綫性代数讲义

长春地质学院数学教研室

数学地质组

1978年8月

编 者 说 明

在用数学方法解决某些领域中的实际问题时，往往都以线性代数作为起码的数学基础知识。特别是在用电子计算机计算数值结果时，都要把各种问题化成线性代数问题。例如，多元统计分析方法在地质、气象、医学等各个领域中都有广泛的应用，它已成为数学地质中的一个重要方法，而线性代数就是它的必不可少的最基本的数学语言。这份讲义主要是为学习多元统计分析提供必要的基础知识，适当注意了联系地质方面的实际问题。因此在取材上力求实用，在讲法上避免了一些复杂的数学推导，力求在通俗易懂的基础上讲清一些概念和方法的精神实质。

这里没涉及复线性空间和非对称矩阵化标准型的问题，对行列式的理论讲得也少，重点放在欧氏空间、特征值特征向量、二次型和正定矩阵等用得较多的内容。

矩阵和向量是线性代数的基本语言和工具，讲义中注意到了对这方面的 运 算 能力的训练。还适当介绍了一些基本的可用于电子计算机上的计算方法，把它们分散在有关的各章中。

为了训练学员的几何直观能力，特别强调了线性代数和解析几何的联系。专设§1复习空间解析几何的知识，其中所列的几何结论和方法都在后面的章节中发展成为线性代数的重要结论和方法，这一节可作为前五章的导引和缩影。在第六章讲特征值和特征向量之前，又专设§21 讲中心二次曲线的主轴问题，作为这一章的几何背景。

对于非数学专业的学员，也有必要培养一定的数学方面的抽象思维能力，为此用代数学中的同构观点处理了一些问题。§2 中介绍了 n 元数组空间，在第三、五、七章讨论一般线性空间时，又用同构观点把一般问题化成§2 处理过的 n 元数组问题。§3 介绍了矩阵，第四、六章又把一般线性变换问题化成具体的矩阵问题。

每节之后都配有一些习题，一般都不太难，这对理解正文是必须的。有些习题是为后面的推导作准备的，有些习题是在多元统计分析中有用的代数结论。

以上各点都是编者注意到的一些问题，或是期望达到的目的；但在实际上是否成功，还很值得研究。在编写过程中，参考了一些书籍和资料，吉林大学、吉林物理所和我们学院的许多同志提出了不少宝贵意见，若没有这些邦助，这份讲义是编不成的。尽管如此，错误和不妥之处仍是难免的，欢迎读者提出宝贵意见。

目　　录

第一章　向量和矩阵

§1. 几何空间中的向量及其基本运算

本节内容属于解析几何的范围，它为后面的章节提供了直观背景。这里针对一些具体问题所提出的概念和方法，在后面的章节中都得到了推广，构成了本书的基本内容。

1.1 向量的加法和乘以数的运算

通常迂到的物理量一般可以分为两类：一类是仅由它的量值大小来确定的，如质量、能量等，叫做数量或纯量；另一类是由量值大小和方向共同确定的，如速度、加速度、力等，叫向量或矢量。

向量可用几何方法表成平面（2维空间）或空间（3维空间）中的有向线段（图 1.1）。这里约定：对于任意两个向量，只要它们的长度相等，方向一致，而不管它们的起点位置是否重合，就认为是相等的。这就是说，我们所研究的向量可以随便移动位置，叫做自由向量。若把所有向量的始点都移到坐标原点，则每个向量都可以由它终点的位置唯一确定，于是可以说每个向量都能用平面或空间中的一个点来表示，而数量可以看作是数轴上的一个点。

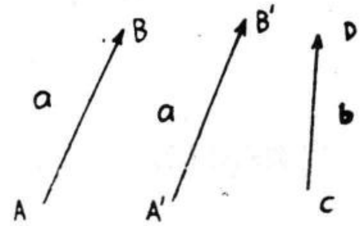

图 1.1

在给定了坐标系以后，空间中的每一点都对应按一定顺序排列的三个数——坐标，把向量的始点放在坐标原点，它的终点的三个坐标，也叫做向量的分量或坐标，它可以作为向量的代数表示形式，记为

$$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3).$$

类似地，平面向量有两个分量或坐标，记为

$$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2).$$

根据物理问题的需要，对向量可以进行下面的运算：

（1）加法。

两个向量 $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2)$，$\mathbf{b}=(b_1,\ b_2)$ 之和定义为

$$\mathbf{c}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2).$$

这在力学中相当于根据平行四边形法则或三角形法则求合力（如图 1.2）。

（2）向量乘以数

按向量的加法法则，将两个相同的向量相加，得

$$a + a = (a_1 + a_1,\ a_2 + a_2) = (2a_1,\ 2a_2),$$

这个向量的方向与原来向量 a 一致，长度等于 a 的 2 倍，可以把它记为

$$2a = (2a_1,\ 2a_2)。$$

一般地，对任意一个实数 λ，$\lambda a = b$ 表示这样一个向量：当 $\lambda > 0$ 时，λa 与 a 同向；当 $\lambda < 0$ 时，λa 与 a 反向；λa 的长度等于 a 的长度的 $|\lambda|$ 倍。

