目 录

緒　論

在开始学习高等数学的时候，就应当对它的发展过程、研究的对象及其各方面的应用等問題有个概括的正确的了解，这对今后明确学习的目的和方法是有好处的，緒論也就是要帮助讀者了解它。

§0.1 数学研究的对象及其特点

中学的一些数学課程如代数、几何、三角等所研究的对象不外是空間形状和数量关系，代数是专門研究数量关系，几何是研究空間形状，三角則两者兼有。整个数学，包括即将学习的高等数学也仍然以这两者作为研究对象，因此，恩格斯曾經給数学下过一个簡单明了的定义："純数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的。"①

过去所学的一些数学課程（如三角、代数、几何）——所謂初等数学——是以研究常量为主（除极限外）的，如研究图形的面积、长度或方程的解等，即研究靜止状态。而高等数学（包括解析几何、微分、积分、微分方程等部分）則可用来研究物体运动的方位与軌迹，变速运动的瞬时速度，变力所作的功等包含变化过程的实际問題，这里我們遇到的量是可以变化其数值的，于是就不能簡单地沿用过去的知識。例如在研究不变的力 f（大小、方向均不变）作用于一物体經过位移 s，所作的功 W 为 $W=f\cdot s$，但如果力 f 的大小在改变（为簡单起見，假設方向不变），則功 W 就不能用 $f\cdot s$ 得到，而必須另行設法。高等数学就是这样发生和发展的，它研究的是这类問題，即变量（可变的量）以及变量之間的关

① 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1957 年版，37 頁。

系。因此，在研究方法上和初等数学有所不同。初等数学还可以勉强用静止的观点去研究；而高等数学則必須有运动的观点，整个微分学和积分学就是建立在包含着运动观念的极限的基础上的。

事实上，現实世界的事物都是在运动着，彼此之間又有着各种各样的內在联系，只有用高等数学，才能帮助更深刻更全面地研究現实世界的規律。因此，由初等数学发展到高等数学是数学发展的一个飞跃。所以，恩格斯說："变数是数学的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学。"① "只有微分学才使自然科学上不仅能用数学来表明状态，并也表明过程，即运动。"② "变数数学对常数数学的关系，一般說来是和辯証思維对形而上学思維的关系一样的。"③

当然，研究变量过程中也往往固定在某一时刻把它看成常量，利用常量的一些知識来研究它，因此不能把初等数学和高等数学截然分开。

数学与物理学、化学、生物学等都是研究現实世界中客观規律的科学，但毕竟有着不同之处，数学着重在量的方面研究客观事物的規律，而其他科学却是着重在質的方面(例如物質的某一特定状态或某一特定运动形式)。但客观事物的質和量是有其內在联系的，无法彼此孤立来研究。例如，最初研究气体状态时，只是从質的方面发現气体受热会"产生力量"，但是，当要利用这种性質来制造蒸汽机乃至进一步作精确設計时，就需要从量的方面弄清气体的"温度"、"压强"与"体积"之間的关系；又如液体加热到一定程度将沸腾而汽化，引起了質的变化，因此研究事物的数量关系是了解事物本質所不可缺少的，但是从量的方面研究現实世界，只能帮助而不能代替从質的方面对現实世界进行研究。过去有些資产阶級唯心主义学者，散布过一种說法，說"数学是科学之母"，"有了数学可以推出物理学等其他自然科学"，这种說法完全是荒

---

① 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1959 年版，217 頁。

② 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1959 年版，229 頁。

③ 恩格斯："反杜林論"，人民出版社 1957 年版，125 頁。

謬的。

数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用广泛性。数学的抽象性表現在它暫时撇开事物的具体内容而从抽象的量的方面去研究它，它不是以某种自然現象或社会現象作为直接研究对象。譬如两棵树加三棵树，两只羊加三只羊，我們是撇开树、羊去研究 2+3 的数量运算。当然在現实世界中更复杂的数量关系还多得很，表現更高度的抽象。但这种抽象形式只是表面上掩盖了它的实际来源，其内容却是非常現实的。列宁曾經說过："一切科学的（正确的、郑重的、非瞎說的）抽象，都更深刻、更正确、更完全反映着現实。"① 数学的抽象和它的另一特点——应用广泛性是緊密相連的，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际問題。例如一个力学系統的振动和一个电路的振蕩常用同一微分方程来描述。撇开具体的物理現象中的意义来研究方程，所得的結果又可用于类似的物理現象中，这样，我們掌握了一种方法就能解决許多类似的問題。对于不同性質的現象具有相同的数学形式——即相同的数量关系，是反映了物質世界的統一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物質形态或其特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物質形态和各种运动形式中，所以，数学的应用是很广泛的。

