萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學
面積

林鶴一　武田登三著

黃元吉譯

商務印書館發行

平面幾何學
面積

林鶴一　武田登三著
黃元吉譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

平面幾何學—面積

林鶴一　武田登三著

黃元吉譯

發行兼印刷者　上海寶山路
商務印書館

上海及各埠

HUANG YUAN CHI
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

B三四分

目　　次

GMT 3/23

平面幾何學　面積

第一章

矩形之面積

下列各項，須先知之。

1. 平面形之**面積**，或單稱**積**，係言其形內所容平面之量也。

2. 兩直線形能疊合者，此兩直線形必相等。然逆言之，兩直線形面積相等者，此兩直線形未必適能疊合。因有此區別，故兩直線形能疊合者，特稱之爲**全等形**。用≡之記號。

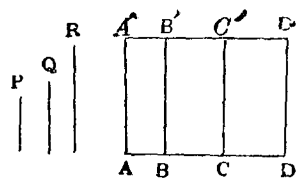
3. 以所定二線分，爲矩形之二鄰邊，則此矩形，即稱之爲**所定二線分所包之矩形**。如 a, b 爲所定之二線分，則此二線分所包之矩形，即以 a,b 之記號表示之

可也。又欲表$(AB+CD)$及$(A'B'+C'D')$二線分所包之矩形，可用$(AB+CD)(A'B'+C'D')$之記號表示之。惟此爲表示矩形之記號，與代數學乘積之記號，意義不同。

4. 以所定一線分，爲正方形之一邊，則此正方形，卽稱之爲所定**一線分上之正方形**。如AB爲所定之一線分，則此一線分上之正方形，卽以$\overline{AB}^2$之記號表示之。此亦不與代數學二乘冪同意。

5. 於一線分上任定一點，是爲**內分**。於一線分之延長線上任定一點，是爲**外分**。由所分之點至線分之兩端，各爲**分**。外分之二分，易誤會，宜注意。

定理 1. 此一線分與彼若干線分和所包之矩形，等於彼若干線分各與此一線分所包各矩形之和。



題意 此一線分爲H. 彼若干之線分爲P, Q, R, 則

$$H.(P+Q+R)=H.P+H.Q+H.R.$$

證. $AA'=H,\ AB=P,\ BC=Q, CD=R.$

$\therefore\quad AD=P+Q+R.$

作AA', AD所包之矩形$ADD'A'$,

由 B,C 兩點,作 AD 之垂線,與 $A'D'$ 相交於 B',C' 兩點。

如是則 $\square AD'=\square AB'+\square BC'+\square CD'$.

然 $\square AD'=H.(P+Q+R)$,

$\square AB'=H.P$,

$\square BC'=H.Q$,

$\square CD'=H.R$.

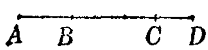
故 $H.(P+Q+R)=H.P+H.Q+H.R$.

注意 此定理所演之式,與代數學公式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 雖屬相當。然其意味,各不相同。蓋代數學所用之文字,係代數。此定理所用之文字,係代直線,非數也。故幾何學之式,與代數學之式,勿渋混同,宜注意。

系. 同以一線分爲一邊之各矩形和,等於所同之一邊與他邊和所包之矩形。

主要問題 1. 於一直線上,順次取 A,B,C,D 四點,得式如次:

$$AC.BD=AB.CD+AD.BC.$$ 試證明之。



證。$AC.BD=(AB+BC).BD$

$=AB.BD+BC.BD$

$=AB.(CD+BC)+BC.BD$

$=AB.CD+AB.BC+BC.BD$

$=AB.CD+(AB+BD).BC$

$=AB.CD+AD.BC.$

注意. 此問題爲尤拉 (Euler) 之定理。

例 題 I

1. 此二線分之差與彼一線分所包之矩形,等於此二線分各與彼

一線分所包兩矩形之差。

2. 二矩形有一邊相同者，此二矩形之差，等於所同之一邊與他二邊差所包之矩形。

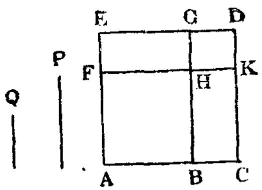
3. 一線分，內分或外分爲二分，則全線上之正方形，等於二分各與全線所包兩矩形之和或差。

4. 二線分各分爲二部分則二全線所包之矩形，等於一線分上之二部分各與他線分上二部分所包各矩形之和。

注意。 此蓋與代數學公式

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd \text{ 相當}$$

定理 2. 二線分和上之正方形，等於各線分上正方形之和加二線分所包矩形之二倍。



題意、 P,Q 爲二線分，

$$(P+Q)^2=P^2+Q^2+2P.Q$$

證。 於直線 ABC 上，取 $AB=P, BC=Q$，乃作 AC 上之正方形 $ACDE$。由 B 點作 AC 之垂線 BG，ED 交於 G。

又於 AE 上取 $AF=P$ 由 F 點作 AE 之垂線 FK。與 CD 交於 K。FK,BG 之交點爲 H。

如是則 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{HK}^2+KC.BC+FH.FE.$

即 $(P+Q)^2=P^2+Q^2+P.Q+P.Q$

$=P^2+Q^2+2P.Q.$

別法。 $(P+Q)^2=(P+Q)(P+Q)$

$=(P+Q).P+(P+Q).Q$　〔定理 1〕

$=P^2+P.Q+P.Q+Q^2$　〔定理 1〕

$=P^2+2P.Q+Q^2.$

注意。 此定理與代數學公式

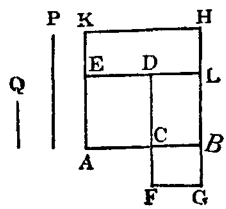
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

