，但對於這種穩定之現象都有直覺上的體驗，要查驗這些要費相當的長時間和耐力，因爲它需要多次的重複實驗，然而我們可能會是如下例所述的無辜的觀察者。

【例題1－5】 假定我們站在人行道上，且仔細觀察兩鄰近的水泥柱，若天下起雨來了，且我們能夠分別每點的雨滴，並注視其落在那一根水泥柱子，我們一直觀察，並注意其落點。令$x_i = 1$，代表雨點落在某一根柱子。

$x_i = 0$代表落在其他柱子，我們可能得到序列如1，1，0，1，0，0，0，1，0，0，1，很顯然我們不能知道某一雨點會落在那一根柱子上，如果我們計算事件$A =$｛雨點落在第一根柱子｝之相對次數，則其結果爲1，1，2／3，3／4，3／5，3／6，3／7，4／8，4／9，4／10，5／11，……這序列顯示出有相當程度的變動，尤其是在剛開始時，很顯然的，若這樣的實驗繼續無限的進行，則此相對次數的頻率將接近1／2，因爲我們有相當足夠的理由相信一段時間以後，兩根柱子將一樣的潮濕。

對於相數次數的穩定性的觀念，仍然是很直覺的，以後我們將再討論，此性質是說當實驗進行了很多次，事件A發生的相對次數的變動將隨實驗次數的增加而減少，此性質常被稱爲統計規律（Statistical regularity）。

我們對於“實驗”的定義，也有些含糊，什麼時候一個實驗的步驟能用非確定模型來研究呢！我們曾經提過一個實驗必須在不變的條件下重複進行，我們現在再加一項限制即當重複實驗時，將出現統計規律，以後我們將討論一個定理。（稱爲大數法則Law of Large Number），它告訴我們統計規律（statistical regularity）乃是第一項要求（重複性）的結果。

§1－7 機率的基本概念 (Basic Notions of Probability)

再讓我們回想前面的問題，對每一事件A，給予一數值，代表實驗進行時，事件A發生的可能性，我們按下面步驟討論，我們重複試驗多次，且計算其相對次數f_A，而利用此數值。當我們回想到f_A的特性時，很顯然的此數值對於事件A發生的可能性有很明確的指示。而若試驗次數愈多，則相對次數f_A漸漸穩定趨近於一數P，然而却有兩項不太合理的地方：(a)我們知道P之前，n要多大很不明顯，是1000？2000？或是10,000呢。(b)如果我們已完全知道了實驗，且已知事件A，則我們要求的數據不該依實驗者或是憑運氣而定。（例如，對均勻的硬幣，連投十次，可能得到九次正面，一次反面，則事件$A =$｛出現正面｝的相對次數爲9／10，但很可能在下一次的投擲中，其結果剛好相反），我們

所要的是不必由實驗，即可得到這數值。當然對於我們所要求的數值要有意義起見，任何連續的實驗應得到一很接近於此要求數值的相對次數，尤其是重複相當多次的時候。

【定義】 令 ε 為一實驗，S 為與 ε 對應的樣本空間，事件 A 的機率 $P(A)$，滿足下列特性。

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$ (1－3)

(3)若 A，B 為互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(4)若 A_1，A_2，……A_n……為兩兩互斥，則

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_n) + \cdots$$

由性質(3)，我們立即得到：對所有的 n

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

然而性質(3)並不如此，必須在理想化的樣本空間時才會得到這結果。

上列性質的選擇，很顯然是由相對次數的性質所產生的，又前面所提到的統計規律，以後將與機率的此種定義相連接，我們暫且如此說：若 f_A 是由多次試驗得到的，則 $P(A)$ 將會和 f_A 很接近，這結果使我們可以由 $P(A)$ 測量 A 發生的可能性。

目前為止，我們仍不知如何求 $P(A)$，但我們已列出 $P(A)$ 的一些性質。讀者在學會如何計算 $P(A)$ 之前要有耐心（一直到下一章），在討論此問題之前，且讓我們敘述和證明 $P(A)$ 的結果，這些結果是由上面的性質而來，而不視於我們如何去求 $P(A)$。