正因为数学是来自現实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实踐，才表現出数学的預見性。在火箭、导彈发射之前，可通过精密的計算，預測它的飞行軌道及着陆地点，在海王星直接被观察到以前，就从天文計算上預測它的存在，由于同样的理由才使得数学成为工程技术中的重要工具。

§0.2 数学发展的簡单历史

初等数学发展比較早，在紀元前，由于农业（如土地丈量）和建筑等

① 引自列宁"黑格尔'邏輯学'一书摘要"。

的需要，积累了相当丰富的关于图形的知識，后来发展成为几何学。三角学也由于当时测量、天文历算等需要得到相当的发展。代数则是由于商业交易的发展，逐漸有了負数、分数的概念，以至有了对簡单代数方程的研究，到八——十三世紀才逐漸形成代数学的系統。总的說来，在紀元前，初等数学的发展比較迅速是因为当时正处于奴隶社会初期，生产和文化都有很大的发展，但此后长时期內社会生产力比較低，直到十六世紀，它的发展都比較緩慢。

十六世紀末叶到十七世紀是資本主义誕生时期，此时，由于生产和技术上需要的刺激，数学又重新有了蓬勃的发展。同时也因机械工业的誕生和成长，航海、造船、采矿等事业的迅速发展，引起了对几何学和力学方面的大量新問題(如运动的速度、曲綫的切綫、图形的面积等等)。在大量地逐个解决这些具体問題过程中，人們慢慢注意到这些問題的解决方法的共同点，因而形成了微分学和积分学。微积分的創造开辟了数学史的新紀元，从此二百年中数学上大量的重要部門如微分方程、变分法、积分方程、复变函数都相継由于运动学、水力学等的需要在微积分等的基础上建立和发展起来。这些发展也使数学的另一些部門(如算术、几何等)，由于新方法的引用得到新的进步。在这以前的全部数学史中，还沒有过另一个时代能在这样短的时期里获得这样多的决定性的成就，这些成就当时从根本上改变了数学的面貌，并且极大地丰富了它的內容。

这个阶段数学的大发展也曾遭到了一些阻力，当时，微积分的概念是模糊不清的，这些弱点被一些人，特别是当时英国的宗教势力(由于牛頓的科学工作支持了唯物論，动搖了宗教观)利用来攻击微积分的理論基础。但当时微积分的蓬勃发展及其广泛有效的应用，鼓舞了大批数学家不顧这些攻击，热情于大胆的創造，而不去注意于理論基础的严密性。直到十八世紀，一方面在数学广泛发展与应用中更多地暴露出由于理論基础不稳固而产生的問題(如某些无穷級数的运算上产生了錯誤)，

而且这时数学的各分支已变得内容丰富，头緒众多，也需要加以整理和系統化。另一方面，在这些数学分支上积累了相当多的具体知識和經驗，也为巩固理論基础創設了客观条件，因此，十九世紀在数学分析的理論基础方面就展开了較多的研究工作，在这些成果的基础上进行了正确的但是更抽象的概括，隐藏在各种現象背后的更根本的量的关系被揭示出来了。到十九世紀末，严格的邏輯論証与公理化趋势也盛行起来了，十九世紀末与二十世紀初这种趋势更丰富了数学的各分支，也发現了許多数学分支之間的內在联系(如代数与几何的联系等)，但因当时处在資本主义衰退时期，在哲学思想上是唯心主义的上升时期，直到十九世紀末叶，唯心主义已在資本主义世界占統治地位，因此，数学家的唯心主义世界观在数学严謹化的过程中滲透进来。他們企图"用公式和符号代替一切"，过分夸大形式邏輯的作用，并把数学歪曲为純粹形式主义的自由思想的产物，单純追求抽象化和邏輯"完美"，把数学当作統治阶級的装飾品和脫离实际的"学者"欣賞的东西，从而造成数学发展的某些畸形，并在一定程度上束縛了从生产实践中提出的一些新的数学方法的发展。例如 1892 年一位电机工程师赫維賽德在研究电路問題中創立了"运算微积分"方法，但由于缺乏严格的邏輯論証(尽管在实践中行之有效)，当时数学杂志不肯发表，直到 1916 年以后，經一些数学家的严格証明，才得到承認和广泛的应用，这样的例子不胜枚举。

