吉林大学

研究生论文集刊

2

1990

吉林大学研究生院

研究生论文集刊

一九九〇年　第二期
（总第十五期）

目　录

关于几类变分不等式的解……………………………………………………杨海欧（1）

奇异边值问题…………………………………………………………………刘文斌（12）

平面曲线造型中的一些拟合方法…………………………………………吕晓妹（26）

几类方程解的数量及分歧…………………………………………………于嘉夫（42）

在频域范围用可调激光诱导光栅法研究超快速过程……………………陈肖慧（49）

低能电子——多原子分子的共振散射理论………………………………周忠源（59）

高质量人造金刚石—硬质合金复合材料的研制…………………………李　颖（68）

氯化物法生长InP/GaAs异质结构的研究 ………………………………张宝林（75）

半导体激光器与光纤的耦合特性研究……………………………………王　彦（83）

具有辛群对称性的一类价激发n电子波函数的性质和应用 ……………胡海泉（89）

石墨炉原子吸收光谱法测定痕量铬和锶的研究 …………………………周采菊（98）

鹿茸有效成分的研究…………………………………………………………龙远德（107）

原型与非原型硼化镍对α．β—不饱和化合物催化氢化的研究…………蒋玉林（115）

L—AG属性文法到PASCAL的转换——软件自动生成 …………………杨巨谦（121）

计算机四肢动物的动画生成方法—FLAAS系统…………………………翟晓东（133）

DDATABASE：一个可靠的分布式数据库管理系统 ……………………刘晓丹（142）

石油测井解释领域知识获取工具—MNSEEK系统 ………………………温　星（153）

关于几类变分不等式的解

研究生 杨海欧 指导教师 俞致寿 教授

基础数学专业

摘 要

通过研究空间$W_0^{1,p}(\Omega)$上的泛函

$$J(u)\frac{c}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2 dx-\int_\Omega F(x,u)dx$$

和空间$H_0^2(\Omega)$上的泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2 dx-\int_\Omega G(x,u)dx$$

在适当的条件下，利用山路引理以及EKeland变分原理，我们证明了变分不等式

$$u\in K;\ \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(C\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}+1\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx\geqslant\int_\Omega f(x,u)(v-u)dx,\quad\forall v\in K$$

和

$$u\in C;\ \int_\Omega\Delta u\cdot\Delta(v-u)dx\geqslant\int_\Omega g(x,u)(v-u)dx,\ \forall v\in C$$

的非平凡解的存在性以及多重解的存在性。

1. 关于一类二阶偏微分方程

设Ω是R^n中的有界开集，边界$\partial\Omega$足够光滑。常数$c>0$、$p\geqslant2$。函数$f(x,t)$满足条件：

(F_1)．$f(x,t)(x\in\Omega,\ t\in R^1)$满足Caratheodory条件，并且存在常数$a,b>0$及$1<\sigma<\frac{np}{n-p}-1$，$(n>p)$，使得$|f(x,t)|\leqslant a+b|t|^\sigma$。

(F_2)．存在常数$\theta\in\left(0,\frac{1}{p}\right)$及$M>0$使

$$F(x,t)=\int_0^t f(x,s)ds\leqslant\theta t f(x,t),\quad\forall|t|\geqslant M,\quad x\in\Omega.$$

(F_3)．$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{p-1}}=0$，对$x\in\Omega$一致。

(F_4)．$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}=+\infty$，对$x\in\Omega$一致。

Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$，其中模$\|u\|_{1,p}=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，$\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，

$$|\nabla u|^p=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial xi}\right|^p.$$

考察$W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的C^1泛函

$$J(u)=\frac{c}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2 dx-\int_\Omega F(x,u)dx$$

引理 1，若函数$f(x,t)$ 满足条件 (F_1)、(F_2)，则泛函 $J(u)$ 满足 Palais -Smale 条件

证明．设序列 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$，并且

$\{J(u_n)\}$有界，$J'(u_n)\to 0\ (W^{-1,p'}(\Omega))$．

其中 $p'=\dfrac{p}{p-1}$.由于对于任意$u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$，有$\langle J'(u),v\rangle=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(c\left|\frac{\partial u}{\partial xi}\right|^{p-2}+1\right)$

$\dfrac{\partial u}{\partial xi}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial xi}dx-\int_\Omega f(x,u)v\,dx$其中$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示$W^{-1,p'}(\Omega)$和$W_0^{1,p}(\Omega)$ 的对偶积．于是由条件 (F_1)、(F_2)，存在常数$M_1>0$，使

$$\frac{c}{p}\int_\Omega|\nabla u_n|^p dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2 dx$$

$$\leqslant M_1+\theta c\int_\Omega|\nabla u_n|^p dx+\theta\int_\Omega|\nabla u_n|^2 dx-\theta\langle J'(u_n),u_n\rangle$$

因为 $J'(u_n)\to 0$，所以有自然数N，使 $|\langle J'(u_n),u_n\rangle|\leqslant\|u_n\|_{1,p}$，$n\geqslant N$从而有 $C\left(\dfrac{1}{p}-\theta\right)\|u_n\|_{1,p}^p\leqslant M_1+\theta\|u_n\|_{1,p}$，$n\geqslant N$所以$\{u_n\}$有界．于是存在$u^*\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 以及$\{u_n\}$的子列，不妨仍记为$\{u_n\}$，使$u_n\rightharpoonup u^*(W_0^{1,p}(\Omega))$。

令 $q_1=\sigma+1$、$q_1'=\dfrac{\sigma+1}{\sigma}$，由紧嵌入定理知,$W_0^{1,p}(\Omega)\to\to L_{q_1}(\Omega)$从而 $\{u_n\}\subset L_{q_1}(\Omega)$，$u_n\to u^*\ (L_{p_1}(\Omega))$。

