

空间开链和闭链连杆机构运动误差 研究的微小位移合成法

徐卫良 张启先

【摘 要】

本文提出了一种通用性强、适应面广和简单实用的连杆机构运动误差研究的微小位移合成法,该法直接对机构的各个运动参数误差和各个原始误差的微小位移量进行合成,建立机构的运动误差方程。用此法能方便地分析多种原始误差,如长度和角度结构参数(包括理论值为零的结构参数)的误差、运动副间隙和运动副轴线装配歪斜,引起的机构运动误差。与以前各种解析法相比,微小位移合成法无须对机构位移方程或机构约束方程求微分,从而避开了通过位移方程求解误差灵敏度的各种困难,特别当机构复杂和考虑运动副间隙时。本文应用微小位移合成法,建立了一般开链机构(机器人机构)和一般单环(多环)空间连杆机构的运动误差方程。另外就如何灵活选取参考坐标系、计算点和投影轴来简化所要建立的运动误差方程,作了一些讨论。最后,以空间 RCCC 机构,两环空间 RSSR-SC 机构和 PUMA560 工业机器人为例,演示了本文的方法。

引 言

连杆机构运动误差研究的一般方法,主要有微小位移图法和输入输出位移关系的微分法[1]。众所周知,这两种方法只能应用于很简单的平面连杆机构,适用范围极为有限。为了克服上述两种方法的不足和研究各种复杂连杆机构的运动误差,又出现了一些新的误差分析方法。文[2]用封闭形矢量方程代替输入输出位移关系式,分析了由杆长公差引起的连杆机构的运

本文于1986年4月5日收到。

动误差。文[3]通过对机构约束方程组微分,建立了机构运动误差的矩阵方程。文[4]通过解大量的线性方程组,确定误差的灵敏度,从而研究机构的运动误差。上述这些解析方法均须建立机构的位移方程组或约束方程组,并对该方程组求微分。因此,这些解析法的计算量较大,且难以研究运动副间隙和运动副轴线歪斜引起的空间连杆机构的运动误差。另外,文[5]、[6]用误差传递矩阵对机器人机构的误差进行了研究,计算工作量也较大。Э.В.Клюй-ко[7]仿力系平衡条件,提出了确定结构参数误差引起的机构运动误差的“精度平衡法”,但作者没有对所提及的方法进行深入的研究。本文参考文[7],在空间闭链机构的速度分析的基础上,提出了一种适合于空间闭链机构和开链机构的运动误差研究的微小位移合成法,该法直接对机构的各个运动误差和各个原始误差用微小位移矢量进行合成,从而建立机构的运动误差方程。用这种方法能够分析多种原始误差,如长度和角度结构参数(包括理论值为零的结构参数)误差、运动副间隙和运动副轴线装配歪斜,引起的机构运动误差。与以前各种解析法相比,微小位移合成法无须利用位移方程求微分,从而避免了建立位移方程和求误差灵敏度的各种困难,特别当机构复杂和考虑运动副间隙时。并且用该法求出的运动误差具有较为简单的表达式。本文应用微小位移合成法,建立了一般开链机构(机器人机构)和一般单环(多环)空间连杆机构的运动误差方程,并以空间 RCCC 机构、两环空间 RSSR-SC 机构和 PUMA560 工业机器人为例,演示了本文的方法。

微小位移合成法

1. 微小位移合成方程

考察图 1 所示的空间闭链,设点 K_i 为具有相对角位移的两构件的连结点,组成结点 K_{i-1} 的两构件 i 和 $i-1$ 之间的相对转动角速度为 $\vec{\omega}_{i-1}$,点 K_i 相对于点 K_{i-1} 的移动速度为 $\vec{v}_{i-1}$,参考坐标系为 $x_R y_R z_R$ 。

根据运动学可知,构件 i 相对于构件 n 的角速度为

$$\vec{\omega}_i = \sum_{k=1}^i \vec{\omega}_{k k-1}; (\vec{\omega}_{10} = \vec{\omega}_{1n})$$

当构件 i 绕运动链一周回到构件 n , 即 $i=n$ 时,上式就变为

$$\vec{\omega}_n = \sum_{k=1}^n \vec{\omega}_{k k-1} = \vec{0} \quad (a)$$

点 K_i 相对于点 K_0 (作者将它称为计算点) 的速度为

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^i \vec{v}_{k k-1} + \sum_{k=1}^i \left[\left(\sum_{j=1}^k \vec{\omega}_{j j-1} \right) \times \overrightarrow{K_{k-1} K_k} \right]$$

为了便于分析,将上式简化成如下形式,

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^i \vec{v}_{k k-1} + \sum_{k=1}^i \left(\overrightarrow{K_i K_{k-1}} \times \vec{\omega}_{k k-1} \right)$$

当点 K_i 绕运动链一周回到点 K_0 时,上式变为

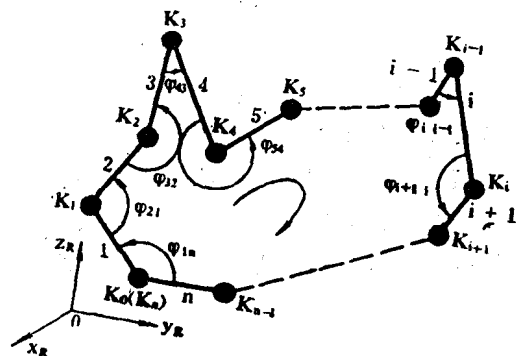


图 1

$$\dot{V}_0 = \sum_{k=1}^n \dot{V}_{kk-1} + \sum_{k=1}^n \left(\overrightarrow{K_0 K_{k-1}} \times \overrightarrow{\omega}_{k-1} \right) = \vec{0} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\omega}_{kk-1} &= \frac{\overrightarrow{\Delta \varphi}_{kk-1}}{\Delta t}; \quad \dot{V}_{kk-1} = \frac{\overrightarrow{\Delta l}_k}{\Delta t} \\ \vec{r}_k &= \overrightarrow{K_0 K_{k-1}}; \quad \vec{l}_k = \overrightarrow{K_{k-1} K_k} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中: $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{kk-1}$ 为角度结构参数和角度运动参数的误差; $\overrightarrow{\Delta l}_k$ 为长度结构参数和长度运动参数的误差; $\vec{r}_k$ 为计算点 K_0 到 $\Delta \varphi_{kk-1}$ 的矢径; $\vec{l}_k$ 为结点 K_{k-1} 到 K_k 的矢径。

