目　　录

第二篇　积　分　学

第一章　不定积分

第二章　有理函数的积分法

第三章　简单无理函数与超越函数的积分法

第四章　定积分

第四篇　多元函数微分学

第七章　多元函数微分法

第八章　隐函数

第九章　微分学在几何上的应用

第三篇 积 分 学

第一章 不定积分

在许多生产实际问题中，我们时常遇见的并不是由给定的函数关系去求它的导数。相反的，恰是由某个函数的导数出发，去求此函数，也就是要研究微分运算的逆运算问题。这是本章讨论的中心。

§1.原函数与不定积分的概念

如某物体的运动规律由方程

$$S=f(t)$$

给出，其中t是时间，S是物体经过的距离。函数$f(t)$对t的导数

$$v=f'(t),$$

就是物体运动在已知时刻t的瞬时速度。

但是在力学中时常遇见这样的问题，如果已知物体的运动速度v（就是已知函数$f'(t)$），求物体的运动规律（就是求函数$f(t)$）。

定义：在某个巨间上定义一个函数$f(x)$，如果存在一个函数$F(x)$，在此区间上任何一点都有

$$F'(x)=f(x),$$

则函数$F(x)$叫做**已知函数$f(x)$的原函数。**

例如，运动规律：

$$S=\frac{at^2}{2}\quad(a\text{是常数})$$

是速度

$$v=at$$

的原函数。事实上，$\left(\frac{at^2}{2}\right)'=at$。显然，运动规律：$\frac{at^2}{2}+3$，$\frac{at^2}{2}-\pi$ 或一般的$\frac{at^2}{2}+b$(b是任意常数)也都是速度$v=at$的原函数，因为，它们的导数都是at。

又如 $$(-\cos x)'=\sin x,$$

所以，函数$-\cos x$是函数$\sin x$的原函数。

$$\left(\frac{1}{3}x^3+2\right)'=x^2,$$

所以，函数$\frac{1}{3}x^3+2$是函数x^2的原函数。

假如已知函数f(x)存在原函数F(x)，那么原函数是否是唯一的呢？由原函数的定义不难知道，如果函数F(x)是函数f(x)的原函数，那么函数族F(x)+c（c是任何实数）中任何一个函数也是函数f(x)的原函数。即一个函数如果存在原函数，它的原函数必有无穷多个，因而破坏了唯一性。那末这无穷多个原函数中，除了F(x)+c的形式以外是否还有另外形式的函数，它也是函数f(x)的原函数呢？回答这个问题有下面的定理：

定理 如果函数f(x)有原函数F(x)，则函数f(x)的无穷多个原函数仅限于F(x)+c（c是任意常数）的形式。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

证明 已知$F(x)$是$f(x)$的原函数，即

$$F'(x)=f(x). \tag{1}$$

又假定函数$\Phi(x)$是函数$f(x)$的任何一个原函数，即

$$\Phi'(x)=f(x). \tag{2}$$

（我们证明：函数$\Phi(x)$必是$F(x)+c$的形式）

（1）与（2）式相减：

$$\Phi'(x)-F'(x)=[\Phi(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0.$$

由第一册§41，定理，得

$$\Phi(x)-F(x)=c \qquad (c\text{是某一个常数})$$

或 $$\Phi(x)=F(x)+c$$ 证完

我们不仅知道，一个函数的原函数有无穷多个，这个定理还告诉我们，这无穷多个原函数彼此仅相差一个常数。因之，如果欲求函数$f(x)$的所有的原函数，只需求得函数$f(x)$的一个原函数，然后再将它加上一个任意常数，就得到所有的原函数。这样一来，求所有原函数的问题就变成求一个原函数了。问题简化了许多。

求已知函数的原函数过程叫做该函数的**积分法**。所以，积分法是从某一个函数的导数还原为这个函数本身的过程。如果把这个过程看成是一种运算，那么我们可以说，积分法是微分法的逆运算。

定义 已知函数$f(x)$的所有原函数$F(x)+c$（c是任意常数），叫做函数$f(x)$（或微分$f(x)dx$）的**不定积分**。用下列符号表示：

$$\int f(x)dx=F(x)+c.$$

$$[(F(x)+c)'=f(x)]$$

在这个符号中，函数$f(x)$叫做**被积函数**，而$f(x)dx$叫做**被积表达式**。

例如　因$(-\cos x+c)'=\sin x$　（c是任意常数）所以，函数$\sin x$的不定积分是函数$-\cos x+c$，即

$$\int \sin x dx=-\cos x+c.$$

因为

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2,$$

所以，函数x^2的不定积分是函数$\frac{x^3}{3}+c$，即

$$\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+c.\quad（c是任意常数）。$$

从不定积分的定义可直接推出下列性质：

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$，$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

事实上，若函数$F(x)$是函数$f(x)$的原函数，即$F'(x)=f(x)$。

$$d\int f(x)dx=d(F(x)+c)=F'(x)dx=f(x)dx,$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x).$$