【定理 1－1】 如果 ϕ 為空集合，則 $P(\phi) = 0$

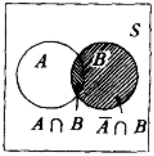
【證明】 對任何事件 A，$A = A \cup \phi$，因 A，ϕ 互為互斥。因此由性質(3)，$P(A) = P(A \cup \phi) + P(\phi) = P(A) + P(\phi)$，故 $P(\phi) = 0$。

【附註】 以後，我們將知道定理 1－1 的逆敘述並不成立，亦即若 $P(A) = 0$，則我們不能說 $A = \phi$，因為有些情況，事件"會"發生，但其機率為0。

【定理 1－2】 若 $\overline{A}$ 為 A 之餘集合，則 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (1－4)

【證明】 由 $S = A \cup \overline{A}$，由特性(2)，(3)，$1 = P(A) + P(\overline{A})$

【附註】 此定理非常有用，因為我們要求 $P(A)$ 時，我們可以求 $P(\overline{A})$ 而後以 $1 - P(\overline{A})$，即得 $P(A)$，我們將會發現求 $P(\overline{A})$ 比 $P(A)$ 簡單多。



【定理 1－3】 若 A，B 是任意兩事件，則

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

【證明】 證明此定理的觀念，在於分解 $A \cup B$ 及 B，

使爲互斥的事件，然後利用性質(3)（是圖 1－2）

因爲 $A\cup B=A\cup(B\cap\bar{A})$

$B=(A\cap B)\cup(B\cap\bar{A})$

因此 $P(A\cup B)=P(A)+P(B\cap\bar{A})$

$P(B)=P(A\cap B)+P(B\cap\bar{A})$

將上面第二式代入第一式，則得到

$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)$

然後得到所要的結果

【附註】 此定理很明顯是性質(3)的推廣，因爲如果 $A\cap B=\phi$ 我們由本定理得到性質(3)的敍述。

【定理 **1－4**】 若 A，B，C 爲任意三個事件，則

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) \quad (1\text{–}6)$$

【證明】 將 $(A\cup B\cup C)$ 視爲 $(A\cup B)\cup C$，由上面的定理即得，證明細節讀者自行導證。

【附註】 此定理有明顯的推廣，令 A_1，A_2 ……A_k 爲 k 個任意事件，則

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{k}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j\ \ r=3}^{k}P(A_i\cap A_j\cap A_r)+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_k) \quad (1-7)$$

此結果可由數學歸納法得到。

【定理 **1－5**】 如果 $A\subset B$，則 $P(A)\le P(B)$

【證明】 因 $B=A\cup(B\cap\bar{A})$，因此 $P(B)=P(A)+P(B\cap\bar{A})\ge P(A)$。〔因爲 $P(B\cap\bar{A})\ge 0$，且 A 及 $(B\cap\bar{A})$ 爲互斥〕

§1－8 重點提要 (Several Remarks)

(a)在此應注意遵守一句話。從前述，我們可得到一個推論（不正確地）：當我們選用某一機率模式以描述某種現象時，並不須其可確定性的關係。事實上亦如此。例如歐姆定律 $I=E/R$ 在某種條件下是成立的，所不同的只是如何解釋罷了。如果我們不把上式解釋作在某一定 E 與 R 值下決定 I 的關係式，而視 E 與 R 是在某不可預測的隨機空間內變動，則 I 亦以某種隨機行爲變動。這個意思是說，當吾人選取一描述電流的機率模式時，我們將 E 與 R 的機率視爲在某不可預測的行爲下變動，而且其行爲只可以機率來描述，因此因爲將 E 與 R 的機率視爲確定值是有意義的，故 I 的機率亦爲確定值亦是有意義的。

(b)應該取用確定模式或機率模式有時候是很難作決定的，因爲這要決定於測

量技術的複雜性及其正確性，例如，正確的度量不易求得時，某種量的重複讀數亦將不同，無疑地，在此情況之下，機率模式較適合。

(c)在某種情況之下，我們必須對實驗結果作某些假設，然後才能計算基本機率。假設的選擇取決於實驗而得的物理性質（如某種對稱性），實證結果，有時候則只是個人就類似問題的經驗而作決定。相對頻率 f_A 在討論 $P(A)$ 的數值分配時是很重要的，而關於 $P(A)$ 所做的假設必須滿足定義1－3之基本定理(1)至(4)。