近二、三十年中，特别是近十多年来，由于原子能，高速飞行，无綫电技术，自动控制，大型的水利工程和土建工程都需要較高深的数学工具。因此，对数学的发展提供了新的物質基础，許多新的分支迅速地建立起来，如計算数学，信息論，排队論，規划論等等。同时，也使原有的一些理論系統得到新的发展，如微分方程中非綫性方程的求解，稳定性問題，偏微分方程中的混合型方程的研究。在近代数学的发展中，苏联有着巨大的成就，如数論，函数論，微分方程定性論，数理方程，計算数学，概率論，数理邏輯等都跃居世界的前列，許多重要的数学分支居世

界的領导地位。人造卫星，火箭，导彈，宇宙飞船上了天，都是和苏联先进的数学水平分不开的。

这里，我們要单独講一下我国的情况，我国人民是勤劳智慧的，有着悠久的文化，被称为文明古国，在古代生产較为发达，数学方面也有极为丰富的知識。几何学方面，早在公元前一千年就知道勾股弦关系。公元前三至二世紀已出現数学研究的总結性著作“九章算术”，上面載有不少有关直角三角形边长关系及代数問題，公元初到四世紀期間，我国对圓周率的研究已达到相当精确的程度(当时祖冲之已获得$\pi \approx 3.1415926$ 或 $355/113$)。三——五世紀出現“孙子算經”，上面已有代数中同余式問題。直到十三世紀，我国在代数方面一直有很杰出的成就，如二項式 $(a+b)^n$ 的展开式系数，代数方程的近似解法(現在外国书上所謂“合奈法”)等的发現时代都在欧洲数学家以前。并且早自六世紀以来，我国数学就在很大程度上影响着日本和朝鮮的数学的发展，后来，由于长期停留在封建社会，生产力发展迟緩，因而数学发展也和其他科学一样受了限制，到了欧洲資本主义兴起以后，我国数学在相形之下就日益落后了。

近百年間，我国淪为半封建、半殖民地，生产力受到严重的束縛，数学失去了迅速发展的物質基础，并且造成依賴性的畸形发展。解放前夕，我国数学队伍非常单薄，而且大部分人不愿意去研究应用較多和生产实踐較为密切的数学分支，理論脫离实际的思想非常严重，輕視实踐成了风气，从而更加影响我国数学的发展。

但解放后，在党的領导下，我国的生产面貌起了根本的变化，数学也跟其他科学一样，有了蓬勃的发展，許多重要的，但是基础薄弱的甚至是空白的部門已經开始填补起来，例如：微分方程，概率論，数理統計，計算数学等。特别是党公布了社会主义建設总路綫以来，全国各地各部門都掀起了大跃进的高潮，大規模的建設工程和尖端科学，以史无前例的速度在发展。这些都为数学的发展开辟了广闊的园地和提供最

好的物質基础。我国数学界开始冲破資产阶級的思想束縛，投身到生产实踐中去解决了和正在解决許多生产上的問題(如水坝应力分析，气象預报，运輸調度，工业产品的质量檢查与控制，以及其他尖端科学技术中的問題等等)。获得了初步的，但又是空前的收获，如綫性規划就有独特成就。优越的社会主义制度为我国数学的发展开辟了无限美好的远景。目前，我国正在热火朝天地进行着一个群众性的技术革新和技术革命运动，正如李富春同志指出的，这是一条多快好省的发展技术的道路。可以看出，我們将从主要是学习与継承世界科学技术成果的阶段走向主要是根据我們的情况和需要进行独創的阶段，我們应該踴跃投身到这个偉大的运动中去，不断深入学习和总結广大人民的創造。只要我們沿着党指出的方向——教育为无产阶級政治服务，教育与生产劳动相結合，那么，数学将在解决生产实踐問題过程中不断提高理論水平，使得我国数学水平在最短的时間內赶上先进科学水平。