将式 (c) 代入式 (a) 和式 (b) 得

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{\Delta l}_i + \sum_{i=2}^n \left(\vec{r}_i \times \overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1} \right) = \vec{0} \quad (2)$$

式中: $\vec{r}_i = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_{i-1}$ 或 $\vec{r}_n = -(\vec{l}_n + \vec{l}_{n-1} + \cdots + \vec{l}_1)$, 具体计算时的 $\vec{r}_i$ 可根据计算方便和简单来选取。

式 (1) 给出了微小角位移 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 的合成方程, 式 (2) 给出了微小线位移 $\overrightarrow{\Delta l}_i$ 和微小角位移 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 的诱导线位移 $\vec{r}_i \times \overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 的合成方程, 这两个方程是关于所有微小位移 $\overrightarrow{\Delta l}_i$ 和 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 的线性方程。为此, 作者统称式 (1) 和式 (2) 为微小位移合成方程, 其中式 (1) 为角误差方程, 式 (2) 为线误差方程。从微小位移合成方程的推导过程中可以知道, 对于计算点 K_0 和参考坐标系, 并没有任何限制。当选择其他计算点和参考坐标系时, 微小位移合成方程的表现形式不变, 只是将 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 和 $\overrightarrow{\Delta l}_i$ 理解为新参考坐标系下的矢量, 将 $\vec{r}_i$ 理解为新计算点到 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}$ 的矢径即可。另外, 由线误差方程式 (2) 可知, 通过计算点 K_0 的角度误差 $\overrightarrow{\Delta \varphi}_1$, 不出现在公式中。因此, 实际应用微小位移合成法时, 尽管对计算点和参考坐标系没有限制, 但合理选择参考坐标和计算点, 并将式 (1) 和式 (2) 向有关坐标轴投影, 就能避开一些中间运动误差变量, 使得所建立的方程较为简单。关于如何选取参考坐标、计算点和投影轴, 将在下一小节进行讨论。

当在图 1 所示的机构的各个构件上都建立坐标系, 设 $(\vec{l}_i)$ 、 $(\overrightarrow{\Delta l}_i)$ 和 $(\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i+1})$ 在坐标系 $x_i y_i z_i$ 内, 并注意到:

$[C_{ji}][\vec{l}_i \times]_i [C_{ij}] = [\vec{l}_i \times]_j$; ($[C_{ij}]$ 是方向余弦矩阵[9]) 时, 式 (1) 和式 (2) 变为

$$\sum_{i=1}^n [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}) = (0) \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta l}_i) + \sum_{i=2}^n [\vec{r}_i \times]_R [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi}_{i-1}) = (0) \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned} [\vec{r}_i \times]_R &= \sum_{j=1}^{i-1} [C_{Rj}] [\vec{l}_j \times] [C_{jR}] \\ &= - \sum_{j=1}^n [C_{Rj}] [\vec{l}_j \times] [C_{jR}] \end{aligned}$$

前面给出的式(1)和式(2)或式(3)和式(4)是关于单环空间机构的误差方程。对于一般多环空间机构,仍可直接利用上述这些公式进行误差分析。

对于图2所示的一般开链工业机器人机构,当选取坐标系 $x_0y_0z_0$ 为参考坐标系,点 P 为计算点时,由式(3)和式(4)可得机器人手部的位姿误差为

$$(\overrightarrow{\Delta\varphi}) = (\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)^T = \sum_{i=1}^n [C_{0i-1}] (\overrightarrow{\Delta\varphi_{ii-1}}) \quad (5)$$

$$(\overrightarrow{\Delta r}) = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T = \sum_{i=1}^n [C_{0i}] (\overrightarrow{\Delta l_i}) + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times]_0 [C_{0i-1}] (\overrightarrow{\Delta\varphi_{ii-1}}) \quad (6)$$

式中: $(\overrightarrow{\Delta\varphi})$ 为手部的姿态误差;

$(\overrightarrow{\Delta r})$ 为手部参考点 P 的位置误差;

其余符号的意义同上。

对于有间隙的空间连杆机构,由式(3)和式(4)可得,机构的运动误差方程为

$$\sum_{i=1}^n [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta\varphi_{ii-1}}) + \sum_{i=1}^m [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta\Phi_{ii-1}}) = (0) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n [C_{Ri}] (\overrightarrow{\Delta l_i}) + \sum_{i=1}^m [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta U_{ii-1}}) + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times]_R [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta\varphi_{ii-1}}) + \sum_{i=1}^m [\vec{R}_i \times] [C_{Ri-1}] (\overrightarrow{\Delta\Phi_{ii-1}}) = (0) \quad (8)$$

式中: $(\overrightarrow{\Delta\Phi_{ii-1}})$ 和 $(\overrightarrow{\Delta U_{ii-1}})$ 是运动副间隙引起的相邻两构件的位姿偏差,由文[8]确定

$$(\overrightarrow{\Delta\Phi_{ii-1}}) = (\Delta\eta_{ii-1}, \Delta\xi_{ii-1}, \Delta\xi_{ii-1})^T;$$

$$(\overrightarrow{\Delta U_{ii-1}}) = (\Delta u_{ii-1}, \Delta v_{ii-1}, \Delta w_{ii-1})^T;$$

式中: n 为结点的数目;

m 为有间隙的运动副的数目;

