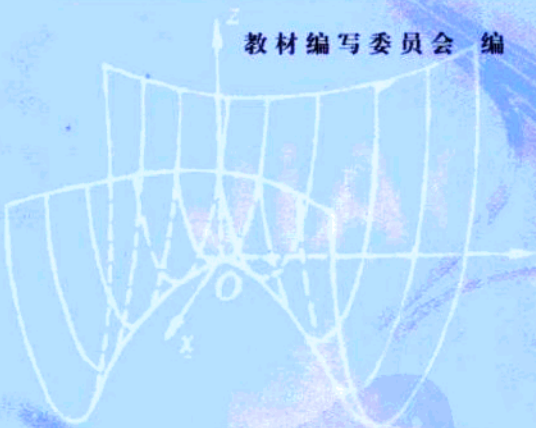
大学专科小学教育专业教材

解析几何

教材编写委员会 编



开明出版社
KAIMING PRESS

大学专科小学教育专业教材

解 析 几 何

教材编写委员会 编

开 明 出 版 社

教材编写委员会

顾　　问：金长泽　孟吉平　瞿葆奎　顾明远　于　漪

主　　任：李家庆

常务副主任：刘树信

副 主 任：朱嘉耀　郭涤尘　焦向英

委　　员：（按姓氏拼音为序）

曹悦群　陈成祖　陈闽杰　董兆杰　方必福
龚浩康　郭涤尘　郭洪亮　韩桑元　胡安良
黄光荣　黄力林　焦向英　靖永厚　李复兴
李家庆　李有彬　李原静　刘树信　刘振杰
牛佳斌　孙海林　王国璋　王洪玉　王伦元
谢广田　杨想森　俞冬伟　于金海　张克勤
张澍荃　郑次甫　朱嘉耀

秘 书 长：于金海

总 编 务：郜舒竹

编　　务：崔　嵘

教材审定专家

（按姓氏拼音排列）

陈美林　丁　忱　段启明　高　原　何雪勤
黄云生　蒋　风　金成梁　匡　兴　赖干坚
李训经　李志阐　刘长安　刘树鑫　刘秀英
梅向明　钱培德　裘宗沪　石生明　童勉之
王金波　王寯骧　王　盛　魏宗宣　奚博先
许自强　殷慰萍　张君达　张炼强　赵总宽
郏　瑢

将方程变形得

$$y^2-\frac{z^2}{9}=1-\frac{x^2}{4},$$

分解成

$$\left(y+\frac{z}{3}\right)\left(y-\frac{z}{3}\right)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

则曲面的两族直母线为

$$\text{第一族:}\begin{cases}\alpha_1\left(y+\dfrac{z}{3}\right)=\alpha_2\left(1+\dfrac{x}{2}\right),\\[2mm] \alpha_2\left(y-\dfrac{z}{3}\right)=\alpha_1\left(1-\dfrac{x}{2}\right).\end{cases}$$

$$\text{第二族:}\begin{cases}\beta_1\left(y+\dfrac{z}{3}\right)=\beta_2\left(1-\dfrac{x}{2}\right),\\[2mm] \beta_2\left(y-\dfrac{z}{3}\right)=\beta_1\left(1+\dfrac{x}{2}\right).\end{cases}$$

将点 $M(2,1,3)$ 代入第一族直母线方程，求得 $\alpha_1=\alpha_2$. 取 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 得第一族过点 M 的直母线为

$$\begin{cases}3x-6y-2z+6=0,\\ 3x+6y-2z-6=0.\end{cases} \tag{12}$$

将点 $M(2,1,3)$ 代入第二族直母线方程，求得 $\beta_1=0$. 取 $\beta_1=0$, $\beta_2=1$ 得第二族过点 M 的直母线方程为

$$\begin{cases}x=2,\\ 3y-z=0.\end{cases} \tag{13}$$

读者不妨验证式⑩和式⑬、式⑪和式⑫是同一条直线.

习 题 5-4

1. 求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 上过点(2,3,4)的直母线方程.

2. 求双曲抛物面$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$ 上过点(4,0,2)的直母线方程.