§0.3. 数学的发展和生产实踐的关系

恩格斯講过“科学的发生与发展从开始起，便是由生产所决定的。”① 毛主席在实踐論一开始就提到“首先，馬克思主义者認为人类的生产活动是最基本的实踐活动，是决定其他一切活动的东西。人的認識，主要地依賴于物质的生产活动，逐漸地了解自然的現象、自然的性质、自然的規律性、人和自然的关系；而且經过生产活动，也在各种不同程度上逐漸地認識了人和人的一定的相互关系。一切这些知識，离开生产活动是不能得到的。”② 作为科学之一，作为人类知識之一的数学，当然也不例外，也是离不开人类生产实踐的。但是資产阶級学者却不承认这一点，說什么数学是从实际抽象出来的，已沒有什么实际的意义，因此，它的发展可以和生产实踐沒有什么关联，特别是近代数学尤其可以

① 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，149 頁。

② 毛澤东选集，第一卷，人民出版社 1951 年版，281 頁。

脫离生产实践而独自发展起来的。这些說法是极端錯誤的，为了反駁这些錯誤的看法，我們还是拿数学发展的一些例子来看。

在历史上每个时期的数学水平基本上是和当时的生产水平相适应的，公元前平面几何在希腊达到相当完美的地步（当时形成的欧氏几何一直到現在并沒有什么本質的改变），而极限方法虽已为阿基米德使用过，但由于当时社会生产力还不需要数学来研究变量关系，因而沒有发展的基础。到了欧洲資本主义兴起，由于航海、建筑等的需要，各种力学得到发展，于是极限方法就很快被系統地运用而产生了微积分学。从十七世紀微积分发展以后的二百年中，不少数学家同时还研究了力学、电学等其他自然科学和技术問題。他們运用数学工具去解决所碰到的实际問題，而这些实际問題也成了他們在数学上获得成就和創造的巨大源泉。这两百年在数学发展史上留下了光輝的成就。这时古代数学曾經很发达的我国，却由于生产落后长期停留在封建社会，数学的发展却停滞不前，逐渐落后。

这些历史現象以及前面所講苏联数学的发展，充分說明了数学的产生与发展是被生产实踐提供的問題所推动，生产水平和其他科学技术的发展水平为数学发展創設了客观条件，十九世紀的俄国数学家契比雪夫有这样的見解"理論与实踐的联系会得出最好的結果，受惠的将不仅是实踐，而且科学本身在实踐的影响下也向前发展了。实踐为科学开辟了新的科目，給科学提出完全新的問題，因而也引起了要探求全新方法的努力"。这样的看法并不是說数学就是生产的"直接訂貨"，每一个数学分支甚至每一个数学定理都来自生产中提出的問題。有些数学理論可能来自另一些数学理論的邏輯推理，但作为推理的出发点的現有理論与概念是从实踐中概括出来的，而且推理所得到的結果是否能得到发展，仍須拿到实踐中去考驗。总的說来，任何数学理論能否得到发展还是要取决于生产实踐的需要。例如：二进位和布尔代数的研究，过去并沒有受到很多的注意，但自电子計算机出現以来，由于找到了

它們的应用,从而改变了这种状况。概率論的某些概念与方法最初是由于游戏中来的,但概率論眞正作为数学的一个分支而受到注意和发展是由于商业,人口統計,誤差理論(测量、射击等)需要的推动,特別是物質結构的分子学說被普遍承認与应用以后,加以現代生产发展的需要,概率論就得到极大的发展,乃至成为当前数学中重要分支之一了。又如非欧几何初創时并未受到重視,到广义相对論出現以后,由于需要就得到較多的研究。与此相反,有一些数学内容却由于沒有能够在实踐中找到它的应用而得不到发展。这些事实都足以駁倒对数学发展的歪曲說法。