根据 (F_1)，Немыцкий算子 $fu=f(x,u(x))$映$L_q(\Omega)$入$L_{q_1}'(\Omega)$连续、有界，于是有常数$M_1>0$，使

$$\|fu_n-fu^*\|_{q_1'}\leqslant M_2.$$

由于对于任意β_1、β_2及 $p\geqslant 2$，存在与β_1和β_2无关的常数$c_1>0$，使得

$c_1|\beta_1-\beta_2|^p\leqslant(|\beta_1|^{p-2}\beta_1-|\beta_2|^{p-2}\beta_2)(\beta_1-\beta_2)$ 于是存在常数，$c_2>0$，使

$$0\leqslant c_2\|u^*-u_n\|_{I,p}^{p}\leqslant\langle J'(u^*)-J'(u_n),\ u^*-u_n\rangle$$

$$-\int_\Omega|\nabla(u^*-u_n)|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega(fu^*-fu_n)(u^*-u_n)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\langle J'(u^*)-J'(u_n),\ u^*-u_n\rangle+M_2\|u^*-u_n\|_{c1}\to 0$$

即 $u_n\to u^*(W_0^{I,p}(\Omega))$，泛函J满足（P·S）条件。

引理 2．若函数 $f(x,t)$ 满足条件（F_1）、（F_2），则存在正常数 a、ρ，使 $J|\partial B\rho\geqslant a$，其中 B_ρ 是空间 $W_0^{I,p}(\Omega)$ 的中心在0的半径为ρ的球。

证明．由（F_3），存在正常数 δ，使得

$F(x,t)\leqslant\dfrac{c\tau}{2p}|t|^p$，$\forall|t|<\delta$，$x\in\Omega$一致，其中 τ 是满足 $\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\geqslant\tau\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x$，$\forall u\in W_0^{I,p}(\Omega)$的最大常数．另一方面，条件（$F_1$）蕴含了

$$F(x,t)\leqslant a|t|+\frac{b}{\sigma+1}|t|^{\sigma+I},\ t\in R^1,\ x\in\Omega.$$

利用嵌入定理，有常数$M_3>0$，使得

$$\int_\Omega F(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\frac{c}{2p}\|u\|_{I,p}^{p}+M_3\|u\|_{I,p}^{q}$$

其中 $q=\dfrac{np}{n-p}$，从而对任意$u\in W_0^{I,p}(\Omega)$，有

$$J(u)\geqslant\frac{c}{2p}\|u\|_{I,p}^{p}+\frac{1}{2}\|u\|_{I,2}^{2}-M_3\|u\|_{I,p}^{q}$$

由于 $q>p$，即知存在充分小的 $\rho>0$，使

$$J\Big|_{\partial B\rho}\geqslant\frac{c}{2p}\rho^p-M_3\rho^q=a>0.$$

定理 1．若函数$f(x,t)$满足条件（F_1）-（F_4），则对于任意常数 $c>0$、$p\geqslant 2$，偏微分方程

$$(1)\quad\begin{cases}c\sum\limits_{i=I}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\Delta u+f(x,u)=0,\ x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

在空间$W_0^{I,p}(\Omega)$中必有非平凡的广义解．

证明．根据定义，u是方程（1）的广义解的充要条件是 u 是泛函 $J(u)$)的临界点．因此求解（1）的问题便化为求 $J(u)$ 的非零临界点的问题．

已知 $J(0)=0$，根据引理1、2，为了应用山路引理，仅需证明存在 $u_0\in W_0^{I,p}(\Omega)$，使

$$J(u_0)<0、u_0\overline{\in B_\rho}.$$

取$\varphi(x)\in W_0^{I,p}(\Omega)$，使 $\|\varphi\|_{I,p}=1,\varphi(x)>0(a\cdot ex\in\Omega)$，令$a_0=\|\varphi\|_p$，$a_1=\|\varphi\|_{1,2}^{2}$，则$a_0$、$a_1>0$。

根据（F_4），存在常数$M_0>0$，使

$$f(x,t)\geqslant(4c+a_1p)\left(\frac{1}{a_0}\right)^p t^{p-1},\ \forall t\geqslant M_0,\ x\in\Omega.$$

今取 $0<t_1<t_2<\cdots$, $t_n\to+\infty$, 并记

$$D_n=\{x\in\Omega\mid t_n\varphi(x)\geqslant M_0\}$$

于是

$$\int_\Omega F(x,t_n\varphi)dx\geqslant\int_{D_n}dx\int_{M_0}^{t_n\varphi}f(x,s)ds-\int_{D_n}dx\int_0^{M_0}|f(x,s)|ds$$

$$-\int_{\Omega\setminus D_n}dx\int_0^{M_0}|f(x,s)|ds\geqslant\frac{1}{pa_0^p}(4c+a_1p)t_n^p\int_{D_n}\varphi^p dx-M_4$$

其中M_4为正常数。

显然$D_1\subset D_2\subset\cdots$，并且$\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$，因此，$\mathrm{mes}D_n\to\mathrm{mes}\,\Omega$，由Lebesgus积分的绝对连续性，存在常数$N_0>0$，使得

$$\int_{D_n}\varphi^p dx>\int_\Omega\varphi^p dx-\frac{a_0^p}{2}=\frac{a_0^p}{2},\ n\geqslant N_0\quad \text{故由}\ \|t_n\varphi\|_{1,p}=t_n\to+\infty,\ \text{有}$$

$$J(t_n\varphi)=\frac{c}{p}t_n^p+\frac{a_1}{2}t_n^2-\int_\Omega F(x,t_n\varphi)dx\leqslant-\frac{c}{p}t_n^p-\frac{a_1}{2}t_n^2+\frac{a_1}{2}t_n^2+M_4\to-\infty$$

于是可取定某个n_0（充分大），使$W_0^{1,p}(\Omega)$中的元素$u_0=t_n\varphi$满足$u_0\in\overline{B_\rho}$，$J(u_0)<0$。

应用山路引理，方程（1）有非平凡广义解。

定理 2. 若函数$f(x,t)$除满足条件（F_1）－（F_4），还满足

（F_5）．$f(x,-t)=-f(x,t)$，$\forall t\in R^1$，$x\in\Omega$。那么方程（1）在$W_0^{1,p}(\Omega)$中必有无穷多个广义解．