$\vec{R}_i$ 为计算点 P 到 $\overrightarrow{\Delta\Phi_{ii-1}}$ 的矢径,

其余符号的意义同上。

2. 参考坐标系、计算点和投影轴的选取

对于空间连杆机构,通常按D-H坐标标记法建立坐标系,相邻两构件的坐标系如图3a所示。

由D-H坐标标记法知, x_i 轴是 z_i 和 z_{i+1} 轴的公垂线,即 $x_i \perp z_i$, z_{i+1} ,于是运动误差 $\Delta\theta_j$ 、 $\Delta\theta_K$ 、 Δs_i 和 Δs_j 都垂直于 x_j 轴。为此,当选择坐标系 $x_jy_jz_j$ 为参考坐标系,并取运动误差合成方程式(1)和式(2)或式(3)和式(4)在 x_j 轴的分量时,在运动误差合成方程中,就不会出现运动误差 $\Delta\theta_j$ 、 $\Delta\theta_K$ 和 Δs_i 、 Δs_j 。如对于C—C二动杆和S—C二动杆(图4),当取 x_j 轴为投影轴时,就可分别消去有关运动误差 $\Delta\theta_j$ 、 $\Delta\theta_K$ 、 Δs_i 、 Δs_j 和 $\Delta\beta$ 、 $\Delta\gamma$ 、 $\Delta\theta_K$ 、 Δs_j 。为了便于说明问题,作者将运动误差方程的投影轴简称为投影

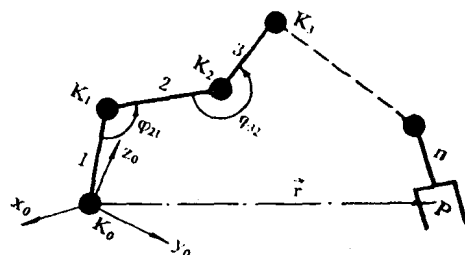


图 2

轴。这样，当灵活选择参考坐标系和投影轴时，就可在误差分析中，避开一些无须求出的中间运动参数误差，并且还能使所建立的误差公式更为简洁。

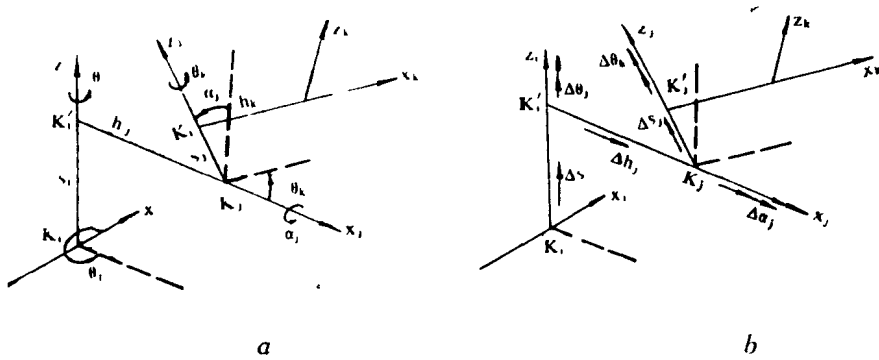


图 3

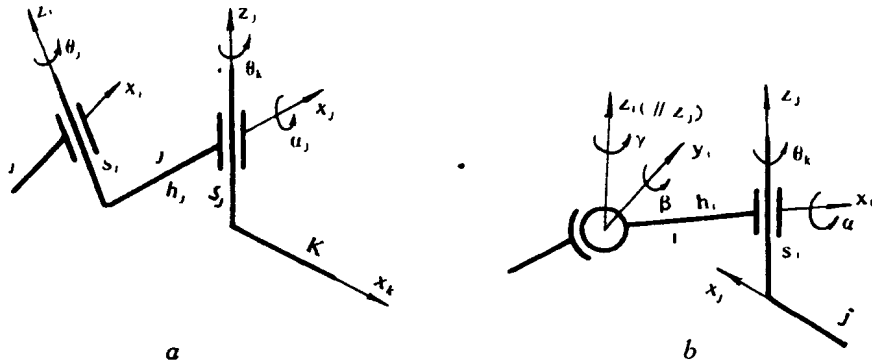


图 4

从式 (2) 的推导过程中可以知道，通过计算点的角度运动参数误差将不出现在误差方程中。因此，利用这一特点灵活选择计算点，就能再减少一个或几个中间角度运动误差。例如计算点选在球面副所在点，就能避开球面副的三个运动参数误差。另外由图 3 知， $\overrightarrow{K_i K_j} \times \Delta \theta$ ，垂直于 x_i 轴，因此，当选择 K_i 点为计算点，取式 (2) 或式 (4) 在 x_i 轴方向的投影时，也能避开运动参数误差 $\Delta \theta_i$ 。

例 题

1. 空间RCCC连杆机构

空间RCCC机构 (图5a) 的输入运动参数为 θ_1 ，输出运动参数为 θ_0 和 s_3 。原始误差为各个结构参数的误差、各个运动副间隙和输入运动参数误差，要求分析该机构的输出运动参数误差 $\Delta \theta_0$ ， Δs_3 。

(1) 输出运动误差 $\Delta \theta_0$ 。

选择坐标系 $x_2 y_2 z_2$ 为参考坐标系，坐标轴 x_2 为投影轴，则由式 (7) 得

$$\left\{ \sum_{i=1}^3 [C_{2i-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i-1}}) + \sum_{i=1}^3 [C_{2i-1}] (\overrightarrow{\Delta \Phi_{i-1}}) \right\}_{x_2} =$$

$$(100) \left\{ [C_{20}] \begin{pmatrix} \Delta \eta_{10} + \Delta \alpha_0 \\ \Delta \xi_{10} \\ \Delta \theta_1 \end{pmatrix} + [C_{21}] \begin{pmatrix} \Delta \eta_{21} + \Delta \alpha_1 \\ \Delta \xi_{21} \\ \Delta \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \eta_{32} + \Delta \alpha_2 \\ \Delta \xi_{32} \\ \Delta \theta_3 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + [C_{23}] \begin{pmatrix} \Delta \eta_{03} + \Delta \alpha_3 \\ \Delta \xi_{03} \\ \Delta \theta_0 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

由此解得

$$\Delta \theta_0 = -\frac{1}{\sin \theta_3 \sin \alpha_3} [\sin \alpha_1 \sin \theta_2 \Delta \theta_1 + (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2) (\Delta \eta_{10} + \Delta \alpha_0) + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2) \Delta \xi_{10} + \cos \theta_2 (\Delta \eta_{21} + \Delta \alpha_1) + \sin \theta_2 \Delta \xi_{21} + (\Delta \eta_{32} + \Delta \alpha_2) + \cos \theta_3 (\Delta \eta_{03} + \Delta \alpha_3) - \sin \theta_3 \cos \alpha_3 \Delta \xi_{03}] \quad (9)$$