有箭头的一端叫做向量的终点. 起点是 A,终点是 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 有时用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,…或黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,…来记向量(图 1-1-1). 当然也可以用 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$,…或 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$,…表示.

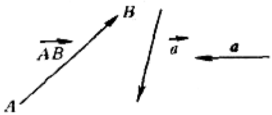


图 1-1-1

向量的大小叫做向量的模,也叫做向量的长度. 我们常在向量记号的两旁加竖线来表示向量的模,例如向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$. 在不致于引起混淆的情况下,也可以用一般的字母来表示向量的模,例如在力学中就有力 $\boldsymbol{F}$ 的大小记作 f 等.

值得注意的是,虽然向量的模是非负实数,可以比较大小,但向量却无所谓大小,即向量不能比较大小. 式子 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 是毫无意义的.

三、几种特殊的向量

模等于零的向量叫做零向量,记作 $\boldsymbol{0}$(或 $\vec{0}$),它是终点和起点重合的向量. 零向量的方向不定,或者说它的方向可以任意给定.

不是零向量的向量叫做非零向量.

模等于 1 的向量叫做单位向量.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,通常记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.

四、向量的平行与垂直

当我们谈及两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行时,意思是指它们所在的直线互相平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;当我们谈及两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时,意思是指它们所在的直线互相垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 同样地,我们可以说

一个向量与一条直线或一个平面的平行与垂直.

五、向量的相等与相反

定义 如果两个向量的模相等且方向相同,那么称这两个向量相等.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

规定:所有零向量都相等.

分别连结两个向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的两个起点 A 和 C 及两个终点 B 和 D,如果 $ABDC$ 组成一个平行四边形(图 1-1-2),那么显然有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

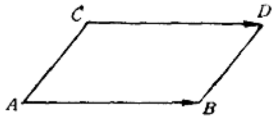


图 1-1-2

可见,两个向量是否相等,与它们的起点无关,只由它们的模和方向决定. 这种起点可以任意选取而只由模和方向决定的向量通常称为自由向量. 也就是说,自由向量是可以任意平行移动而仍代表着和原来同一向量的向量. 在自由向量的意义下,相等的向量都看作是同一的向量. 由于向量起点的任意性,因此,我们可以按需要在空间选定某一点作为所研究的一些向量的共同起点. 在这种情况下,我们就说把向量归结到共同的起点.

定义 模相等而方向相反的两个向量叫做互为反向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记作 $-\boldsymbol{a}$.

规定:零向量的反向量仍是零向量.

显然,$-\boldsymbol{a}$ 的反向量就是 $\boldsymbol{a}$,即 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$;$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$是互为反向量,也就是$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$或$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

六、共线向量与共面向量

如果把彼此平行的一组向量归结到共同的起点,那么这组向量一定在同一条直线上;同样,如果把平行于同一平面的一组向量归结

到共同的起点，这组向量一定在同一个平面上.

定义 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量.

定义 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量.

显然，零向量与任何共线的向量组共线，也与任何共面的向量组共面；一组共线向量一定是共面向量；两个向量必定是共面向量；三个向量中如果有两个向量是共线的；那么这三个向量一定也是共面的.

七、两向量的夹角

定义 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，在空间任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（图 1-1-3），我们把由射线 OA 和 OB 构成的角度在区间$[0,\pi]$上的角，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

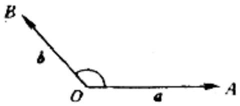


图 1-1-3

由立体几何知，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$与 O 点的选取无关，且由定义知$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.

按定义，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi$；若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，则 $0<\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})<\pi$.

当$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 或 π 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 互相平行；当$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直. 由于零向量的方向不确定，故我们可以认为零向量与任一向量的夹角的角度可以是$[0,\pi]$上的任一个值. 因此也可以认为零向量与任何向量互相平行；零向量与任何向量互相垂直.

八、左手系和右手系

设空间有三个不共面的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，不妨假定它们有共同的起点 O. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 间的相互位置关系与左手张开的拇指、食指、中指相同，那么我们就说三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按顺序构成左手系（或左旋向量

组)(图 1-1-4);如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 间的相互位置关系与右手张开的拇指、食指、中指相同,那么我们就说三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按顺序构成右手系(或右旋向量组)(图 1-1-5).

