高等代数

线性代数

下

1979

福州师专数学科

下 册 目 录

第一章　行　列　式

P17页习题

1. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

解　从第二行开始，各行都减去第一行得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix} = 0$$

展开左端行列式，有 $\prod\limits_{k=0}^{n-2}(x-k)=0$。因此方程有$n-1$个根分别是 0，1，…，$n-2$。

2. 已知 204,527,255三数都能用17除尽，证三级行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

也能用17除尽

证　因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 204 & 0 & 4 \\ 527 & 2 & 7 \\ 255 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 31 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

所以 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 也能用17除尽

3．证明：行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

证　把二、三、四各列减去第一列．得

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

4．试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

〔见上册第二章习题14〕

5．n 级行列式 $D=|a_{ij}|$ 中如果 $a_{ij}=a_{ji}$，那么 D 叫做对称行列式；如果 $a_{ij}=-a_{ji}$，那么 D 叫做反对称行列式。试

证奇数阶的反对称行列式的值是零

证 由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 推知 $a_{ii}=-a_{ii}$ 即 $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

因此

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

因为 $D=D'$（D'表D的转置行列式）所以

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}\underline{\underline{\text{各行乘以}(-1)}}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nD$$

当n是奇数时 $D=-D$，因此 $D=0$.

6、假定 $D=|a_{ij}|$ 问

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$$

等于什么？这里 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 1，2，$\cdots$，n 的一个排列.

解 设 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 可经λ次对换变成自然顺序排列，那么 $\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 和λ有相同的奇偶性〔其中

$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$表$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的逆序数〕

又对$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$作一次对换，相应地对△就作了一次列交换。则△改变一次符号，经λ次对换，相应地△改变了λ次的符号，这时$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$变成了自然顺序排列相应地△变成了D，因此 $\Delta=(-1)^{\lambda}D=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}D$。

7．证明n级行列式的n！个项中有一半的项是取"＋"号，一半的项是取"－"号。

〔见上册第二章习题11〕。

P.28页习题

1．计算下列两个n级行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \hdashline b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 1-a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1-a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^{n-2}(a^2-1)=a^n-a^{n-2}.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & b-a & a-b & \cdots & 0 & b \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & (n-1)b+a \\ b-a & a-b & 0 & \cdots 0 & b \\ 0 & b-a & a-b & \cdots 0 & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots b-a & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}[(n-1)b+a](b-a)^{n-1}$$

$$=(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$$

2. 证明

1) $$\triangle_1=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a^4$$

证

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

2)

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=1$$

其中 $a_{ik}=a_{ik-1}+a_{i-1}k$ $(i,k=2,\cdots,n)$, $a_{i1}=1(i=1,\cdots,n)$

证

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \hdashline 0 & a_{n2}-a_{n-12} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \hdashline 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

重复利用 $a_{ik}=a_{ik-1}+a_{i-1k}$ $(i, k=2, \cdots, n)$, 注意到 $a_{i1}=1$. $(i=1,2,\cdots,n)$. 得

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n-2} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1$$

3)

$$\triangle_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \hdashline 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2(n-1)}^{n-1} \end{vmatrix}=1$$

证 $\triangle_3$中第i行k列的元素 $a_{ik}=C_{k+i-2}^{i-1}$, 所以

$$a_{ik-1}+a_{i-1k}=C_{k-1+i-2}^{i-1}+C_{k+(i-1)-2}^{i-2}$$

$$=C_{k+(i-2)}^{i-1}=a_{ik}$$

利用 $\triangle_2=1$ 的结果, 即得$\triangle_3=1$.

3. 设 $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$且$A_k=s-a_k(k=1,2,\cdots,n)$

证明 I） $\begin{vmatrix} x-A_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x-A_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x-A_n \end{vmatrix} = x(x-s)^{n-1}$

证　由 $A_k = s - a_k$ $(k=1,2,,\cdots,n)$ 得

$$左式=\begin{vmatrix} (x-s)+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+(x-s) & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_n+(x-s) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (x-s)+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ s-x & x-s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s-x & 0 & \cdots & x-s \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & x-s \end{vmatrix} = x(x-s)^{n-1}$$

II） $\begin{vmatrix} x-a_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ A_1 & x-a_1 & \cdots & A_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} = [x+(n-2)s]\ (x-s)^{n-1}$

证　由 $a_k = s - A_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 得

$$左式=\begin{vmatrix} (x-s)+A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ A_1 & A_2+(x-s) & \cdots & A_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n+(x-s) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (x-s)+A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ s-x & x-s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s-x & 0 & \cdots & x-s \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (x-s)+\sum_{i=1}^{n} A_i & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & x-s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-s \end{vmatrix}$$

$$=\left[(x-s)+\sum_{i=1}^{n} A_i\right](x-s)^{n-1}$$

$$=\left[(x-s)+(ns-\sum_{i=1}^{n} a_i)\right](x-s)^{n-1}$$

$$=[(x-s)+(n-1)s](x-s)^{n-1}$$

$$=(x-s)^n+(n-1)s(x-s)^{n-1}$$

4．计算

Ⅰ）
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解　从第二行开始，各行加上第一行，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{vmatrix}=n!$$

Ⅱ）
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解　除第一行外，各行都减去第一行，得

$$
原式=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n} b_k
$$

Ⅱ）
$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}
$$

解　除第一行外，把各项都减去第一行，得

$$
原式=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}=(n-1)!
$$

5）试引用范得蒙行列式求下列行列式的值。

$$
\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}
$$

解　用a_k^n $(k=1,2,\cdots,n+1)$ 分别除第k行，得

$$
原式=\prod_{k=1}^{n+1} a_k^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}
$$

$$=\prod_{k=1}^{h+1} a_k^n \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