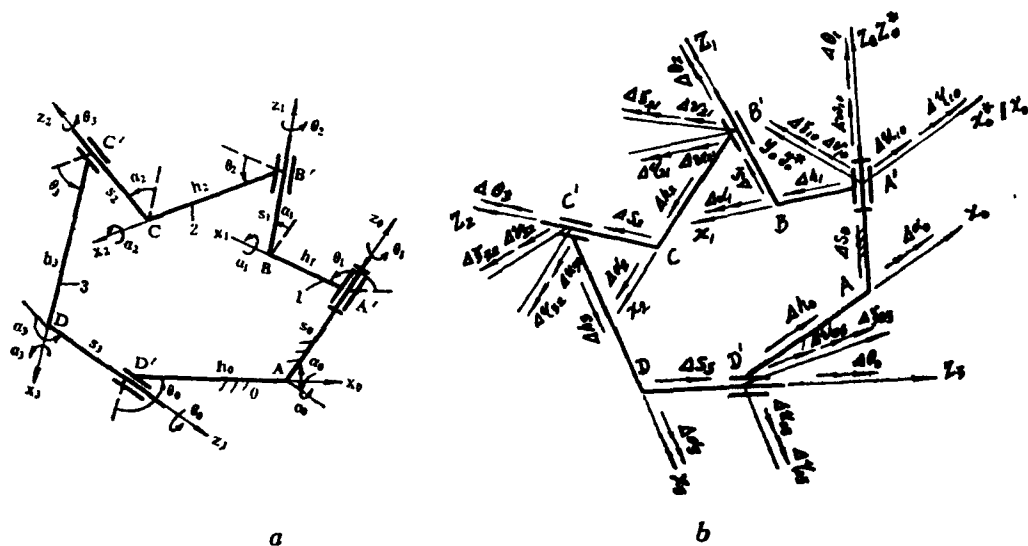


图 5

(2) 输出运动误差 Δs_3

选择点 B' 为计算点，参考坐标系与投影轴不变。则由式 (8) 知

$$\left\{ \sum_{i=0}^3 [C_{2i}] (\overrightarrow{\Delta l_i} + \overrightarrow{\Delta U_{i+1}}) + \sum_{i=0}^3 [\vec{r}_i \times]_2 [C_{2i-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i-1}}) + \sum_{i=0}^3 [\vec{R}_i \times]_2 [C_{2i-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i-1}}) \right\}_{x_2} = (100) \left\{ \begin{pmatrix} \Delta h_2 + \Delta u_{32} \\ \Delta v_{32} \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} + [C_{23}] \begin{pmatrix} \Delta h_3 + \Delta u_{03} \\ \Delta v_{02} \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} + [C_{21}] \begin{pmatrix} \Delta h_1 + \Delta u_{21} \\ \Delta v_{21} \\ \Delta s_1 \end{pmatrix} + [C_{20}] \begin{pmatrix} \Delta h_0 + \Delta u_{10} \\ \Delta v_{10} \\ \Delta s_0 + \Delta w_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \eta_{32} + \cos \theta_3 \Delta \alpha_3 \\ \Delta \xi_{32} + \sin \theta_3 \Delta \alpha_3 \\ \Delta \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{pmatrix} [C_{23}] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& [C_{21}] \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -h_3 \\ 0 & h_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \eta_{03} + \cos \theta_0 \Delta \alpha_0 \\ \Delta \xi_{03} + \sin \theta_0 \Delta \alpha_0 \\ \Delta \theta_0 \end{pmatrix} + \\
& + [C_{23}] \begin{pmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ -s_1 & 0 & h_1 \\ 0 & -h_1 & 0 \end{pmatrix} [C_{10}] \begin{pmatrix} \Delta \eta_{10} \\ \Delta \xi_{10} \\ \Delta \theta_1 \end{pmatrix} \Big\} = 0
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
\Delta s_3 = & -\frac{1}{\sin \theta_3 \sin \alpha_3} \{ \Delta h_2 + \Delta u_{32} + \cos \theta_3 (\Delta h_3 + \Delta u_{03}) - \sin \theta_3 \cos \alpha_3 \Delta v_{03} + \\
& + \cos \theta_2 (\Delta h_1 + \Delta u_{01}) + \sin \theta_2 \Delta v_{21} + (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2) (\Delta h_0 + \\
& + \Delta u_{10}) + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2) \Delta v_{10} + \sin \alpha_1 \sin \theta_2 (\Delta s_0 + \Delta w_{10}) - \\
& - s_2 (\Delta \xi_{32} + \sin \theta_0 \Delta \alpha_3) - (s_2 + s_3 \cos \theta_3) \sin \theta_3 (\Delta \eta_{03} + \cos \theta_0 \Delta \alpha_0) + \\
& + [- (s_2 \cos \alpha_3 + s_3) \cos \theta_3 + h_3 \sin \theta_3 \sin \alpha_3] (\Delta \xi_{03} + \sin \theta_0 \Delta \alpha_0) + \\
& + (s_2 \cos \theta_3 \sin \alpha_3 + h_3 \sin \theta_3 \cos \alpha_3) \Delta \theta_0 + [- s_1 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \\
& + \sin \theta_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_2) + h_1 \sin \theta_1 \sin \alpha_1 \sin \theta_2] \Delta \eta_{10} - [s_1 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \\
& - \cos \theta_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_2) + h_1 \cos \theta_1 \sin \alpha_1 \sin \theta_2] \Delta \xi_{10} + (s_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_2 + \\
& + h_1 \cos \alpha_1 \sin \theta_2) \Delta \theta_1 \} \quad (10)
\end{aligned}$$

在研究连杆点轨迹误差时，须求中间运动误差 $\Delta \theta_2$ 、 $\Delta \theta_3$ 、 Δs_2 、 Δs_1 。至于 $\Delta \theta_2$ 、 $\Delta \theta_3$ 和 Δs_2 、 Δs_1 可分别对式 (9) 和式 (10)，利用角码数字轮换法求得。