当然,在数学的发展中,数学家的努力与才能也起了一定的作用,但是資产阶級唯心主义者故意夸大了科学家的个人作用而抹杀了生产实踐的推动力量和群众的作用,把問題說成是一些天才数学家个人創造了数学的某些分支,好象沒有他們就不会有今天的数学似的;例如在某些书上可以看到"牛頓和来布尼茲发明了微积分"等等,实际上,十七世紀許多科学家参加了微积分的創造工作,牛頓和来布尼茲不过是完成这創建的初步阶段,有着較大的貢献而已,他們的工作是建立在別人工作的基础上,沒有他們二人也一定会有其他人来完成这些工作,关鍵在于当时生产实际的要求,迫使微积分方法的发展,而当时的生产水平与科学水平也提供了发展的客观可能性,因此,在那时微积分的建立就是客观形势的必然产物。

§0.4 貫徹党的教育方針,反对資产阶級路綫

解放以来,我国数学有了巨大的发展,在这段时期内,我們学习了苏联数学的先进成就,逐漸認清了数学发展的健康道路。多数知識分子在努力改造自已的思想,为社会主义建設貢献自已的力量,新的力量在党的領导下,陆續被培养出来,在文教战綫上的社会主义陣地加强了。但另一方面,資产阶級教育思想与学术思想頑强地抵抗党的方針路綫,

不愿意把数学理論与生产实际結合起来，不愿解决从生产实际中所提出的数学問題，醉心于追求脫离实际地“研究”所謂“高級”理論，醉心于追求个人名利，說什么“数学沒阶級性”，因此认为“数学科学的成就可以为全人类服务，数学家可以为数学而数学，应該从本門科学发展的需要来发展数学”。这种情況严重地阻碍了数学在社会主义建設中所应发揮的作用，严重地阻碍了党的方針的貫徹，同时，也阻碍了我国数学的迅速发展。几年来，我們所取得的成就，是經过激烈的两条道路斗爭的。因此，只有徹底清除这些資产阶級思想的影响，坚决貫徹党的教育方針，使数学与生产实际相結合，服务于无产阶級的政治，我国数学才能得到健康的发展，在祖国建設中发揮出它的最大的作用。

几年来，科学发展的經驗証明，在阶級还存在的时候，科学事业是不能超阶級的，而且只有从社会主义建設出发，才能更快地发展科学，并使发展有利于人民。数学也不例外，十七——十九世紀的欧洲由于生产的推动，在数学发展上曾有飞快的速度，我們今天所从事的社会主义事业是十七——十九世紀所不能比拟的。因此，只要紧密結合社会主义建設，那么，我国数学事业就一定会以远超过十七——十九世紀的速度和规模而向前发展。說到理論，馬列主义者一向是最为重视的，但是眞正的理論是那些从实践中总結出来又能用来指导生产实踐的，脫离实际的“理論”是空洞的教条，是沒有价値的。我們应該坚决反对那种游戏式和脫离实际地研究数学的态度。現在生产实踐已經提出很多数学問題需要解决，并要求提高到理論，以进一步指导生产，我們应該积极地滿足这些要求，并从而发展适应我国社会主义建設需要的数学。

在数学教学方面，尽管解放以后已取得很大成績，但还不能滿足社会主义建設高速度发展的需要。过去高等数学教学內容陈旧割裂，教学方法上也有脫离实际和形式主义及主观主义的現象。所以对高等学校的数学教学也必須进行教学改革，但是，目

前仍然有人認为“旧体系是經过千錘百炼的”，因此，“无法加入結合专业实际和适应現代化要求的尖端内容，过去的內容系統是一个滴水不进的封閉系統”。又有人認为“数学是客观規律的正确反映，所以，必然包含有辯証法”。或者“在数学中辯証法沒有威力，起不了什么作用”。他們忘記了旧体系是資产阶級科学家的总結，它必然渗透着資产阶級的世界观和思想体系，这种观点和前面的自然科学工作者超阶級超政治的观点一样，无非是反对自然科学工作中的两条道路斗爭、反对用馬克思列宁主义来指导数学、反对对数学中唯心主义思想进行批判而已。

教学改革，是一場阶級斗爭，这不仅是教师的事，每个同学在学习过程中也应該自覚地参加这个斗爭，在斗爭中作个促进派。为此在数学教学中必須根据专业培养目标的要求，坚决把生产引入教学，努力貫徹教育与生产劳动相結合的方針。