雖屬相當。然其意味各不相同。

定理 3. **二線分差上之正方形，等於各線分上正方形之和內減二線分所包矩形之二倍。**

題意。 P,Q 爲二線分

$$(P-Q)^2=P^2+Q^2-2PQ.$$



證。 於直線 ACB 上取 $AB=P$, $CB=Q$, 乃作 AC 上之正方形 $ACDE$, 又作 AB 上之正方形 $ABHK$, 而 BC 上之正方形 $BCFG$, 係作於反對之側。

如是則 AEK, FCD, GBH 各成爲一直線。

乃延長 ED, 使與 BH 交於 L。

如是則
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-KH.KE-FD.FG\\&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-AB.BC-AB.BC\\&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB.BC.\end{aligned}$$

即 $(P-Q)^2=P^2+Q^2-2P.Q.$

別法。
$$\begin{aligned}(P-Q)^2&=(P-Q)(P-Q)\\&=(P-Q).P-(P-Q).Q\\&=P^2-P.Q-P.Q+Q^2\\&=P^2+Q^2-2P.Q.\end{aligned}$$

注意。 此證與代數學公式

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ 相當。

主要問題 2. 於 AB 線分上，二等分於 C; 又任意分之於 D, 得式如次:

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2,$$ 試證明之。

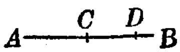
證。 $\overline{AD}^2=(AC+CD)^2$

$=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+2AC.CD$……(1)

$\overline{BD}^2=(BC-CD)^2$

$=(AC-CD)^2$

$=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2AC.CD$……(2)



(1)+(2)…………$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2$.

例題 II

1. 設 C 爲線分 AB 之中點，則 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$，試證明之。

2. 由二線分和之正方形，減其差之正方形，必適等於二線分所包矩形之四倍。

3. 就所定之線分，分爲三分，使各分上正方形之和爲最小。

4. 就所定之線分，分爲三分，則全線上之正方形等於各分上正方形之和加各二分所包矩形之倍。

注意. 本題係與代數學公式

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 相當。

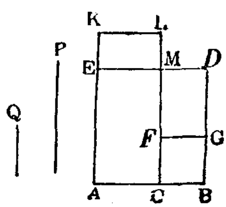
5. 分 AB 線分於 C。令 $\overline{AC}^2=2\overline{BC}^2$ 得式如次，

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AB.AC$，試證明之。

6. 分 AB 線分於 C，令 $AC.AB=\overline{BC}^2$，

得式如次： $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{BC}^2$， 試證明之。

定理 4. 二線分上各正方形之差，等於二線分之和與差所包之矩形。



題意. $P.Q$ 爲二線分。

$P>Q$

當 $P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)$

證。作 AB，令等於 P.

於 AB 上取 BC 等於 Q，故 AC 等於 $P-Q$.

乃於 AB,BC 上各作正方形 $ABDE,BCFG$.

延長 AE，令 $EK=Q$.

延長 CF，令 $FL=P$，與 ED 交於 M.

如是則 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=AC.AE+FG.FM$.

然 $FG.FM=EM.EK$

故

$$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=AK.AC$$
$$=(AE+EK)(AB-BC)$$
$$=(AB-BC)(AB-BC).$$
$$P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q).$$

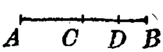
注意。此定理與代數學公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 相當。

主要問題 3. 分一線分爲二分，此二分所包之矩形，等於半全線上之正方形與由中點至分點間距離上正方形之差。

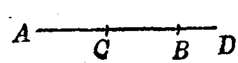
題意。C 爲線分 AB 之中點，D 爲任意之分點，當

$$AD.BD=\overline{AC}^2\sim\overline{CD}^2$$



證。

$$AD.BD=(AC+CD)(BC\sim CD)$$
$$=(AC+CD)(AC\sim CD)$$
$$=\overline{AC}^2\sim\overline{CD}^2$$



〔定理 4〕

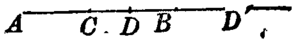
例　題　III.

1. 將線分 AB 二等分於 C,又任意分之於 D,得式如次,
$\overline{AD}^2 \sim \overline{BD}^2 = 2AB.CD$,試證明之。

2. 各矩形二邊之和有定長。則此各矩形中面積最大者。其二邊必係相等,試證明之。

3. 周圍相等之各矩形中求其面積之最大者若何。

4. 將線分 AB,內分或外分於 D, D', 而 C 爲 AB 之中點,得式如次:



$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{CD}^2 + 2AD.BD$

及 $\overline{AD'}^2 + \overline{BD'}^2 = 4\overline{CD'}^2 - 2AD'.BD'$,試證明之。

第二章

平面形之面積

第一節

直線形之面積

下列各項,須先知之。

1. 平行四邊形任以一邊爲底邊,底邊與其對邊之距離,卽平行四邊形之高。矩形任以一邊爲底邊,底邊之鄰邊,卽矩形之高。故所謂底邊與高者乃相提而並論。以何者爲底邊卽可見何者之爲高矣。

2. 三角形由其頂點至底邊作垂線,此垂線卽三角形之高。

3. 梯形之高卽平行二邊之距離,而平行之二邊,皆爲底邊,稱爲上底,下底。

4. 任於平行四邊形對角線上取一點,由此點作平行於各邊之直線,卽分原形爲四形,仍各爲平行四邊形。此四形中,有二形以原對角線爲對角線,故稱此二形爲附於對角線之平行四邊形。其他二形稱爲餘形。

定理5. 凡平行四邊形,同在一底邊上,又同在於二平行線之間,其面積必相等。