2. 两环空间RSSR-SC机构

图 6a 所示为一般 RSSR-SC 空间机构，输入运动参数 θ_1 ，输出运动参数 θ_0 、 θ_4 、 s'_0 。原始误差为所有结构参数误差及输入运动参数误差。要求研究运动误差 $\Delta \theta_0$ 、 $\Delta \theta_4$ 、 $\Delta s'_0$ 。

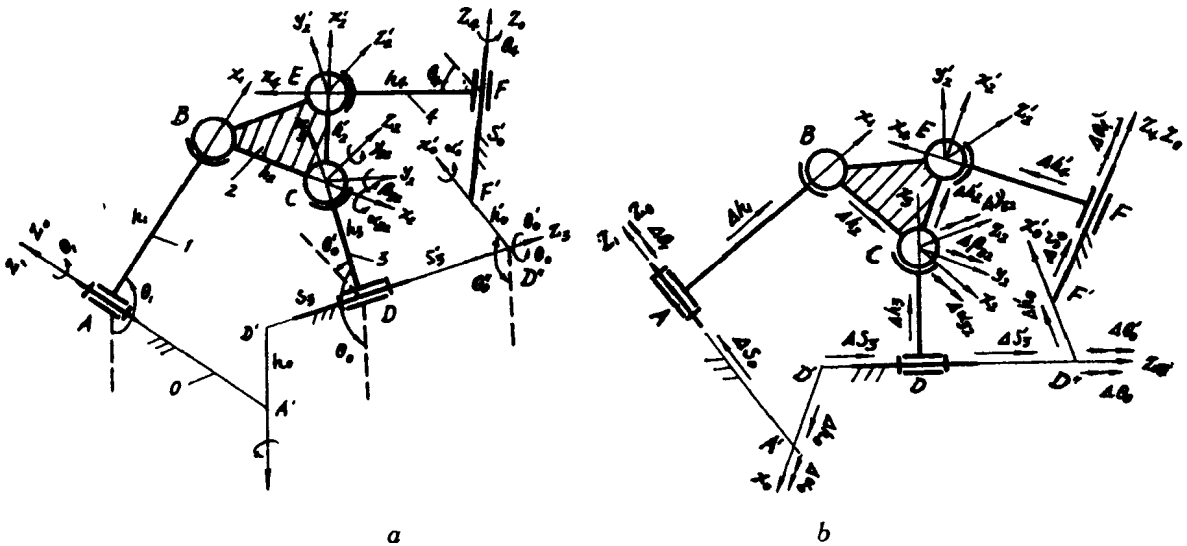


图 6

首先根据点 B 、 C 、 E 在坐标系 $A'x_0y_0z_0$ 内的坐标和 x_2 轴、 y_2 轴在平面 BCE 内及 z_2 轴垂直于 BCE 平面的条件，可分别写出 x_2 轴、 y_2 轴、 z_2 轴在坐标系 $A'x_0y_0z_0$ 内的方向余弦 $(l_1 m_1 n_1)$ 、 $(l'_1 m'_1 n'_1)$ 及 $(l''_1 m''_1 n''_1)$ 。同样，可以写出 x'_2 轴、 y'_2 轴及 z'_2 轴在坐标系 $F'x'_0y'_0z'_0$ 内

的方向余弦 (l_1, m_1, n_1) 、 (l'_1, m'_1, n'_1) 及 (l''_1, m''_1, n''_1) 因此

$$[C_{21}] = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l'_1 & m'_1 & n'_1 \\ l''_1 & m''_1 & n''_1 \end{pmatrix}; [C_{-10}] = \begin{pmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 \\ l''_2 & m''_2 & n''_2 \end{pmatrix}$$

另外, 由该机构的结构知: $\theta_0 = \theta'_0 + \theta''_0$, 其中 θ''_0 是 x_0 轴和 x'_0 轴的夹角, 故

$$\Delta \theta_0 = \Delta \theta'_0 + \Delta \theta''_0 \quad (d)$$

(1) $\Delta \theta_0$

对于 RSSR 四杆机构, 取 B 点为计算点, $x_2 y_2 z_2$ 为参考坐标系, x_2 轴为投影轴, 则由式 (4) 得

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=0}^3 [C_{2i}] (\overrightarrow{\Delta l_i}) + \sum_{i=0}^3 [\vec{r}_i \times]_2 [C_{2i+1}] (\overrightarrow{\Delta q_{i+1}}) \right\}_{x_2} \\ &= (100) \left\{ \begin{pmatrix} \Delta h_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_{23}] \begin{pmatrix} \Delta h_3 \\ 0 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} + [C_{20}] \begin{pmatrix} \Delta h_0 \\ 0 \\ \Delta s_0 \end{pmatrix} + [C_{21}] \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \alpha_{32} \\ \Delta \beta_{32} \\ \Delta \gamma_{32} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{pmatrix} [C_{23}] + \right. \\ & \quad \left. + [C_{23}] \begin{pmatrix} 0 & s_3 & 0 \\ -s_3 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_0 \cos \theta_0 \\ \Delta \alpha_0 \sin \theta_0 \\ \Delta \theta_0 \end{pmatrix} + [C_{21}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 \\ 0 & -h_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \theta_1 \end{pmatrix} \Big\} \\ &= 0 \quad (e) \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \Delta \theta_0 = & \{ (-1) / [h_3 (l_1 \sin \theta_0 + m_1 \cos \theta_0 \cos \alpha_0 - n_1 \cos \theta_0 \sin \alpha_0)] \} \{ \Delta h_2 + (l_1 \cos \theta_0 - \\ & - m_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n_1 \sin \theta_0 \sin \alpha_0) \Delta h_3 + (m_1 \sin \alpha_0 + n_1 \cos \alpha_0) \Delta s_3 + l_1 \Delta h_0 + n_1 \Delta s_0 + \\ & + (l_1 \cos \theta_1 + m_1 \sin \theta_1) \Delta h_1 + \{ -s_3 (l_1 \sin \theta_0 + m_1 \cos \theta_0 \cos \alpha_0 - \\ & - n_1 \cos \theta_0 \sin \alpha_0) \cos \theta_0 + [s_3 (l_1 \cos \theta_0 - m_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n_1 \sin \theta_0 \sin \alpha_0) - h_3 (m_1 \sin \alpha_0 + \\ & + n_1 \cos \alpha_0)] \sin \theta_0 \} \Delta \alpha_0 + h_1 (-l_1 \sin \theta_1 + m_1 \cos \theta_1) \Delta \theta_1 \} \quad (11) \end{aligned}$$