§0.5. 結束語

从以上这些問題，我們会理解到数学对工程技术工作者是极为重要的理論工具，离开了它，在現代的技术条件下，就难以进行精确的工作，就象鉗工离不开銼刀，木工离不开鋸子一样。同时，我們也了解了数学这門科学的基本特点，在学习时应自覚地运用馬克思列宁主义观点，密切联系实际应用，重視熟練計算，并注意数学方法論上某些特有的技巧，克服在理解数学的抽象概念及运用数学理論的困难。在运用数学工具时，应解放思想，敢于大胆进行創造，同时又要虛心向劳动人民群众的丰富生产实踐經驗学习，这样在将来的工作中，就会获得胜利，在工作中継續不断提高，以适应工作需要的不断发展。

第一章　矢量代数

矢量是由力学、物理学以及一些技术科学的需要而引入的数学概念，特别是由于电磁学、流体力学的发展，促使人們更加广泛深入地来研究矢量的一般理論。矢量是研究力学、物理学以及許多技术科学的重要数学工具之一，同时也是研究数学本身的許多問題的重要工具之一。

本章研究矢量的代数运算，即加法、减法及乘法的运算，所以叫做“矢量代数”，以区别于以后要研究的矢量的分析运算，即微分、积分的运算，后者叫做“矢量分析”。

§1.1. 矢量的概念

在现实世界中，我們会遇到两种量，一种是象温度、質量、密度、时間、功、能等等的量，这种量只用数来表示，叫作数量；另一种是象力、位移、速度、加速度等等的量，这种量不但有大小，还有方向。因为，大小相同而方向不同的两个力，分别作用在同样的两个物体上，所产生的效果是不一样的；又如两个物体以同样大小的速度而不同的方向运动时，結果所产生的位移也是不一样的。这种有大小又有方向的量叫作**矢量**。

数量又叫**純量**、**标量**、**无向量**。矢量又叫**向量**、**有向量**。

研究力、速度、加速度等等这种既有大小又有方向的量，在許多实际問題里是十分重要的。例如，一架飞机在天空中飞行，它便受到自身的重力、发动机的推力、空气的阻力、风力等的作用，这些力都有各自的大小与方向，研究这些力的作用，对于如何控制飞行的速度与方向，保

証飞行的安全，材料不致受到破坏等都是必要的。又如在設計一座桥梁时，就需要分析与計算各种受力的情况，以保証桥梁的坚固、安全与尽可能的节省材料。設計一个大厅的大跨度的屋頂也需要分析与計算各种受力的情况，选择合适的曲面形状，使得既实用、經济、又安全坚固。又如要使大炮能准确击中敌人的工事，就必須算好大炮应取多大的仰角，炮彈应具有多大的推力与初速度等等。

数学中的矢量理論，主要在于从許多物理事实总結、抽象出这种有大小有方向的量，发掘在量的方面的一般規律和特性，以及研究它們的計算方法。矢量的理論是由分析实际問題，将它們加以抽象与概括而得出来的，它反映了有大小有方向的量的客观屬性，所以它反过来又可以对有关的实际問題起指导作用。但决定性的因素，仍然是实际問題本身的物质規律性，即事物本身的物理过程。

数量常用拉丁字母来記，如 a、b、c 等。矢量常用拉丁字上加一个箭头来記，如 $\overrightarrow{AB}$ 等。有时矢量也用粗体的拉丁字母来記，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等。

矢量既然是有大小有方向的量，所以在几何上就可以用空間的一个有方向的綫段(叫做有向綫段)来表示(图 1.1)。这个有向綫段的长度等于矢量的大小，方向为矢量的方向，A 叫做起点，B 叫做終点，并且在 B 点处沿着由 A 到 B 的方向画一个箭头来表示它的方向。这种表示法，使得矢量更加直观了。

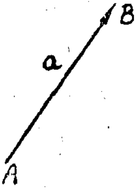

图 1.1

以 A 为起点 B 为終点的矢量又記作 $\overrightarrow{AB}$。矢量的大小或长度記为 $|\vec{a}|$、$|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。矢量的大小又叫做矢量的模或长度。模是数量。

起点固定的矢量叫作**固定矢量**，例如，我們談到某一点的运动速度时，这速度是与所考虑的那一点的位置有关的。談到位移时也要提出是从哪一点开始的，所以速度、位移都是固定矢量。

起点可以在矢量所在直綫上任意移动的矢量(图 1.2) 叫做滑动矢量。例如,作用在一个剛体上的力就是滑动矢量,它可以在剛体中力的作用綫上任意移动而对剛体的效果是一样的。