证明．条件（F_5）蕴含了$F(x,t)$是关于t的偶函数．由引理1、2，为了运用〔1〕中定理2·8，仅需证明，对于$W_0^{1,p}(\Omega)$的任何有限维子空间X，集$X\cap\widetilde{A}_0$是有界的，其中$\widetilde{A}_0=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\mid J(u)\geqslant0\}$。

首先由条件（F_4），有

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{f(x,t)}{(-t)^{p-1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-f(x,t)}{t^{p-1}}=-\infty,\ x\in\Omega\text{一致}.$$

假定存在$W_0^{1,p}(\Omega)$的有限维子空间X，使$X\cap\widetilde{A}_0$是无界集．于是存在$\{u_n\}\subset X\cap\widetilde{A}_0$，使得

$$\|u_n\|_{1,p}\to+\infty$$

令，$t_n=\|u_n\|_{1,p}$，$\varphi_n=\frac{1}{t}u_n\in X$，则

$$u_n=t_n\varphi_n\ \|\varphi_n\|_{1,p}=1.$$

由于X是有限维的，所以其单位球面是紧集．从而有$\varphi_0\in X$和$\{\varphi_n\}$的收敛子列，仍记为$\{\varphi_n\}$．使$\varphi_n\to\varphi_0(X)$，于是有$\{\varphi_n\}$的子列在Ω上几乎处处收敛于φ_0，不妨仍记$\varphi_n(x)\to\varphi_0(x)$（a、e $x\in\Omega$）．令$\Omega_0=\{x\in\Omega\mid\varphi_0(x)\neq0$，并且$\varphi_n(x)\to\varphi_0(x)\}$。显然$\mathrm{mes}\,\Omega_0>0$。若记

$a_2=\left(\int_{\Omega_0}|\varphi_0|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}>0$，根据（$F_4$）以及 $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{p-1}}=-\infty$，有常数$M_0>0$，使

$$f(x,t)\geqslant(4c+c_0^2p)\frac{2^{p-1}}{a_2^p}t^{p-1},\quad\forall t\geqslant M_0,\ x\in\Omega.$$

$$f(x,t)\leqslant-(4c+c_0^2p)\frac{2^{p-1}}{a_2^p}|t|^{p-1},\quad\forall t\leqslant-M_0,\ x\in\Omega.$$

其中C_0是满足$\|u\|_{1,2}\leqslant C_0\|u\|_{1,p}$，$(\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega))$的最小常数。

令$\Omega_n=\{x\in\Omega|\ |t_n\varphi_n(x)|\geqslant M_0\}$。根据条件（$F_1$），存在常数$M_3>0$，使得

$$\int_\Omega F(x,t_n\varphi_n)dx\geqslant(4c+c_0^2p)\frac{2^{p-1}}{pa_2^p}t_n^p\int_{\Omega_n}|\varphi_n|^p\,dx-M_3$$

由于，$\left|\|\varphi_n\|_{p,\Omega_0}-\|\varphi_0\|_{p,\Omega_0}\right|\leqslant\|\varphi_n-\varphi_0\|_{p,\Omega}\to0$，故有常数 $N_1>0$，使

$$\|\varphi_n\|_{p,\Omega_0}>\|\varphi_0\|_{p,\Omega_0}-\frac{a_2}{4},\ n\geqslant N_1.$$

令 $A_n=\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\Omega_m$、$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则 $\Omega_n\supset A_n$，且$A_n\subset A$，$\operatorname{mes}A_n\to\operatorname{mes}A$。

从而有正整数N_2，使

$$\|\varphi_0\|_{p,\Omega_n}\geqslant\|\varphi_0\|_{p,A_n}>\|\varphi_0\|_{p,A}-\frac{a_2}{4},\ n>N_2$$

由于 $\Omega_0\subset A$，所以$\|\varphi_0\|_{p,\Omega_n}\geqslant\dfrac{3}{4}a_2$，$\|\varphi_n\|_{p,\Omega_n}>\dfrac{a_1}{2}$，当$n\geqslant N_3=\max\{N_1,N_2\}$。

综合上述研究，有

$$\int_\Omega F(x,t_n\varphi_n)dx\geqslant\frac{1}{2p}(4c+c_0^2p)t_n^p-M_3,\ n\geqslant N_3.\ \text{于是 } J(u_n)$$

$$\leqslant-\frac{c}{p}t_n^p-\frac{c_0^2}{2}t_n^p+\frac{c_0^2}{2}t_n^2+M_3,\ n\geqslant N_3.$$由$t_n\to+\infty$，有$J(u_n)\to-\infty$。这与$u_n\in\widetilde{A}_n$矛盾。因此，对$W_0^{1,p}(\Omega)$ 的任何有限维子空间X，集$X\cap\widetilde{A}_n$有界。

利用〔1〕中定理2.8，方程（1）在$W_0^{1,p}(\Omega)$中必有无穷多个广义解。

2. 关于一类二阶变分问题

设 X是一个Banach 空间，有范数$\|\cdot\|$以及对偶空间X^*，用$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示$X^*$和$X$的对偶积。

若$K\subset X$是一闭凸子集．对任意$x^*\in X^*$、$x_0\in K$，记

$\|x^*\|x_0=sup\{\langle x^*,v\rangle\,|\,v+x_0\in K,\ \|v\|\leqslant1\}$根据定义，泛函$T\in C^1(K,R^1)$，称其在$K$上满足（$p\cdot s$）条件，如果对任意序列$\{x_n\}\subset K$，条件

$$\begin{cases}\{T(x_n)\}\text{有界}\\ \|-T'(x_n)\|x_n\to0\end{cases}$$

蕴含了有$\{x_n\}$的收敛子列。

引理 3. 设K是Banach 空间X的一个闭凸子集，T是K上的C^1泛函. 若有有界序列$\{u_n\}\subset K$，使$\|-T'(u_n)\|u_n\to 0$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\langle T'(u_n),\ u^*-u_n\rangle\geqslant 0,\ \forall u^*\in K.$$

证明. 设$\{u_n\}\subset K$，满足条件

$$\{u_n\}\text{有界},\quad \|-T'(u_n)\|u_n\to 0$$

对$\forall u^*\in K$，$\{u_n\}$有界蕴含了有常数$m^*\geqslant l$，使$\|u^*\|\leqslant m^*$，$\|u_n\|\leqslant m^*$，$(n=1,2,\cdots)$.