计算点和参考坐标系不变, 但投影轴取 y_2 轴, 则利用式 (4) 可得类似 (e) 的方程, 只是将其中的 (100) 换成 (010), 由这个方程得:

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{32} = & \frac{1}{h_2} \{ (l'_1 \cos \theta_0 - m'_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n'_1 \sin \theta_0 \sin \alpha_0) \Delta h_3 + (m'_1 \sin \theta_0 + \\ & + n'_1 \cos \alpha_0) \Delta s_3 + l'_1 \Delta h_0 + n'_1 \Delta s_0 + (l'_1 \cos \theta_1 + m'_1 \sin \theta_1) \Delta h_1 + [(A_1 + \\ & + A_2) \cos \theta_0 + (B_1 + B_2) \sin \theta_0] \Delta \alpha_0 + (C_1 + C_2) \Delta \theta_0 + h_1 (-l'_1 \sin \theta_1 + \\ & + m'_1 \cos \theta_1) \Delta \theta_1 \} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} A_1 &= -h_2 (l''_1 \cos \theta_0 - m''_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n''_1 \sin \theta_0 \sin \alpha_0) \\ B_1 &= -h_2 (l''_1 \sin \theta_0 + m''_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 - n''_1 \cos \theta_0 \sin \alpha_0) \\ C_1 &= -h_2 (m''_1 \sin \alpha_0 + n''_1 \cos \alpha_0) \\ A_2 &= -s_3 (l'_1 \sin \alpha_0 + m'_1 \cos \theta_0 \cos \alpha_0 - n'_1 \cos \theta_0 \sin \alpha_0) \end{aligned}$$

$$B_- = s_3(l'_1 \cos \theta_0 - m'_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 + n'_1 \sin \theta_0 \cos \alpha_0) - h_3(m'_1 \sin \alpha_0 + n'_1 \cos \alpha_0)$$

$$C_- = -h_3(l'_1 \sin \theta_0 + m'_1 \cos \theta_0 \cos \alpha_0 - n'_1 \cos \theta_0 \sin \alpha_0)$$

$\Delta \theta_0$ 由式 (11) 给出。

(2) $\Delta \theta_4$ 及 $\Delta s'_0$

对于 RSSC 机构, 取 E 点为计算点, $x'_2 y'_2 z'_2$ 为参考坐标系, x'_2 轴和 y'_2 轴为投影轴, 则由式 (4) 得:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=0}^3 [C_2', i] (\overrightarrow{\Delta l_i}) + \sum_{i=0}^3 [\vec{r}_i \times]_2 [C_2', i-1] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i-1}}) \right\}_{x'_2 y'_2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Delta h'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_2', 3] \begin{pmatrix} \Delta h_3 \\ 0 \\ \Delta s'_3 \end{pmatrix} + [C_2', 0'] \begin{pmatrix} \Delta h'_0 \\ 0 \\ \Delta s'_0 \end{pmatrix} + [C_2', 4] \begin{pmatrix} \Delta h_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h'_2 \\ 0 & -h'_2 & 0 \end{pmatrix} [C_2', 2] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_{32} \\ \Delta \beta_{32} \\ \Delta \gamma_{32} \end{pmatrix} + [C_2', 2] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 \\ 0 & -h_4 & 0 \end{pmatrix} [C_4, 0'] + \\ &\left. + [C_2', 0'] \begin{pmatrix} 0 & s'_0 & 0 \\ -s'_0 & 0 & h'_0 \\ 0 & -h'_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \alpha'_0 \\ 0 \\ \Delta \theta'_0 \end{pmatrix} + [C_2', 4] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_4 \\ 0 & -h_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \theta_4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此得关于 $\Delta \theta_4$ 和 $\Delta s'_0$ 的两个线性方程

$$n_2 \Delta s'_0 + A_3 \Delta \theta_4 = A_4$$

$$n'_2 \Delta s'_0 + A_5 \Delta \theta_4 = A_6$$

式中: $A_3 = h_4(-l_2 \sin \theta_4 + m_2 \cos \theta_4)$

$$\begin{aligned} A_4 = & \Delta h'_2 + (l_2 \cos \theta'_0 - m_2 \sin \theta'_0 \cos \alpha'_0 + n_2 \sin \theta'_0 \sin \alpha'_0) \Delta h_3 + (m_2 \sin \alpha'_0 + \\ & + n_2 \cos \alpha'_0) \Delta s'_3 + l_2 \Delta h'_0 + (l_2 \cos \theta_4 + m_2 \sin \theta_4) \Delta h_4 + n_2 h_4 \sin \theta_4 - \\ & - m_2 s'_0 \Delta \alpha'_0 + [h_0 m_2 + h_4(-l_2 \sin \theta_4 + m_2 \cos \theta_4)] \Delta \theta'_0 \end{aligned}$$

$$A_5 = h_4(-l'_2 \sin \theta_4 + m'_2 \cos \theta_4)$$

$$\begin{aligned} A_6 = & (l'_2 \cos \theta_0 - m'_2 \sin \theta'_0 \cos \alpha'_0 + n'_2 \sin \theta'_0 \sin \alpha'_0) \Delta h_3 + (m'_2 \sin \alpha'_0 + n'_2 \cos \alpha'_0) \Delta s'_3 + \\ & + l'_2 \Delta h'_0 + (l'_2 \cos \theta_4 + m'_2 \sin \theta_4) \Delta h_4 + h'_2 \Delta \gamma_{32} + (n'_2 h_4 \sin \theta_4 - m'_2 s'_0) \Delta \alpha'_0 + \\ & + [h_0 m'_2 + h_4(-l'_2 \sin \theta_4 + m'_2 \cos \theta_4)] \Delta \theta'_0 \end{aligned}$$