(d)建立機率理論的基本觀念時，我們將以類似性質的力學觀念作參考。力學裡我們以 $m(B)$ 表物體 B 的質量，就 B 的行為及其與其他物體的關係作各種運算。可得各種結論，有很多關係牽涉到 $m(B)$，我們作此運算時確會對 $m(B)$ 取其近似值，但不影響質量觀念的效用。同理，設事件 A 是某實驗樣本空間之事件，$P(A)$ 為 A 的機率，且滿足基本定理，眞正計算 $P(A)$ 時， 我們確曾作某些假設或根據實證結果而取其近似值。

(e)假設 $P(A)$ 值存在並假設某種性質可以數字表示是很重要的。由此假設而導出的各種結果（理論）的正確性與如何求得 $P(A)$ 值是無關的，此理極明。例如設 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$，應用此關係試以求 $P(A \cup B)$ 時，應先知道 $P(A)$ 與 $P(B)$。在某種情形之下，我們可以作某些假設以求得 $P(A)$ 與 $P(B)$，如果這些假設是正確的，則我們可以應用實驗從眞正的數據求得 $P(A)$ 之近似值，此時，相對頻率 f_A 扮演者一個重要的角色，此估計 $P(A)$。

但是，應切記的一點是，f_A 與 $P(A)$ 並不相同，f_A 只是用在估計 $P(A)$，當我們用 $P(A)$ 時，我們只是用一個假設值。如果 f_A 與 $P(A)$ 相同，則我們必須確知，某實驗近似值取代了假設值。近似值的好壞並不影響模式的邏輯結構。雖然建立模式的時候曾考慮了所要描述的現象，但是當我們進到模式的領域之後，我們就可以置身於所描述的現象之外（至少是暫時的）。

習題

1－1 設若全集合（Universal set 由1到10之自然數所組成）$A = \{2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5\}$，$C = \{5, 6, 7\}$，試舉出下列各集合之元素。

(a) $\overline{A} \cap B$，(b) $\overline{A} \cup B$，(c) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$，(d) $\overline{A \cap (\overline{B \cap C})}$，(e) $\overline{A \cap (B \cup C)}$

1－2 設若全集合 $U = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$ 定義集合 A，B 如下：$A = \{x \mid \frac{1}{2} < x \le 1\}$，$B = \{x \mid \frac{1}{4} \le x < \frac{3}{2}\}$ 試描述下列諸集合

(a) $\overline{A \cup B}$，(b) $A \cup \overline{B}$，(c) $\overline{A \cap B}$，(d) $\overline{A} \cap B$，

1－3 下列關係式何者為眞？

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

(b) $(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B$

(c) $\overline{A} \cap B = A \cup B$, (d) $(\overline{A \cup B}) \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(e) $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C) = \phi$

1－4 假設一全集合包含所有點（x，y），x，y 皆爲整數且位於由線 $x=0$，$y=0$，$x=6$，$y=6$ 所圍成正方形之邊界或內部，舉出下列集合之元素。

(a) $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 6\}$，(b) $B=\{(x, y) \mid y \leq x^2\}$

(c) $C=\{(x, y) \mid x \leq y^2\}$ ， (d) $B \cap C$

(e) $(B \cup A) \cap \overline{C}$ $y=x^2$

1－5 利用文氏圖以建立下列的關係

(a) $A \subset B$，且 $B \subset C$ 得 $A \subset C$　　(b) $A \subset B$ 得 $A=A \cap B$

(c) $A \subset B$ 得 $\overline{B} \subset \overline{A}$　　(d) $A \subset B$ 得 $A \cup C \subset B \cup C$

(e) $A \cap B=\phi$ 且 $C \subset A$ 得 $B \cap C=\phi$

1－6 由生產線上製造出來的良品爲 N（nondefective）不良品爲 D（defective），查驗這些物品，其方式如下：直至連續有兩個壞的物品出現，或四個物品檢查完畢，但不論何者先發生後，此檢驗就停止，試描述此實驗之樣本空間。