而$\|-T'(u_n)\|u_n\to 0$ 蕴含了对每个n，存在整数$N_n>n$，使得当$m>N_n$ 时，有

$$\inf\{\langle T'(u_m),\ v-u_m\rangle\,|\,v\in K,\ \|v-u_m\|\leqslant 1\}>\frac{1}{n}$$

对使$\|u^*-u_m\|>1$的$u_m(m>N_n)$，由K是凸集，所以$(\|u^*-u_m\|)^{-1}(u^*-u_m)+u_m\in K$，于是

$$\langle T'(u_m),u^*-u_m\rangle\geqslant-\frac{2}{n}m^* \tag{2.1}$$

而对于 $\|u^*-u_m\|\leqslant 1$ 的 $u_m(m>N_n)$，显然(2.1) 式成立。于是对$\forall m>N_n$，(2.1)式成立，即得

$$\varliminf_{n\to\infty}\langle T'(u_n).\ u^*-u_n\rangle\geqslant 0.$$

引理 4. 设K是 Banach 空间X的一个闭凸子集，K上的C^1泛函T是下方有界的，满足$(p\cdot s)$ 条件. 若$0\in K$是T在K上的一个局部极小值点，$T(0)=0$并且$\inf\{T(u)|u\in K\}<0$，则泛函T至少有三个互异的关于K的临界点。

其实条件$-\infty<\inf\{T(u)|u\in K\}<0$和T满足$(P、S)$条件蕴含了存在一个$u_0\in K$，使

$$T(u_0)=\inf\{T(u)|u\in K\}$$

显然 $u_0\neq 0$，由〔2〕中第四章定理5.2，泛函$T(u)$ 至少有三个互异的相对于K的临界点.

设函数$\gamma(x)$、$\beta(x)\in W^{1,p}(\Omega)$，并且$\gamma(x)\leqslant 0\leqslant\beta(x)$ $a.e$ $x\in\Omega$. 记$W_0^{1,p}(\Omega)$的闭凸子集K为

$$K=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,|\,\gamma(x)\leqslant u(x)\leqslant\beta(x),\ a.e\ x\in\Omega\}.$$

定理 3. 若函数$f(x,t)$满足条件(F_1)、(F_3)、(F_4)，则存在一个函数$\varphi(x)\geqslant 0(x\in\Omega)$，使对一切$\beta(x)\geqslant\varphi(x)(a.e\,x\in\Omega)$变分不等式：

$$u\in K,\ \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(c\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}+1\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx$$

(2)

$$\geqslant\int_\Omega f(x,u)(v-u)dx,\ \forall v\in K$$

至少有一个非零解。其中常数 $c>0$，$p\geqslant 2$.

注. 当$p=2$时，条件 (F_3)、(F_4) 可改为较弱的条件：

(F'_3). $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\dfrac{f(x,t)}{t}\leqslant\lambda_1-\varepsilon$，对$x\in\Omega$一致。

(F'_4). $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t}\geqslant\lambda_1+\varepsilon$，对$x\in\Omega$一致．其中$\varepsilon>0$，而$\lambda_1$是$-\Delta$在Dirichlet边界条件下的第一本征值．

证明．按定义，仅需求证泛函$J(u)$有关于K的非零临界点．为了运用凸集上的山路引理，我们先证明$J(u)$在K上满足（P·S）条件．

设序列$\{u_n\}\subset K$，并且成立

$$J(u_n)\leqslant d,\ \|J'(u_n)\|\ u_n\to 0$$

往证$\{u_n\}$有收敛子列．

由（F_1）以及K的定义，对每个n有

$$\frac{c}{p}\|u_n\|^p_{1,p}+\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{1,2}$$

$$\leqslant d+\int_\Omega\left[a(\beta-\gamma)+\frac{b}{\sigma+1}(\beta-\gamma)^{\sigma+1}\right]dx<+\infty$$

所以有$\{u_n\}$的子序列，不妨仍记为$\{u_n\}$，使

$$u_n\to u^*(W_0^{1,p}(\Omega))。$$

同引理的，证明，有

$$u_n\to u^*(L_{q_1}(\Omega)\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}0&\leqslant c_2\|u^*-u_n\|^p_{1,p}\\&\leqslant\langle J'(u^*)-J'(u_n),\ u^*-u_n\rangle+M_2\|u^*-u_n\|_{q_1}\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中q_1、c_2、M_2如引理1中所设．

显然$u^*\in K$，根据（2.2）-（2.4）式和引理3，有

$$u_n\to u^*(K)$$

所以 $J(u)$ 在K上满足（P·S）条件．

根据引理2和定理1的证明，存在正常数α、β，使$J|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$；存在函数$\varphi(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$、$\varphi(x)\geqslant 0(x\ni\Omega)$，使$\varphi\overline{\in}\overline{B}_\rho$，$J(\varphi)<0$。于是对任意$\beta(x)\geqslant\varphi(x)(a.e\ x\in\Omega,)$有$\partial B_\rho\cap K\neq\phi$、$\varphi\in K\setminus\overline{B}_\rho$．从而$J|_{\partial B_\rho\cap K}\geqslant\alpha$，$J(\varphi)<0$。