其中 $\Delta \theta'_0$ 和 $\Delta \gamma_{32}$ 可由式 (d)、(f)、(11) 给出。

解此线性方程组得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s'_0 &= \frac{A_5 A_4 - A_3 A_6}{n_2 A_5 - n'_2 A_3} \\ \Delta \theta_4 &= \frac{n_2 A_6 - n'_2 A_4}{n_2 A_5 - n'_2 A_3} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. PUMA560 机器人

图 7a 所示为 PUMA560 机器人机构的简图。该机器人机构具有如下特殊结构参数: $h_1 = s_2 = h_4 = s_4 = h_5 = s_5 = 0$; $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_5 = \frac{\pi}{2}$ 。设原始误差为 $\Delta \alpha_1$ 、 $\Delta \alpha_2$ 、 $\Delta \alpha_3$ 、 $\Delta \alpha_4$ 、 $\Delta \alpha_5$ 及 Δh_1 、 Δh_4 、 Δh_5 、 Δs_2 、 Δs_4 、 Δs_5 (因为这些误差难以用微分法来研究), 要求分析该机器人的位姿误差。由式 (5) 知, 机器人的手

部姿态误差为

$$\begin{pmatrix} \Delta \varphi_x \\ \Delta \varphi_y \\ \Delta \varphi_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^5 [C_{0,i-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i,i-1}}) \\ = [C_{0,1}] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + [C_{0,2}] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + [C_{0,3}] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + [C_{0,4}] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + [C_{0,5}] \begin{pmatrix} \Delta \alpha_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此得:

$$\Delta \varphi_x = \cos \theta_1 \Delta \alpha_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \Delta \alpha_2 + \cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \Delta \alpha_3 + [\cos \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_4] \Delta \alpha_4 + \{ \cos \theta_1 [\cos (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \sin (\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_5] - \cos \theta_1 \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \} \Delta \alpha_5 \quad (13)$$

$$\Delta \varphi_y = \sin \theta_1 \Delta \alpha_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \Delta \alpha_2 + \sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \Delta \alpha_3 + [\sin \theta_1 \cos (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 + \cos \theta_1 \sin \alpha_4] \Delta \alpha_4 + \{ \sin \theta_1 [\cos (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \sin (\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_5] + \cos \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \} \Delta \alpha_5 \quad (14)$$

$$\Delta \varphi_z = -\sin \theta_2 \Delta \alpha_2 - \sin (\theta_2 + \theta_3) \Delta \alpha_3 - \sin (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 \Delta \alpha_4 - [\sin (\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 \cos \theta_5 + \cos (\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_5] \Delta \alpha_5 \quad (15)$$

由式(6)知, 机器人手部参考点P的位置误差为

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^5 [C_{0,i-1}] (\overrightarrow{\Delta l_i}) + \sum_{i=1}^5 [\vec{r}_i \times]_0 [C_{0,i-1}] (\overrightarrow{\Delta \varphi_{i,i-1}}) = [C_{0,1}] \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + [C_{0,2}] \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_2 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_{0,4}] \begin{pmatrix} \Delta h_4 \\ \Delta s_4 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_{0,5}] \begin{pmatrix} \Delta h_5 \\ 0 \\ \Delta s_5 \end{pmatrix} + \\ + [C_{0,5}] \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \alpha_5 + \Delta \alpha_4 \cos \theta_5 \\ 0 \\ \Delta \alpha_4 \sin \theta_5 \end{pmatrix} +$$

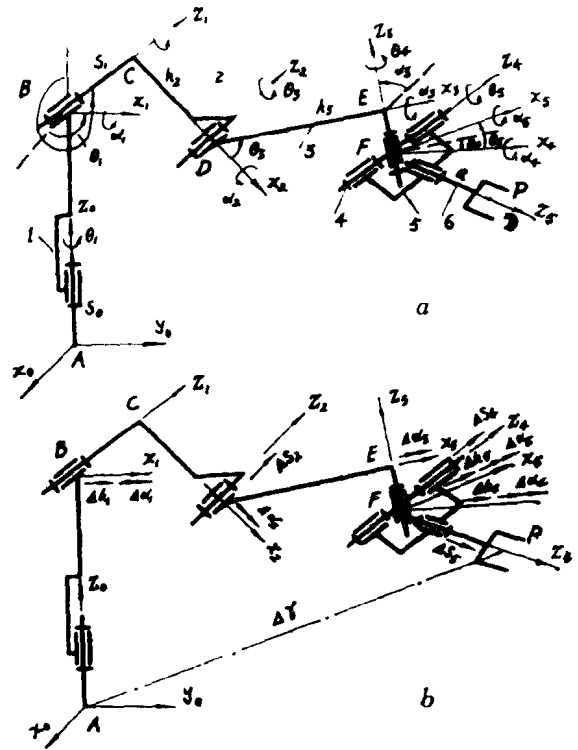


图 7

$$\begin{aligned}
& + \left([C_{05}] \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [C_{53}] \right. \\
& + [C_{03}] \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_3 + \Delta\alpha_2 \cos\theta_3 \\ 0 \\ \Delta\alpha_2 \sin\theta_3 \end{pmatrix} \\
& + \left. [C_{05}] \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [C_{52}] + [C_{03}] \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{pmatrix} [C_{52}] \right. \\
& + \left. [C_{02}] \begin{pmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ -s_1 & 0 & h_2 \\ 0 & -h_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_1 \cos\theta_2 \\ -\Delta\alpha_1 \sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