关系式 $b = \lambda a$ 表示这两个向量平行（共线）；反之，任意互相平行(共线)的两个向量，也都可以表示成这种关系。

根据相似三角形的原理，λa 的各坐标都等于 a 的相应坐标的 λ 倍（如图 1.3），于是这种运算可用坐标表示成

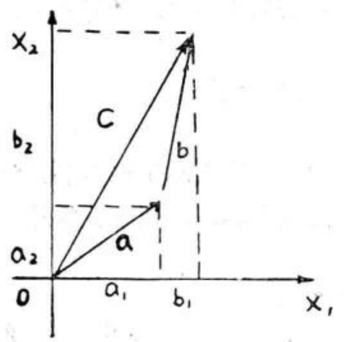

图 1.2

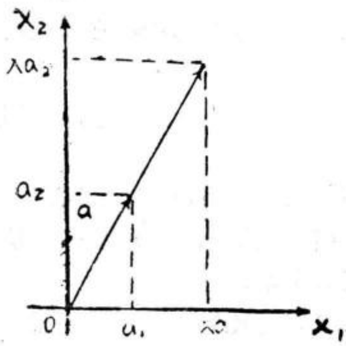

图 1.3

$$\lambda(a_1,\ a_2) = (\lambda a_1,\ \lambda a_2)\ ;$$

对空间向量来说，可表成

$$\lambda(a_1,\ a_2,\ a_3) = (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3).$$

这两种运算有下面的一些基本性质：

1° $a + b = b + a$。（交换律）

2° $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。（结合律）

3° 令 θ 表示坐标全为 0 的向量，它的终点与始点重合，显然有

$$a + \theta = a,$$

它在向量加法中的作用相当于 0 在数的加法中的作用，叫做零向量。

4° 由于

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) + (-a_1,\ -a_2,\ -a_3) = \theta,$$

我们称 $(-a_1,\ -a_2,\ -a_3) = (-1)a$ 为 a 的负向量，记为 $-a$ 。因有

$$(a + (-b)) + b = a,$$

我们就把 $a + (-b)$ 叫做 a 和 b 的差，记为 $a - b$，这又定义了向量的减法运算，即

$$a - b = a + (-b) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3).$$

5° 向量乘以数的运算还有如下两种形式的分配律

$$\lambda(a \pm b) = \lambda a \pm \lambda b,\ (\lambda \pm \mu)a = \lambda a \pm \mu a.$$

6° 向量乘以数的运算本身还有如下性质

$$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a},$$
$$0\,\mathbf{a}=\theta,\ \lambda\theta=\theta.$$

1.2 向量的分解和线性方程组

上面介绍的两种运算都叫线性运算，由任意两个向量 **a**、**b**，经过这种线性运算就得到一个新的向量

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{c}, \tag{1.1}$$

向量 **c** 叫做 **a**、**b** 的线性组合。据向量加法的平行四边形法则，线性组合关系（1.1）表明：如果 **a**、**b** 共线，向量 **c** 也和它们共线；如果 **a**、**b** 不共线，向量 **c** 必含在由 **a**、**b** 所决定的平面上。

在许多情况下，更重要的是研究相反的问题：向量的分解。例如，将一个力沿两个特定的方向进行分解，也就是根据已知的三个向量 **a**，**b**，**c**，求分解式（1.1）中的系数 x、y。

如 **a**、**b** 共线，**c** 也和它们共线，则必有适当数值 λ_1、λ_2，使得

$$\mathbf{c}=\lambda_1\mathbf{a},\ \mathbf{c}=\lambda_2\mathbf{b}.$$

这两个等式都可看成形如（1.1）的分解式，这种分解方式显然不是唯一的。

如果 **a**、**b** 不共线，**c** 在 **a**、**b** 所决定的平面上，则分解式（1.1）存在而且唯一（如图1.4）。

总之，我们得到了如下两个重要结论：

命题1.1 对于给定的向量 **a**、**b**、**c**，分解式(1.1)存在的充分必要条件是：当 **a**、**b** 不共线时，**c** 含在由它们所决定的平面上；当 **a**、**b** 共线时，**c** 也和它们共线。

命题 1.2 如果向量 **c** 可按 **a**、**b** 方向进行分解，则分解式（1.1）中的系数 x、y 是唯一的充分必要条件是：向量 **a**、**b** 不共线。