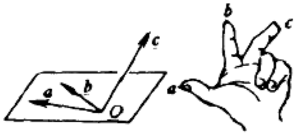


图 1-1-4

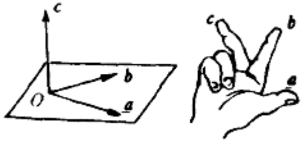
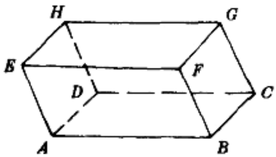


图 1-1-5

习　题　1-1

1. 设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一平行六面体. 在下列各对向量中,找出相等的向量和互为反向量的向量:

(1)$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$;(2)$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CG}$;(3)$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EG}$;(4)$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{GF}$;(5)$\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CH}$.



第 1 题

2. 设 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的上、下底面. 试在向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线向量和共面向量.

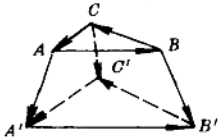
3. 下列情形中,向量的终点各构成什么图形?

(1)把空间一切单位向量归结到共同的起点；

(2)把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的起点；

(3)把平行于某一直线的一切单位向量归结到共同的起点；

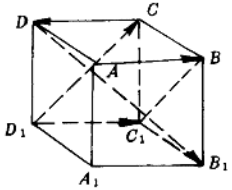
(4)把平行于某一直线的一切向量归结到共同的起点.



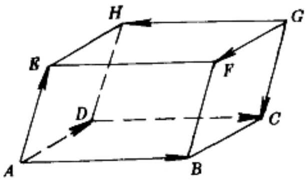
第 2 题

4. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求下列各组向量间的夹角：

(1)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AB_1}$；(2)$\overrightarrow{AB_1}$,$\overrightarrow{D_1C}$；(3)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{D_1C_1}$；(4)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$；(5)$\overrightarrow{AB_1}$,$\overrightarrow{CD}$；(6)$\overrightarrow{AB_1}$,$\overrightarrow{BC_1}$.



第 4 题



第 5 题

5. 设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一个平行六面体，则下列各向量组哪些按顺序构成左手系或右手系？

(1)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$；(2)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AD}$；(3)$\overrightarrow{GF}$,$\overrightarrow{GC}$,$\overrightarrow{GH}$；(4)$\overrightarrow{GC}$,$\overrightarrow{GF}$,$\overrightarrow{GH}$；(5)$\overrightarrow{GF}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}$；(6)$\overrightarrow{GF}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{AE}$.

§1.2 向量的加法

一、向量的加法

在力学中，我们学过力的合成可以用“三角形法则”，也可以用

"平行四边形法则". 力的这种合成法对一般的向量也是有意义的.

定义 设已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,以空间任一点 O 为起点接连作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,得一折线 OAB. 从折线的端点 O 到另一端点 B 的向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量的加法.

根据定义,由图 1-2-1,我们有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$,这种求两个向量和的方法,叫做三角形法则. 由此,再根据图 1-2-2 与向量相等的定义,可得

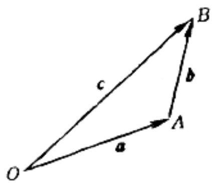


图 1-2-1

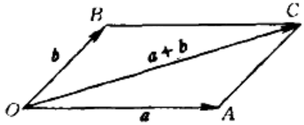


图 1-2-2

定理 1.2.1 设已知两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,把它们归结到共同的起点 O,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$,则对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和,即

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求两个向量和的方法,叫做平行四边形法则.

根据加法的定义,显然有

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

由加法定义还可以知道:

(1)如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都不是零向量,那么

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 仍与 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)同向,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,

若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

若$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$同向，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

(2)如果$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$中至少有一个零向量，那么

当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有一个是零向量时，

若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$；

若$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$.

当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$都是零向量时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$.