因此得：

$$\begin{aligned}
\Delta X = & \cos\theta_1 \Delta h_1 - \sin\theta_1 \Delta s_2 + [\cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 - \sin\theta_1 \sin\theta_4] \Delta h_4 - \\
& - [\cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 - \sin\theta_1 \cos\theta_4] \Delta s_4 + \{ \cos\theta_1 [\cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \cos\theta_5 - \\
& - \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_5] - \sin\theta_1 \sin\theta_4 \sin\theta_5 \} \Delta h_5 + \{ \cos\theta_1 [\cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \sin\theta_5 + \\
& + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_5] - \sin\theta_1 \sin\theta_4 \sin\theta_5 \} \Delta s_5 + a [\cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 - \\
& - \sin\theta_1 \cos\theta_4] (\Delta\alpha_5 + \Delta\alpha_4 \cos\theta_5) + \{ -s_3 \sin\theta_1 + a [\sin\theta_1 \cos\theta_5 + \\
& \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 \sin\theta_5] \} \Delta\alpha_3 + [-s_3 \sin\theta_1 \cos\theta_3 + h_3 \sin\theta_1 \sin\theta_3 + \\
& + a (\sin\theta_1 \cos\theta_3 \cos\theta_5 + \sin\theta_1 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \sin\theta_5 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 \sin\theta_5)] \Delta\alpha_2 + \\
& + \{ -h_2 \sin\theta_2 - h_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - s_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) - a [\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \sin\theta_5 - \\
& - \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_5] \} \Delta\alpha_1 \sin\theta_1 \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Y = & \sin\theta_1 \Delta h_1 + \cos\theta_1 \Delta s_2 + [\sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 + \cos\theta_1 \sin\theta_4] \Delta h_4 + \\
& + [-\sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 + \cos\theta_1 \cos\theta_4] \Delta s_4 + \{ \sin\theta_1 [\cos(\theta_2 + \\
& + \theta_3) \cos\theta_4 \cos\theta_5 - \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_5] + \cos\theta_1 \sin\theta_4 \sin\theta_5 \} \Delta h_5 + \\
& + \{ \sin\theta_1 [\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \sin\theta_5 - \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_5] + \\
& + \cos\theta_1 \sin\theta_4 \sin\theta_5 \} \Delta s_5 + a [\sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 - \cos\theta_1 \cos\theta_4] (\Delta\alpha_5 + \\
& + \Delta\alpha_4 \cos\theta_5) + \{ a [\sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 \sin\theta_5 - \cos\theta_1 \cos\theta_5] + \\
& + s_3 \cos\theta_1 \} \Delta\alpha_3 + [s_3 \cos\theta_1 \cos\theta_3 + h_1 \cos\theta_1 \sin\theta_3 + a (\sin\theta_1 \sin\theta_4 \sin\theta_5 - \\
& - \cos\theta_1 \cos\theta_3 \cos\theta_5 + \cos\theta_1 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \sin\theta_5)] \Delta\alpha_2 + \{ h_2 \sin\theta_2 + h_3 \sin(\theta_2 + \\
& + \theta_3) + s_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a [\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \sin\theta_5 - \cos(\theta_2 + \\
& + \theta_3) \cos\theta_5] \} \Delta\alpha_1 \cos\theta_1 \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Z = & -\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \Delta h_4 + \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 \Delta s_4 - [\sin(\theta_2 + \\
& + \theta_3) \cos\theta_4 \cos\theta_5 + \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_5] \Delta h_5 + [-\sin(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_4 \sin\theta_5 + \\
& \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos\theta_5] \Delta s_5 - a \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\theta_4 (\Delta\alpha_5 + \Delta\alpha_4 \cos\theta_5) + a \cos(\theta_2 + \\
& + \theta_3) \sin\theta_4 \sin\theta_5 \Delta\alpha_3 + a \cos\theta_2 \sin\theta_4 \sin\theta_5 \Delta\alpha_2 + (s_2 + a \sin\theta_4 \sin\theta_5) \Delta\alpha_1 \quad (18)
\end{aligned}$$

結 束 語

微小位移合成法能方便地研究各种开链和闭链空间连杆机构的运动误差。当灵活选择参

坐标系、计算点和投影轴时,能使所建立的运动误差方程较为简单。这种方法并能推广到带有闭链的机器人机构的误差研究。

参 考 文 献

- [1] Handia-Luca: "Positional shift determination of Mechanisms by means of transmission" Proc. Sixth World Congress on TMM, 1983, pp205-208.
- [2] K.Lakshminarayana and R.C.Narayanamurthi: "On the analysis of the effect of tolerances in linkage" J.Mech. Vol. 6, 1971, pp59-67.
- [3] 徐卫良等: "确定连杆机构运动误差的矩阵法" 南京工学院学报, 1986年第三期, pp 32-42。
- [4] 张启先: "空间机构的误差分析" 华南工学院讲义, 1981年。
- [5] Chi-haur Wu: "A kinematic CAD tool for the design and Control of a robot manipulator" The International Journal of Robotics Research, Vol3 No.1, 1984.
- [6] A.Kumar, S.Prakash: "Analysis of Mechanical errors in manipulators" Proc.Sixth World Congress On TMM, 1983, pp960-964.
- [7] Э.В.Клюйко: "Тоиностное равновесие механизмов" Известия Вузов Машиностроение, No.12, 1984, pp16-20.
- [8] 徐卫良、张启先: "空间机构的运动副间隙与相邻两构件的相对位姿偏差的关系" 北京航空学院科研报告 BH-B2279。
- [9] 张启先: 《空间机构的分析与综合》机械工业出版社, 1984年。

ON THE METHOD OF COMBINING SMALL DISPLACEMENTS IN STUDYING THE KINEMATIC ERRORS OF SPATIAL OPEN- AND CLOSED-LOOP LINKAGES

Xu Weiliang Zhang Qixian

ABSTRACT

This paper deals with the method of combining small displacements in studying the kinematic errors of spatial open- and closed-loop linkages. The equations of the kinematic errors due to the source errors in a linkage can be established directly through combining small displacements. This approach is rather simple and general. The kinematic errors caused by various kinds of source errors, such as the linear and the angular errors of structure parameters, the clearances in joints and the assembling aberrations of joint axes, can be analysed with-

out any difficulty. Compared with all previous analytical methods, the present method eliminates the necessity of differentiating displacement equations or constraint equations. So it gets rid of many difficulties in setting up displacement equations and in solving the error sensitivities, especially when the linkage is complex and the joint clearances are taken into consideration. In the paper the kinematic error equations of spatial open- and closed-loop linkages are derived. In addition, there is a discussion on how to choose the reference coordinate system and the computing point to simplify the error equations. For illustration, PUMA560 industrial robot linkage, a spatial RCCC linkage and a spatial two-loop RSSR-SC linkage are taken as examples.