由凸集上的山路引理，$J(u)$有关于K的非零临界点．

若函数$f(x,t)\in C'(\overline{\Omega}\times R',R')$，满足条件$(F_4)$以及

$$(F'_1).\ |f'_t(x,t)|\leqslant a'+b'|t|^{\sigma-1},\ n>p$$

其中常数a'、$b'>0$，$1<\sigma<\dfrac{np}{n-p}-1$．

$$(F_6).\ f(x,0)=0,\ f'_t(x,0)\leqslant 0\ ,\ x\in\Omega.$$

条件(F'_1)蕴含了$f(x,t)$满足条件(F_1)，由定理3的证明知泛函J在K上满足（P·S）条件．

若取函数φ为定理3中所定义的，则对任意$\beta(x)\geqslant\varphi(x)(a.e\ x\in\Omega)$，$\varphi\in K$，$J(\varphi)<0$。

于是

$$0>\inf\{J(u)|J(u)|u\in K\}$$

$$\geqslant -a\int_{\Omega}(\beta-\Upsilon)dx-\frac{b}{\sigma+1}\int_{\Omega}(\beta-\Upsilon)^{\sigma+1}dx>-\infty$$

而条件 (F_6) 蕴含了 $0\in K$ 是泛函 $J(u)$ 在 K 的一个局部极小值点。根据引理4，我们得到

定理 4. 若函数 $f(x,t)\ni C'(\overline{\Omega}\times R', R')$，满足条件 (F_1)、(F_4) 和 (F_6)，则有函数 $\varphi\geqslant 0(\Omega)$，使对任意 $\beta(x)\geqslant\varphi(x)(a,e\ x\in\Omega)$，变分不等式 (2) 至少有三个互异的解。

3. 两类四阶变分问题

集合 $E=H_0'(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 和其上的范数 $\|u\|_{2,2}=(\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx)^{\frac{1}{2}}$ 形成一个 Banach 空间，考虑 E 上的 C' 泛函 $I(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx-\int_{\Omega}G(x,u)dx$，其中函数 $G(x,u)=\int_0^u g(x,t)dt$，

$g(x,t)\in C\gamma(\overline{\Omega}\times R', R')(0<r<1)$，并且满足条件：

(G_1)．存在正常数 a、b 以及 $|<\sigma<\frac{n+4}{n-4}(n\geqslant 5)$，使得 $|g(x,t)|<a+b|t|^{\sigma}$。

(G_2)．$\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(x,t)}{t}=0$。对 $x\in\Omega$ 一致。

(G_3)．$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g(x,t)}{t}\geqslant\lambda_1^2+\varepsilon$，对 $x\in\Omega$ 一致。其中 $\varepsilon>0$，而 λ_1 是 $-\Delta$ 在 0 - Drichlet 边界条件下的第一本征值。

$I(0)=0$，而且对任意 u、$v\in E$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\Omega}\Delta u\cdot\Delta v\,dx-\int_{\Omega}g(x,u)v\,dx$$

泛函 $I(u)$ 具有下列性质：

I^0．若函数 $g(x,t)$ 满足条件 (G_1)、(G_2) 则存在常数 $\rho>o$，使 $I|\partial B_\rho\geqslant a>0$。其中 B_ρ 是中心在 0、半径为 ρ 的 E 中的球。

证明．由条件 (G_1)、(G_2)，存在常数 $m_1>0$，使得

$G(x,t)\leqslant\frac{1}{4\tau_1}|t|^2+m_1|t|^{\sigma+1}$，$\forall t\in R^1$，$x\in\Omega$。其中 $\tau_1>0$ 是满足

$$\int_{\Omega}|u|^2dx\leqslant\tau_1\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx,\ \forall u\in E$$

的最小常数。

由于 $\sigma+1<\dfrac{2n}{n-4}$，根据嵌入定理，存在常数$m_2>0$，使得对任意$u\in E$，有

$$\int_\Omega G(x,u)dx\leqslant\frac{1}{4}\int_\Omega|\Delta u|^2dx+m_2(\|u\|_{2,2})^{\sigma+1}$$

从而 $I(u)\geqslant\dfrac{1}{4}(\|u\|_{2,2})^2-m_2\|u\|_{2,2}^{\sigma+1}$.

由于 $\sigma+1>2$，所以存在 $\rho>0$ 充分小，使$\dfrac{1}{4}\rho^2-m_2\rho^{\sigma+1}=\alpha>0$。于是 $I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$

2°. 若函数 $g(x,t)$ 满足条件 (G_1)、(G_3)，则对任意正数 ρ 存在常数 $t_0>\dfrac{\rho}{\lambda_1}$，使得 $t_0y_1\in\overline{B_\rho}$，$I(t^0y_1)<0$，其中函数 $y_1(x)>0(x\in\Omega)$是$-\Delta$在$0-$Dirichlet 边界条件下的第一本征函数，并且$\int_\Omega y_1^2\,dx=1$

证明。条件 (G_3)蕴含了存在常数 $\varepsilon'(0<\varepsilon'<\varepsilon)$ 以及$s_0>0$，使得

$g(x,s)\geqslant(\lambda_1^2+\varepsilon')s$，$(s\geqslant s_0)$。

若记 $\Omega_t=\{x\in\Omega\,|\,ty_1\{x\}\geqslant s_0\}$，$t\in R^*$，则存在与 t 无关的常数 $m_3>0$，使得

$$\int_\Omega G(x,ty_1)dx\geqslant\frac{\lambda_1^2+\varepsilon'}{2}\int_{\Omega_t}(t^2y_1^2-s_0^2)\,dx-m_3$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{\Omega_t}\left(y_1^2-\dfrac{s_0^2}{t^2}\right)dx\to1$，于是存在常数$m_4>0$，使 $I(t)y_1)\leqslant-\dfrac{\varepsilon'}{4}t^2+m_4\to-\infty$ $(t\to+\infty)$。

因为 $\dfrac{\rho}{\lambda_1}y_1\|_{2,2}=\rho$，故存在常数，$t_0>\dfrac{\rho}{\lambda_1}$，使得 $I(t_0y_1)<0$。

设函数 $\Upsilon(x)$、$\beta(x)\in H^2(\Omega)$，并且 $\Upsilon(x)\leqslant0\leqslant\beta(x)$，$a$、$e\ x\in\Omega$。记$E$的闭凸子集$C_1$、$C_2$分别为：

$C_1=\{u\in E\,|\,\Upsilon(x)\leqslant\Delta u(x)\leqslant\beta(x),\ a、e\ x\in\Omega\}$

$C_2=\{u\in E\,|\,\Upsilon(x)\leqslant u(x)\leqslant\beta(x),\ a、e\ x\in\Omega\}$

则泛函I具有性质：

3°. 若函数 $g(x,t)$ 满足条件 (G_1)，则泛函 $I(u)$在C_1上满足 (P·S) 条件.