即不定积分的微分就等于被积表达式。当微分号“d”位于积分号“$\int$”前边时，可互相消去，不定积分的导数等于被积函数。

2. 因为F(x)是函数F′(x)的原函数，有

$$\int F'(x)dx = F(x) + c,$$

或改写为

$$\int dF(x) = F(x) + c$$

即当积分号“$\int$”位于微分号“d”之前时，也可以互相消去，但是必须在函数F(x)之后加上一个任意常数。

例 $\int d\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + c$.

$$\int d\arcsin x = \arcsin x + c.$$

函数的不定积分（原函数族）有下述几何意义。由导数的几何意义，$F'(x) = f(x)$，原函数F(x)在平面上表示那样一种曲线，该曲线上横坐标为x的一点处的切线斜率恰好等于函数f(x)在x处的函数值。

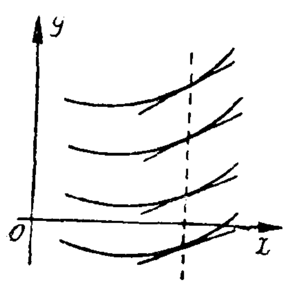

图1

换句话说，在原函数F(x)的曲线上横坐标为x的一点的切线斜率由f(x)所确定。显然，若将原函数F(x)的曲线平行于y轴移动时，对应点的斜率不变。所以，平行y轴移动所得的曲线，皆是原函数F(x)的图形（如图1）。平行移动就相当于把纵坐标加上一个常数c。

例1.已知曲线的切线斜率$k=2x$，它是随x而变化的，

(1)求这种曲线的方程；

(2)若曲线经过点（0，1），求此曲线方程。

解：(1)设这种曲线的方程为$y=F(x)$，（$F(x)$是未知函数）

则 $F'(x)=f(x)=2x$。

所求的$F(x)$必包含在下面的不定积分中

$$\therefore \quad y=F(x)=\int f(x)dx=\int 2xdx$$

故 所求的曲线方程是$y=F(x)=x^2+c$ （c是任意常数）

(2) $\because$曲线过点（0，1），

$\therefore 1=0^2+C$ 即 $C=1$

故 所求曲线方程是 $y=x^2+1$

§2. 基本积分表

从不定积分定义可知，任何一个导数（或微分）公式，只要反过来从右向左读，就得出相应的积分公式。因此从第一册§34的导数公式表或第一册§36的微分公式表，很容易推出下列基本积分表：

1. $\int 0\,dx=c$。

2. $\int 1dx=x+c$。 并且，一般说来

$$\int a\,dx=ax+c$$

其中a是任意常数。

3. 对任何一常数$a \neq -1$，又$x>0$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c.$$

4. 当$x>0$时，

$$\int x^{-1} dx = \ln x + c.$$

当$x<0$时，函数$\ln(-x)$的导数为$\frac{1}{x}$，

即$\int x^{-1} dx = \ln(-x) + c.$

故不论$x>0$或$x<0$我们都有一般公式

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

5. $\int e^x dx = e^x + c.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$

其中$a>0$且$a \neq 1$。

7. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

8. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c.$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c$.

13. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$.

14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$.

求不定积分的方法较多，技巧也很高。需要经过一段时间的练习才能逐步地掌握这些方法与技巧。但是基本积分表中的公式是学习与掌握不定积分运算方法和技巧的基础。为此，读者首先要把本节中的公式记熟，以备今后练习时应用。

§3 最简单的积分法则

1.若a是任意常数($a \neq 0$)，则

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

即若被积函数带有常数因子，可将常数提到积分号之外。

事实上，

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x).$$

2.如果$y = u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n$是x的n个函数的代数和，并且不定积分$\int u_k dx$存在，则不定积分$\int y dx$也存在，并且

$$\int y dx = \int u_1 dx \pm \int u_2 dx \pm \cdots \pm \int u_n dx. \quad (1)$$

即函数代数和的积分等于每个函数积分的代数和。

事实上，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\left(\int u_1 dx \pm \int u_2 dx \pm \cdots \pm \int u_n dx\right)'$$

$$= \left(\int u_1 dx\right)' \pm \left(\int u_2 dx\right)' \pm \cdots \pm \left(\int u_n dx\right)'$$

$$= u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n = y.$$

例1.求 $\int(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3)dx$.

$$\int(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3)dx$$

$$= \int 4x^3 dx - \int 2x^2 dx + \int 5x dx + \int 3 dx$$

$$= 4\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 5\int x dx + 3\int dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 3x + c.$$

$$= x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + c$$

（每一次积分都添上一个任意常数是不必要的，因为若干个任意常数的总和可以用一个任意常数来代替）。

例2.求 $\int(1-2x)^2\sqrt{x}\,dx$.

$$\int(1-2x)^2\sqrt{x}\,dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{5}{2}}\right)dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - 4\int x^{\frac{3}{2}} dx + 4\int x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}x+\frac{4}{7}x^2\right)+c.$$