6. 证明 n 级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证　按第一列展开D_n得

$$D_n=2\cos\theta\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n-2}$$

即有　$D_n=2\cos\theta\, D_{n-1}-D_{n-2}$

当　$n=1$时，　$D_1=2\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ 原式成立。

设对小于n的一切自然数都成立 $D_k=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$

（$k<n$）则对于 n 有：

$$D_n=2\cos\theta\, D_{n-1}-D_{n-2}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin n\theta-\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos n\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

所以对一切自然数 n， $D_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ 成立。

7．假设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 1 \\ a_{n-11} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}$$

把它的第 i 行 $(i=1,2,\cdots,n)$ 换成 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1$ 而其它的行都不变，所得的新行列式用 D_i 表示，试证

$$D = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$$

证　记 $a_{kn} = 1$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ih} = \delta_{kh}$

$\left(\delta_{kh} = \begin{cases} 1 & (k=h) \\ 0 & (k \neq h) \end{cases}\right)$ 所以 $D = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in} A_{in} = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{in}$.

按第 i 行展开 D_i　得 $D_i = \sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij} + A_{in}$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{n} A_{in}$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{in} A_{ij}\right)$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{in} A_{ij} = 0$ $(j \neq n)$ 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij} = 0$ 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{in} = D.$$

8. 如果 M 和M′是行列式 D 的一对互余子式，那么或者M 与M′互为代数余子式或者 $-M'$ 是M的代数余子式而同时 $-M$是M′的代数余子式

证 设M是位于D中第$i_1,\cdots,i_k$行和第$j_1,\cdots,j_k$列的交叉位置的元素组成的子行列式，而M′是位于 D 中第$i_{k+1},\cdots,i_n$和第 $j_{k+1},\cdots,j_n$ 列的交叉位置的元素组成的子行列式。因为M和 M′是行列式 D 的一对互余子式，所以，$(j_1,\cdots,j_n)$ 和 $(i_1,\cdots,i_n)$ 都是n 阶排列，$\sum\limits_{k=1}^{n} i_k = \sum\limits_{k=1}^{n} j_k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

并且M的代数余子式是 $(-1)^{\sum\limits_{m=1}^{n} i_m + \sum\limits_{m=1}^{n} j_m} M'$

而M′的代数余子式是 $(-1)^{\sum\limits_{m=k+1}^{n} i_m + \sum\limits_{m=k+1}^{n} j_m} M.$

Ⅰ）如果 $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m + \sum\limits_{m=1}^{k} j_m$是偶数 则

$$(-1)^{\sum\limits_{m=1}^{k} i_m + \sum\limits_{m=1}^{k} j_m} M' = M'$$

M′就是M的代数余子式。又

$$\sum_{m=k+1}^{n} i_m + \sum_{m=k+1}^{n} j_m = n(n+1) - \left(\sum_{m=1}^{k} i_m + \sum_{m=1}^{k} j_m\right) \tag{1.01}$$

也是偶数。（因为$n(n+1)$必是偶数）则

$$(-1)^{\sum_{m=k+1}^{n} i_m+\sum_{m=k+1}^{n} j_m} M=M$$

M也是M′的代数余子式。

Ⅱ）如果 $\sum_{m=1}^{k} i_m+\sum_{m=1}^{k} j_m$是奇数，由(1.01)知

$\sum_{m=k+1}^{n} i_m+\sum_{m=k+1}^{n} j_m$也是奇数则 $(-1)^{\sum_{m=1}^{k} i_m+\sum_{m=1}^{k} j_m} M'$

$=-M'$ 及 $(-1)^{\sum_{m=k+1}^{n} i_m+\sum_{m=k+1}^{n} j_m} M=-M$。因此

$-M'$是M的代数余子式而同时$-M$是M′的代数余子式。

P44页习题

1．求行列式

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \text{ 和 } S=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

的乘积，并由之计算△。

解

$$\triangle\cdot S=\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ b+a+d+c & b+a-d-c & b-a+d-c & b-a-d+c \\ c+d+a+b & c+d-a-b & c-d+a-b & c-d-a+b \\ d+c+b+a & d+c-b-a & d-c+b-a & d-c-b+a \end{vmatrix}$$

把各行加到第一行。得

$$\triangle\cdot S=\begin{vmatrix} 4(a+b+c+d) & 0 & 0 & 0 \\ & b+a-d-c & b-a+d-c & b-a-d+c \\ * & c+d-a-b & c-d+a-b & c-d-a+b \\ & d+c-b-a & d-c+b-a & d-c-b+a \end{vmatrix}$$

第二、三行分别加上第一行，得

$$\triangle\cdot S=\begin{vmatrix} 4(a+b+c+d) & 0 & 0 & 0 \\ & b+a-d-c & b-a+d-c & b-a-d+c \\ ** & 0 & 0 & 2(c-d-a+b) \\ & 0 & 2(d-c+b-a) & 0 \end{vmatrix}$$

展开，得

$$\triangle S=-16(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

其次　$S=-16$　因此

$$\triangle=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

2. 试求

$$A=\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

的乘积，并由此证明

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\alpha) & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin(\beta+\beta) & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin(\gamma+\gamma) \end{vmatrix}=0 \quad (1.02)$$

证　$B=B'$　所以$AB=AB'$　则有