证明。设沿序列$\{u_n\}\subset C_1$，成立

$\{I(u_n)\}$有界，并且$\|-I'(u_n)\|u_n\to0$

显然 C_1是有界集，于是有 $\{u_n\}$的子列，仍记为 $\{u_n\}$，以及$u^*\in C_1$，使

$$u_n\to u^*(H_0^1(\Omega)),\quad u_n\rightharpoonup u^*\ (H^2(\Omega))\tag{3.1}$$

根据嵌入定理，有常数m_5、$m_6>0$，使

$$\int_\Omega|u_n|^\sigma|u^*-u_n|dx$$

$$\leqslant m_5(\|u_n\|_{2,2})^\sigma\cdot\|u^*-u_n\|_{\sigma+1}\leqslant m_6\|u^*-u_n\|_{\sigma+1}\to0$$

于是

$$|\int_{\Omega}g(x,u_n)(u^*-u_n)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant a\int_{\Omega}|u^*-u_n|\mathrm{d}x+b\int_{\Omega}|u_n|^{\sigma}|u^*-u_n|\mathrm{d}x\to 0. \tag{3.2}$$

根据 (3、1)、(3、2) 式以及引理 3，得

$$0\leqslant \lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n),\ u^*-u_n\rangle$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\Delta(u_n-u^*)\cdot\Delta(u^*-u_n)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\Omega}\Delta(u_0-u^*)\Delta(u^*-u_n)\mathrm{d}x\quad\leqslant 0$$

即 $\|u^*-u_n\|_{2,2}\to 0,\ u_n\to u^*(C_1)$.

同理，我们得到

4°. 若函数$g(x,t)$ 满足条件 (G_1)，则泛函I在 C_2 上满足 (P·S) 条件.

定理 5. 设函数$g(x,t)$ 满足条件 (G_1)－(G_3)，则存在函数 $\varphi(x)\leqslant 0(x\in\Omega)$，使对任意$\gamma(x)\leqslant\varphi(x)(a.e\ x\in\Omega)$，4阶变分不等式

$$u\in C_1:\ \int_{\Omega}\Delta u\cdot\Delta(v-u)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_{\Omega}g(x,u)(v-u)\mathrm{d}x,\ \forall v\in C_1$$

至少有一个非平凡解.

证明. 若取$\varphi(x)=-\lambda_1 t_0\,y_1(x)$，其中$t_0$、$y_1$ 是性质2°中所定义的. 对任意 $\gamma(x)\leqslant\varphi(x)(a.e\ x\in\Omega)$，因为 $u_0=t_0y_1\in C_1$、$\frac{\rho}{\lambda_1}y_1\in C_1\cap B_\rho$，于是根据性质1°－3°以及凸集上的山路引理，即得变分不等式 (3) 至少有一个非平凡解.

若取函数 $\psi(x)\geqslant t_0y_1(x)$，同理我们得到

定理6. 设函数 $g(x,t)$满足条件 (G_1)－(G_3)，则存在一个函数$\psi(x)\geqslant 0(x\in\Omega)$，使对任意$\beta(x)\geqslant\psi(x)(a.e\ x\in\Omega)$，4阶变分不等式

$$(4)\ u\in C_2:\ \int_{\Omega}\Delta u\cdot\Delta(v-u)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_{\Omega}g(x,u)(v-u)\mathrm{d}x,\ \forall v\in C_2$$ 至少有一个非平凡解.

设函数$g(x,t)\in C^1(\overline{\Omega}\times R^1,R^1)$ 满足条件 (G_3) 以及

$$(G_1').\ |g_t'(x,t)|\leqslant a'+b'|t|^{\sigma-1}\ (n\geqslant 5)$$

其中 $a',b'>0,1<\sigma<\frac{n+4}{n-4}$.

$(G_4), g(x,o)=0,\ g_t'(x,o)\leqslant 0,\ x\in\Omega.$

(G_1') 蕴含了$g(x,t)$ 满足 (G_1)，由性质3°，泛函 I(v) 在C_1上满足 (P、S)条件. 由定理5的证明，存在函数$\varphi(x)\leqslant 0(x\in\Omega)$，使对于任意函数 $\gamma(x)\leqslant\varphi(x)(a\cdot e\ x\in\Omega)$，有

$u_0 \in C_1$，并且 $I(u_0)<0$。

由于 $2<\sigma+1<\frac{2n}{n-4}$，所以根据嵌入定理

$$I(u) \geqslant -\left|\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x\right| \geqslant -\int_\Omega alu)tl$$

$$\geqslant m_7(\|u\|_{2,2}+\|u\|_{2,2}^{\sigma+1})$$

$$\geqslant m_7\|\beta-\gamma\|_2+m_7\|\beta-\gamma\|_2^{\sigma+1}>-\infty$$

其中常数 $m_7<0$。于是

$$0>\inf\{I(u)|u\in C_1\}>-\infty.$$

另外，条件（G_4）蕴含了 $0\in C_1$ 是I在 C_1 上的一个局部极小值点。根据引理4，我们得到

定理 7. 设函数 $g(x,t)\in C^1(\overline{\Omega}\times R^1,R^1)$，满足条件（$G_1'$、（$G_3$）、（$G_4$），则存在一个函数 $\varphi\leqslant 0(\Omega)$，使变分不等式（3）至少有三个不同的解。

同理，可得

定理 8. 设函数 $g(x,t)\in C^1(\overline{\Omega}\times R^1,R^1)$ 满足条件（G_1'）、（G_3）、（G_4），则存在一个函数 $\psi\geqslant 0(\Omega)$，使变分不等式（4）至少有三个互异的解。

注。对问题（1）—（4）的研究可见于〔1〕—〔5〕，本文补充和发展了以往对这些问题的研究。特别是问题（3）、（4），以往都是对其线性情况进行讨论的。

参考文献

〔1〕A. Ambrosetti, P·H·Rabinowitz; Dual Variational Methods in Critial Point Theory and Applications, J, Funct. Anal. (1973) 14, 349~381.