因为在三角形中有两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，所以根据图 1-2-1 及上段的讨论，得所谓三角不等式：

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

因为两个向量的和仍是一个向量，所以求两个向量的和可以推广到求几个向量的和. 求几个向量的和就是先求第一个向量与第二个向量的和，再求所得的和与第三个向量的和，等等. 例如

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}]+\boldsymbol{d}, \text{等等}.$$

二、向量加法的运算规律

定理 1.2.2 向量加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

证明 当两向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线时，由图 1-2-2 可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

当两向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线时的情形，留给读者自证。

定量 1.2.3 向量加法满足结合律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

证明 如果，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$中至少有一个是零向量时，那么定理显然成立. 如果$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都不是零向量，那么自空间任意点$O$开始依次引$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$(图 1-2-3)，根据向量加法的定义有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

三、多边形法则

由于向量加法满足交换律和结合律，因此对于有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，不论它们相加的先后顺序与结合顺序如何，求得的和总是一样的，所以可以记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

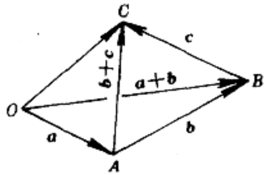


图 1-2-3

三角形法则可以推广到求有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，其方法如下：在空间选定一点 O，作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，这样得折线 $OA_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$. 于是以 O 为起点，A_n 为终点的向量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和(图 1-2-4)：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即 $\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

这种求多个向量和的方法，叫做多边形法则.

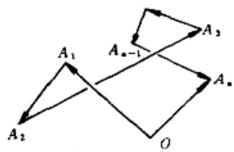


图 1-2-4

四、向量的减法

有了向量的加法，我们可以定义向量的减法.

定义 如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$)，那么我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量的减法.

若以空间某点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$(图 1-2-5)，则以

$\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 事实上，由向量加法的定义知$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，再根据向量减法的定义得$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 这就是向量减法的三角形法则.

关于向量减法，也有三角不等式：

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

利用相反向量，我们可以把向量减法转化为向量加法. 从图 1-2-5 知，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$，而$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BO}=-\boldsymbol{b}$，故

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

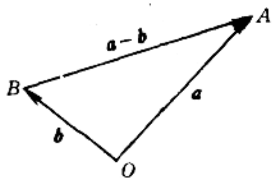


图 1-2-5

定理 1.2.4 减去一个向量，等于加上这个向量的反向量.

因为$-\boldsymbol{b}$ 的反向量是 $\boldsymbol{b}$，所以由定理 1.2.4 又得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

五、径向量

在空间任取一固定点 O，则空间任一点 P 有唯一的向量$\overrightarrow{OP}$与它对应（与 O 点对应的向量是$\overrightarrow{OO}=\mathbf{0}$）；反之，给出以 O 点为起点的任一向量$\overrightarrow{OP}$，其终点对应空间一点 P（零向量对应 O 点）. 这样，空间中点的集合与以 O 点为起点的向量集合之间就建立了一一对应的关系. 我们称向量$\overrightarrow{OP}$为点 P 的径向量（又称径矢，或向径，或位置矢量）. 全体径向量的公共起点 O，叫做径向量的原点. 由于原点 O 取定以后一般不再变动，所以我们又常把 P 点的径向量$\overrightarrow{OP}$简记为 $\boldsymbol{r}$ 或 $\boldsymbol{r}_P$ 等.

在空间任意取定一点 O 作为径向量的原点后，根据向量减法的三角形法则，空间任一向量$\overrightarrow{AB}$（图 1-2-6）可以表示为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A.$$

这种表示法称为向量的径向量表示法. 显然，空间 A，B 两点的

距离为

$$|\overrightarrow{AB}| = |\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A|.$$

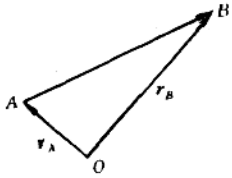


图 1-2-6

例 1　设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=60°$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 及 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解　由图 1-2-7 及余弦定理可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos[180°-\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]\\ &=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos120°\\ &=37,\end{aligned}$$

$\therefore\quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}.$

又
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ &=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos60°\\ &=13,\end{aligned}$$

$\therefore\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}.$

例 2　在平行六面体 $ABCD\text{-}EFGH$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$（图 1-2-8），求对角线向量 $\overrightarrow{AG}$ 和 $\overrightarrow{EC}$.