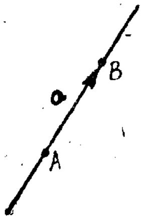

图 1.2

但是,在数学上,我們研究矢量的最主要的、最一般的特征,卽大小和方向,这对一切矢量都是共同的。对于特殊的情况,可以在一般的原則下加以特殊考慮。所以在数学中我們主要研究**自由矢量**,卽只考虑矢量的大小与方向,而不論它的起点在什么地方。自由矢量以后簡称为矢量,遇有固定矢量和滑动矢量的情形,必要时特别指明就可以了。自由矢量的主要特征旣然是大小和方向,所以当两个矢量的大小相等方向相同时就説这两个矢量是相等的。

为了用矢量解决实际問題,必須根据矢量的物理意义(力、速度等等)总結出矢量的运算法則。

I. 数量与矢量的乘法

如果力 $\boldsymbol{F}$ 的大小 $|\boldsymbol{F}|$ 是力 $\boldsymbol{f}$ 大小 $|\boldsymbol{f}|$ 的 k 倍,方向与 $\boldsymbol{f}$ 相同,很自然地記 $\boldsymbol{F}=k\boldsymbol{f}$。

如果速度 $\boldsymbol{V}$ 的大小是速度 $\boldsymbol{v}$ 大小 $|\boldsymbol{v}|$ 的 k 倍,方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同,同样很自然地記 $\boldsymbol{V}=k\boldsymbol{v}$,

所以,我們規定:設 λ 是一个数量,当 $\lambda>0$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是模为 $\lambda|\boldsymbol{a}|$,且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的矢量;当 $\lambda<0$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$,且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的矢量(图 1.3)。

可見,$-\boldsymbol{a}$ 表示模为 $|\boldsymbol{a}|$ 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的矢量。$-\boldsymbol{a}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的負矢量。

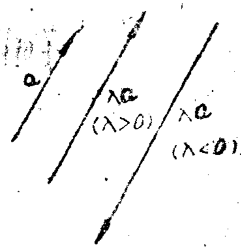

图 1.3

II. 矢量的加法

从力学的实驗我們知道,如果有两个力 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ 作用在某物体的同一点上,那么,合力 $\boldsymbol{F}$ 的方

向是以 f_1, f_2 为两边的平行四边形的对角綫方向，大小为对角綫的长(图 1.4)。合力 F 記作 f_1+f_2。对于速度根据实驗也有同样的結果。所以一般我們就用这样的方法来規定两个矢量的和。

这法則叫做求矢量和的**平行四边形法則**。

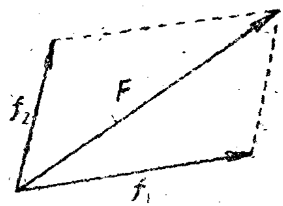

图 1.4

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点不在同一点，我們就把其中一个矢量平行移动，使得这两个矢量的起点重合(图 1.5)，再用平行四边形法則求和。

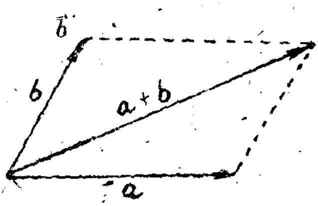

图 1.5

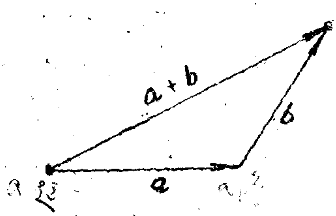

图 1.6

以上求两矢量的和可以用另外的一种方式得到：把矢量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使得 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的終点重合，那么这时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的終点的矢量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (图 1.6)。这个法則叫做求矢量和的**三角形法則**。

III. 矢量的减法

减法是加法的逆运算，所以如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，則 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{c}$，記作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。容易看出(參看图 1.7)：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})。$$

并且由加法的法則，可以得到减法的相应法則如下：

平行四边形法則 以 $\boldsymbol{a}$ 及 $-\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，則对角綫所表示的矢量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (图 1.7, a)。

三角形法則 由 $\boldsymbol{b}$ 的終点到 $\boldsymbol{a}$ 的終点所成的矢量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (图 1.7, b)。