〔2〕张恭庆； 非线性泛函分析（第四期全国数学研究生暑期教学中心讲稿），吉林大学数学研究所印。327~334。

〔3〕张恭庆； Morse theory on Banach space and its applications to partial differentia equations, chin. Ann. of Math. (1983) 4B (3), 381~399.

〔4〕. H. Brézis, G. Stampacchia; Sur la régularité de solution d'inéquations elliptiques, Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), pp. 153~180.

〔5〕. H. Brèzis, G. Stampacchia; Remarks on Some Fourth Order Variational Inequalites.

论文评阅人：孙学思　教授
严子谦　教授
答辩委员会主席：李荣华　教授
委员：俞致寿　教授
严子谦　教授
邹承祖　教授
学位论文答辩日期：89年6月15日

奇异边值问题（节选）

研究生 刘文斌 指导教师 周钦德 教授

应用数学专业

§1. 引 言

1927年，Thomas〔2〕和Fermi〔1〕各自独立地提出了原子核物理中著名的“Thomas－Fermi”方程：

$$t^{\frac{1}{2}}x''=x^{\frac{3}{2}} \tag{1.1}$$

与其对应着有不同物理意义的三个边值条件：

a）正离子型： $x(0)=1,\quad x(a)=0,$

b）弧立中性原子型 $x(0)=1,\quad x(\infty)=0.$

c）具有 Bohr 半径b的中性原子型：

$$x(0)=1\qquad -x(b)+bx'(b)=0$$

在其后的数十年间，人们以各种方式对上述边值问题进行研究，得出若干结果（〔3〕－〔8〕）。特别值得提出的是：1978年．C．D．Luning 在〔5〕中仅证明了当$b\in\left(0,\ \dfrac{6\sqrt[3]{5}}{5}\right)$时，边值问题（1.1）、（c）有唯一解。1981年，A．Granas，R．B．Guenther和J．W．Lee〔8〕将“Thomas－Fermi”方程的形式予以推广，研究了下述奇异边值问题

$$\psi(t)x''=\varphi(t,x)$$

$$x(0)=a,\qquad x(1)=b$$

在条件

i) $\psi(t)\in C[0,1],\ \psi(t)>0\ t\in(0,1],\ \int_0^1\frac{dt}{\psi(t)}<\infty.$

ii）存在正数M，当$|x|>M$时，$x\varphi(t,x)>0$

下的解的存在性。1986年，Bobisud〔13〕讨论了同样的两点边值问题，并把关于$\psi(t)$的条件放宽为$\int_0^1\frac{t\,dt}{\psi(t)}<\infty$。

本文以“Thomas－Ferml”方程和边值条件a)、c)为背景，利用上、下解等技巧研

究形式更为一般的奇异边值问题

$$\psi(t)x''=f(t,x,x') \tag{1.2}$$

$$a_0x(0)-b_0x'(0)=c_0 \tag{1.3}$$

$$a_1x(1)+b_1x^1(1)=c_1$$

其中 $a_i, b_i\geqslant 0$. $a_i+b_i>0$ $C_i\in R$, $i=0.1$和奇异边值问题

$$\psi(t)x''=f(t,x) \tag{1.4}$$

$$x(0)=c.\ c_1x(1)+c_2x'(1)=0 \tag{1.5}$$

其中 $c>o$. $C_1, C_2\in R$, 且满足 $SC_1+C_2\neq 0$ $(0<s<1)$

对边值问题（1.2），（1.3），我们所得的结果包含了 Granas 等人的工作. 对边值问题（1.4）.（1.5），我们所得的定理证明了"Thomas－Fermi"方程的边值问题（c）当 $b\in(0.\infty)$ 时解的存在唯一性，从而推广了 C.D.Luning 的结果. 所以，本文从理论上彻底地证明了"Thomas－Fermi"方程的第一、第三类边值问题的解的存在、唯一性. 由于篇幅所限，第二类边值问题将在另文中讨论.

§2. 关于边值问题（1.2），（1.3）解的存在性、唯一性

我们假设

I) $f(t,x,x^1)\in C(J\times R\times R)$, $\psi(t)\in C(J)$, $\psi(t)>0$, $t\in(0.1]$.

$$\int_0^1\frac{dt}{\psi(t)}<\infty,\quad J=[0.1]$$

Ⅱ）存在非负实数M_1、M_2、A 和 B, 使得

$f(t,-M_1,0)\leqslant 0$,　　$f(t,M_2,0)\geqslant 0$, $t\in J$,

$|f(t,x,x')|\leqslant B|x'|+A$　　$t\in J$. $-M_1\leqslant x\leqslant M_2$. $x'\in R$

$-a_0M_1\leqslant C_0\leqslant a_0M_2$, $-a_1M_1\leqslant C_1\leqslant a_1M_2$

于是有

引理 2.1. 在条件Ⅰ）Ⅱ）下，对任意自然数$n\geqslant 2$方程（1.2）有解 $x_n(t)$ 满足

$$a_0x_n\left(\frac{1}{h}\right)-b_0x_n^1\left(\frac{1}{h}\right)=c_0,\ a_1x_n(1)+b_1x_n'(1)=c_1. \tag{2.1}$$

$$-M_1\leqslant x_h(t)\leqslant M_2\qquad t\in\left[\frac{1}{n},1\right]. \tag{2.2}$$

证明：文〔9〕定理 1 的特殊情形.