1－7 (a)一個箱子有 N 個燈泡，其中 r 個（$v<N$）燈泡的保險絲已斷，現逐次測試這些燈泡，直至找到一個壞的燈泡，試描述此實驗的樣本空間

(b)設若上述之燈泡是逐次測試，直至找到所有壞的燈泡爲止，試描述此實驗的樣本空間。

1－8 四物品 a，b，c，d 設若所列之次序代表此實驗出現之樣本定義事件，A，B 如下：$A=\{a$ 在首位$\}$，$B=\{b$ 在次位$\}$，

(a)列出此樣本空間的所有元素。

(b)列出事件 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 的所有元素。

1－9 一堆物品，其重分別是 5，10，15，……，50 磅，假定每一重量的物品至少有兩件以上。從這堆物品中選取兩件。令 X 表第一件之重，Y 表第二件之重，於是序對（X，Y）表實驗的一結果，利用 $X-Y$ 平面指示樣本空間及下列事件：

(a) $\{X=Y\}$　(b) $\{Y>X\}$　(c)第二件是第一件之兩倍重

(d)第一件比第二件輕 10 磅　(e)兩物品之平均重少於 30 磅

1－10 在 24 小時期間的某一時刻 X，開關撥到“ON”的位置，隨後在某時刻 Y（仍在 24 小時間內），開關撥到“OFF”的位置，以時間的起點爲原點，（X，Y）數對表示此實驗的樣本，且 X 和 Y 在時間軸上以小時計。

(a)試描述樣本空間。

(b)試描述和在 $X-Y$ 平面上繪出下列事件：

(1)此線路有一小時或少於一小時是通的。

(2)此線路在時間 z 是通的，而 z 是在此24小時週期內的一瞬間。

(3) t_1 之前此線路是通的，t_2 之後此線路不通（t_1 和 t_2 是在此24小時週期內的一瞬間且 $t_1 < t_2$ ）。

(4)此線路通的時間是不通時間的兩倍。

1－11 一實驗中有 A，B，C 三種事件，以集合符號表出下列口頭敍述

(a)至少有一事件發生。 (b)僅有一事件發生。

(c)僅有兩事件發生。 (d)不多於兩事件同時發生。

1－12 證明下列定理：若 A，B，C 表三事件則

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

1－13 (a)證明 A_1，A_2 為任何二事件，則 $P(A_1\cup A_2)\leq P(A_1)+P(A_2)$

(b)證明 $A_1\cdots\cdots A_n$ 為任何 n 事件，則 $P(A_1\cup A_2\cdots\cdots\cup A_n)\leq P(A_1)+\cdots\cdots+P(A_n)$

1－14 定理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 表示兩事件 A，B 至少有一事件發生之概率，下列敍述為此兩事件中僅有 A 或 B 發生之概率為 $[P(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ 試證之。

1－15 某一型式的電動馬達，其損壞的原因是由於(1)軸承被卡住，(2)繞線被燒毀，(3)電刷磨損，設若軸承卡住的概率為繞線燒毀的兩倍，而繞線燒毀的概率是電刷磨損的四倍，試問每一種機械現象所造成的損壞概率為何？

1－16 A，B 兩事件 $P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(A\cap B)=z$，以 x，y，z 表出下列概率：

(a) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$，(b) $P(\overline{A}\cap B)$，(c) $P(\overline{A}\cup B)$，(d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

1－17 若有 A，B，C 三事件且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(A\cap B)=P(C\cap B)=0$，$P(A\cap C)=\frac{1}{8}$，計算三事件中至少有一發生之概率為何？

1－18 一裝置包含兩汽鍋和一引擎，事件 A 代表引擎在好的狀況，而事件 B_k（$k=1$，2）代表第 k 個汽鍋在好的狀況，事件 C 表示此裝置可以工作，設若這裝置只要引擎和至少一汽鍋在好的狀況，即為可工作的，試以 A 和 B_ks 來表示 C 和 $\overline{C}$。

1－19 型式Ⅰ和型式Ⅱ，為一機械的兩部分，型式Ⅰ有兩個，型式Ⅱ有三個，定義事件 A_k：$k=1$，2 和 B_j，$j=1$，2，3 如下：

A_k：第 k 個型式Ⅰ有效用，B_j：第 j 個型式Ⅱ有效用。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com