例3.求 $\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

$$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+c.$$

例4.求 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$.

$$\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}$$

$$=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+c.$$

例5.求 $\int(10^x+\mathrm{ctg}^2x)dx$.

$$\int(10^x+\mathrm{ctg}^2x)dx=\int10^xdx+\int\mathrm{ctg}^2xdx$$

$$=\int10^xdx+\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int10^xdx+\int\frac{dx}{\sin^2x}$$

$$-\int dx=\frac{10^x}{\ln10}-\mathrm{ctg}x-x+c.$$

练　习　一

1.求下列不定积分：

(1) $\int6xdx$；　(2) $\int(\sqrt{x}-0.24x+0.36x^3)dx$；

(3) $\int \frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}dx$;

(4) $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$;

(5) $\int \frac{x^2-4}{x-2}dx$;　(6) $\int (1+tg^2x)dx$;

(7) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;

(8) $\int \frac{4\cdot 3^x-7\cdot 2^x}{3^x}dx$;

(9) $\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx$;

(10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-2(1-x^2)}{1-x^2}dx$.

2.试证函数$y=\ln(ax)$和$y=\ln x$是同一函数的原函数。

3.一物体的运动速度$v=3t^2+4t$米/秒，当t等于2秒时，这物体经过的路程$S=16$米，试求物体的运动方程。

4.在积分曲线族$y=\int 5x^2dx$中，求一通过点($\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$)的曲线。

§4　分部积分与变量替换

能够用基本公式表中的公式求得不定积分的函数，在初等函数类中是为数不多的，也就是尚有很多很多的函数，求它的不定积分不能直接应用基本公式表中的公式。本节所讲

的分部积分法以及变量替换法都是求原函数的最基本而常有效的方法。不管求不定积分用什么方法，都是从一个最基本的原则出发，这原则是：**通过分部积分法或变量替换法将被积函数简化，一直简化到能够应用基本积分公式表中的某些公式求得出原函数为止。**

一、分部积分法

若u,υ皆是x的可微函数，则由微分公式有：

$$(u\cdot \upsilon)' = u\upsilon' + \upsilon u'$$

对此等式两边取积分，得

$$u\upsilon = \int (u\upsilon' + \upsilon u')dx,$$

由§3性质2，有

$$u\upsilon = \int u\upsilon' dx + \int \upsilon u' dx.$$

移项，得

$$\int u\upsilon' dx - u\upsilon - \int \upsilon u' dx.$$

(1)式叫做**分部积分公式**

分部积分法在求不定积分的过程中，起了化繁为简的作用。时常会遇到这种情形，求函数uυ'的不定积分不能直接使用基本积分公式。而υu'的不定积分却很容易求出。在这种情况下，用分部积分法的公式(1)就把求uυ'的不定积分化成为求υu'的不定积分了。此时就显出了分部积分法的优

越性。

求某些函数（如$\ln x$等）的不定积分，只能够应用分部积分法。可见分部积分法确是求不定积分的一种很重要的方法。读者要牢固地掌握它和熟练地应用它。

为了应用和记忆方便起见，常把分部积分公式(1)改写成：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (2)$$

（因$u'dx = du, v'dx = dv$）

究竟求那些函数的不定积分，要应用分部积分法呢？这个问题不易给以完满解答，但是，对求下列的不定积分：

$$\int x^k \ln x\,dx, \int x^k \sin bx\,dx, \int x^k \cos bx\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\,dx, \int x^k \operatorname{arctg} x\,dx \text{ 等}$$

（其中k是非负整数，a与b是常数）可考虑使用分部积分法。

例1.求 $\int x\sin x\,dx$.

在微分公式中，我们并不知道什么样函数的导数等于$x\sin x$。利用分部积分公式就能求出它的不定积分。为了要应用公式（1），首先应该将被积表达式分为两部分：一部分作为u；另一部分作为$v'dx$。当然这种分法有很多种，将被积表达式分成两部分的过程中，要求选出这样的一种，使得

不定积分$\int vu'dx$变得尽可能的简单，再加以变化（或不变化）就可使用基本积分公式。

（Ⅰ）如果选取，$u=x, dv=\sin x dx$，即

$$\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\sin x dx}_{dv}.$$

在分部积分公式中，除掉了知道u, dv而外，还应当求出du与v。由微分公式和积分公式，得

$$du=dx, v=\int \sin x dx=-\cos x.$$

由分部积分公式（2），得

$$\int x\sin x dx=-x\cos x-\int(-\cos)dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+c.$$

显然这种选取u和dv的方法是合适的，它可以把求函数$x\sin x$的不定积分化简为求函数$\cos x$的不定积分的问题了。因而，立刻得到了结果。

（Ⅱ）如果选取，$u=\sin x$，$dv=xdx$。

则 $$du=\cos x dx, v=\frac{x^2}{2}.$$

由分部积分公式（2），得

$$\int x\sin x dx=\frac{x^2\sin x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\cos x dx.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com