定理 2.1. 在条件Ⅰ）. Ⅱ）下，边值问题（1.2）.（1.3）有解 $x(t)$ 于$t\in J$ 上满足不等式

$$-M_1\leqslant x(t)\leqslant M_2,\ |x'(t)|\leqslant N \tag{2.3}$$

其中 $N=\left(N_0+\int_0^1\frac{Adt}{\psi(t)}\right)\exp\left(\int_0^1\frac{Bdt}{\psi(t)}\right)$, $N_0=\left[2(M_1+M_2)+\int_{1/2}^1\frac{Adt}{\psi(t)}\right]\exp\left(\int_{1/2}^1\frac{Bdt}{\psi(t)}\right)$

证明：对任意自然数 $n\geqslant 2$，由引理2.1知方程（1.2）有解 $x_n(t)$满足（2.1）和（2.2）。现在证明

$$|x'_n(t)|\leqslant N \qquad \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1 \tag{2.4}$$

易见，当 $n\geqslant 2$时，$x_n(t)$于$\left[\frac{1}{2},1\right]$上有定义．由中值定理及（2.2）知，存在 $\xi_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$|x'(\xi_n)|\leqslant 2(M_1+M_2)$$

从而当 $\xi_n\leqslant t\leqslant 1$时

$$|x'_n(t)|=\left|x'_n(\xi_n)+\int_{\xi_n}^{t}\frac{f(s,x_n(s)x'_n(s))}{\psi(s)}ds\right|$$

$$\leqslant|x'_n(\xi_n)|+\int_{\xi_n}^{t}\frac{A+B|x'_n(s)|}{\psi(s)}ds$$

$$\leqslant\left[2(M_1+M_2)+\int_{1/2}^{1}\frac{Ad\,t}{\psi(t)}\right]+\int_{\xi_n}^{t}\frac{B|x'_n(s)|}{\psi(s)}ds$$

由 *Bellman* 不等式即得

$$|x'_n(t)|\leqslant N_0 \qquad \xi_n\leqslant t\leqslant 1$$

特别有 $|x'_n(1)|\leqslant N_0$。于是当$\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1$ 时有

$$|x'_n(t)|=\left|x'_n(1)+\int_{1}^{t}\frac{f(s,x_n(s),x'_n(s))}{\psi(s)}ds\right|$$

$$\leqslant|x'_n(1)+\int_{t}^{1}\frac{A+B|x'_n(s)|}{\psi(s)}ds$$

$$\leqslant\left(N_0+\int_{0}^{1}\frac{Ad\,s}{\psi(s)}\right)+\int_{t}^{1}\frac{B|x'_n(s)|}{\psi(s)}(ds)\triangleq u(t)$$

则

$$u'(t)=-\frac{B|x'_n(s)|}{\psi(t)}\geqslant-\frac{B}{\psi(t)}u(t)$$

对不等式两边同乘以 $\exp\left(\int_{1}^{t}\frac{Bd\,s}{\psi(s)}\right)$得

$$\left(u(t)e^{\int_{1}^{t}\frac{Bds}{\psi(s)}}\right)'\geqslant 0$$

对不等式两边从 l 到 t 积分得

$$\left(u(t)e^{\int_{1}^{t}\frac{Bds}{\psi(s)}}\right)'\leqslant u(1)$$

从而

$$u(t)\leqslant u(1)\exp\left(\int_t^1\frac{B\,d\,s}{\psi(s)}\right)\leqslant u(1)\exp\left(\int_0^1\frac{B\,d\,s}{\psi(s)}\right)=N$$

因为 $|x'_n(t)|\leqslant u(t)$，所以 (2.4) 成立，即：

$$|x'_n(t)|\leqslant N \qquad \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1.$$

定义函数

$$y_k(t)=\begin{cases}x_n(t) & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\\ x_n\left(\frac{1}{n}\right)+x'_n\left(\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{1}{n}\right) & 0\leqslant t<\frac{1}{n}\end{cases} \tag{2.5}$$

则 $y(t)\in C'(J)$，且

$$y_n^1(t)=\begin{cases}x_n^1(t) & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant l\\ x_n^1\left(\frac{1}{n}\right) & 0\leqslant t<\frac{1}{n}\end{cases}$$

由 (2.2)．(2.4) 有

$$|y_n(t)|\leqslant(M_1+M_2)+N. \qquad |y'_n(t)|\leqslant N \quad 0\leqslant t\leqslant |. \tag{2.6}$$

下面证明：当 $0\leqslant S\leqslant t\leqslant 1$ 时有

$$|y'_n(t)-y'_n(s)|\leqslant K\int_s^t\frac{d\,\tau}{\psi(\tau)} \tag{2.7}$$

其中 $K=\max_{t\in J,\,x\in[-M_1\,M_2],\,|x'|<N}|f(t,x,x')|$

事实上，当$0\leqslant s\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}$时，(2.7) 显然成立．当$0\leqslant s\leqslant\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1$　时

$$|y'_n(t)-y'_n(s)|=\left|x'_n(t)-x'_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$=\left|\int_{1/n}^t\frac{f(t,x_n(t),x'_n(t))}{\psi(s)}d\tau\right|$$

$$\leqslant K\int_{\frac{1}{n}}^t\frac{d\,\tau}{\psi(\tau)}\leqslant K\int_s^t\frac{d\,\tau}{\psi(\tau)}$$

当 $\frac{1}{n}\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时

$$|y_n^1(t)-y_n^1(s)|=|x'_n(t)-x'_n(s)|$$

$$=\left|\int_s^t\frac{f(t,x_n(\tau).x'_n(\tau))}{\psi(\tau)}d\,\tau\right|$$

$$\leqslant K\int_s^t\frac{d\,\tau}{\psi(\tau)}$$

所以，当$n\geqslant 2$时，从 (2.6)．(2.7) 知序列$\{y'_n(t)\}$和$\{y_n(t)\}$均于 $t\in J$上一致有界，同等连续，从而存在一致收敛子列$\{y_{n_j}^1(t)\}$ 和 $\{y_{n_j}(t)\}$．设其极限依次为 $V(t)$．$u(t)$．则对任意 $t\in(0.1]$，只要$j\gg 1$，就有