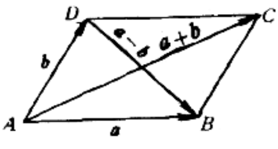


图 1-2-7

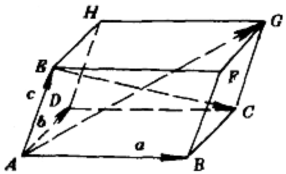


图 1-2-8

解　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$

$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AE}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

例 3　求证$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$的充要条件是$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

证明　在空间任取一点 O,则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$的充要条件是

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$

即

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB},$$

也就是

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$$

例 4　证明:三个两两不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相衔接恰能构成一个三角形的充要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证明　作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,那么两两不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相衔接可以构成三角形的充要条件是 D 与 A 重合,即$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$.

但

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD},$$

所以,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相衔接可以构成三角形的充要条件是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

例 5　用向量法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于 O 点,且互相平分(图 1-2-9).

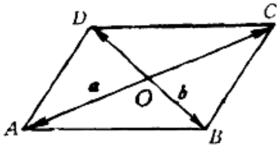


图 1-2-9

设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$,于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

$$\therefore\qquad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$$

从而有$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$,且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,即四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

习　题　1-2

1. 已给两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求作以下向量：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$；(4)$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=11$，$|\boldsymbol{b}|=23$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=30$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

3. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中每两个向量的夹角都是 $90°$，且 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$|\boldsymbol{c}|=2$，试计算 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

4. 证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件是对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

5. 要使下列各式成立，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

§1.3　数量与向量的乘法

一、数乘向量

在实际中，有时需要用一个数量去乘向量. 例如著名的牛顿第二定律 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$ 就是一个典型的例子，因此我们需要建立数量乘向量的运算.

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 它的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 并且当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

我们把上述定义规定的运算叫做数量与向量的乘法，简称数乘向量.

由定义可得

(1)$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2)$-1\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(3) $(-\lambda)\boldsymbol{a}=\lambda(-\boldsymbol{a})=-\lambda\boldsymbol{a}$;

(4) $(-\lambda)(-\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}$.

我们只证明(3)式. 事实上,当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,(3)式显然成立;当 $\lambda\neq 0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,因为 $|(-\lambda)\boldsymbol{a}|=|-\lambda||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, $|\lambda(-\boldsymbol{a})|=|\lambda||-\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 即 $(-\lambda)\boldsymbol{a}$, $\lambda(-\boldsymbol{a})$, $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的模相等. 又因为 $\lambda>0$ 时, $(-\lambda)\boldsymbol{a}$, $\lambda(-\boldsymbol{a})$, $-\lambda\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda<0$ 时, $(-\lambda)\boldsymbol{a}$, $\lambda(-\boldsymbol{a})$, $-\lambda\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 同向. 即 $(-\lambda)\boldsymbol{a}$, $\lambda(-\boldsymbol{a})$, $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 所以它们是三个相等的向量,即(3)式成立.

定理 1.3.1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行)的充要条件是存在由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的唯一实数 λ,使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

证明　(充分性)设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 因为 $\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

(必要性)设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,令 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=m$. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,取 $\lambda=m=0$,则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则取 $\lambda=m$,于是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 同向,且 $|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$,所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则取 $\lambda=-m$,仍得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

最后证明:λ 由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 唯一确定. 因为如果有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{b}$,那么 $|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda'\boldsymbol{b}|$,即 $|\lambda||\boldsymbol{b}|=|\lambda'||\boldsymbol{b}|$,但 $|\boldsymbol{b}|\neq 0$,故 $|\lambda|=|\lambda'|$. 又 λ 与 λ' 的符号显然相同,所以 $\lambda=\lambda'$.

二、数乘向量的运算规律

定理 1.3.2　数乘向量满足数因子结合律,即

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

证明　先证 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 λ、μ 中至少有一个为零时,式子显然成立.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\lambda\mu\neq 0$ 时,由数乘向量的定义,有

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$

$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$