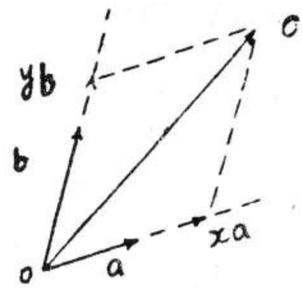

图 1.4

设取定了某一坐标系，向量 **a**、**b**、**c** 的坐标分别为

$$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2),\ \mathbf{b}=(b_1,\ b_2),\ \mathbf{c}=(c_1,\ c_2)。$$

将（1.1）用向量的坐标表示出来，则有

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

这正是一个关于 x、y 的线性方程组。前边讨论过的分解式（1.1）的存在和唯一性问题，就相当于方程组（1.2）的解的存在和唯一性问题。命题1.1和命题1.2就成了方程组（1.2）的解存在和唯一性的判定准则。这些结论在第四章中将发展成为完整的线性方程组理论。

基于上述讨论，在某一平面上任意取定了两个不共线的向量 **a**、**b** 以后，该平面上的任一向量 **c** 都可按（1.1）式进行分解，使它对应唯一确定的数对（x，y）；反之，由任意数对（x，y），也可以按（1.1）式算出唯一确定的向量 **c**。两个不共线的向量 **a**、**b** 就构成

了这个平面的一个坐标系，或称为平面的一组基向量，数对（x，y）叫做向量 $\mathbf{c}$ 在这坐标系之下的坐标（图 1.4）。

类似的讨论可以证明，三维空间中的任意三个不共面的向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 都可以构成空间中的坐标系，空间中的任意向量 $\mathbf{d}$ 都可按这三个方向进行分解

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

使它对应确定的三个数（x，y，z），叫做 $\mathbf{d}$ 在这个坐标系之下的坐标。

1.3 内积和基本度量概念

我们从力学中知道，当作用在物体上的力 $\mathbf{a}$ 和物体的位移 $\mathbf{b}$ 方向不一致时，这个力所作的功是

$$w = \|\mathbf{a}\| \ \|\mathbf{b}\| \cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \|\mathbf{a}\| \ \|\mathbf{b}\| \cos\varphi,$$

其中 $\|\mathbf{a}\|$，$\|\mathbf{b}\|$，分别表示向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的长度，$\varphi = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 表示向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 之间的夹角。我们就把 w 叫做向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的内积，记为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\varphi. \qquad (1.3)$$

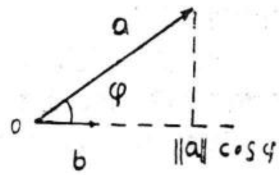

图 1.5

这可以看作是一般的两个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 内积的定义，内积的结果是数量，而不是向量。

由图 1.5 可以看出，$\|\mathbf{a}\|\cos\varphi$ 是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影：当 $\varphi < \frac{\pi}{2}$ 时，投影为正；当 $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 时，投影为负，相当于作用力 $\mathbf{a}$ 在位移方向 $\mathbf{b}$ 上的分力，向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的内积可以看成是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影乘以 $\mathbf{b}$ 的长度。特别地，当 $\|\mathbf{b}\| = 1$ 时，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cos\varphi$，内积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 就等于 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影。

对于任意向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 和任意数 λ，内积运算有如下几条基本性质：

1° $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,

2° $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,

3° $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

4° $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$，等号仅当 $\mathbf{a}$ 为零向量（长度为 0，或坐标全为 0）时成立。

内积是用向量的长度和夹角定义出来的；反之，也可以将向量的长度和夹角用内积表示出来：

当 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ 时，有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \ \|\mathbf{a}\| \cos 0 = \|\mathbf{a}\|^2,$$

即

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}; \qquad (1.4)$$

对任意两个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，可以用内积算出。

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \ \|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}}。 \qquad (1.5)$$

特别地，两个向量垂直，即 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 或 $\cos\varphi = 0$ 的充分必要条件是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \qquad (1.6)$$

采用正规直角坐标系，往往会给问题的讨论带来很大的方便，在这种坐标系中，它的三个基向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 是两两互相正交的，而且长度都是1。用内积表示，它们满足如下六个条件：

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0 \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

对于任意向量 $\mathbf{a}$，设它在这正交基之下的坐标为 (a_1, a_2, a_3)，即有

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$

将等式两端同与向量 $\mathbf{i}$ 作内积，得到

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}=a_1(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+a_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})+a_3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})=a_1,$$

类似地有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=a_2,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=a_3. \tag{1.8}$$

这说明可用内积将向量的坐标简单地表示出来；反之，也可以用向量的坐标表示内积：设还有

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k},$$

则由内积的性质及条件（1.7）得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})= \\ &=a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_1b_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+a_2b_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+ \\ &+a_3b_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned} \tag{1.9}$$

这说明两个向量的内积等于它们的对应坐标乘积之和。

因此，前面的关于向量的度量性质的几个公式就可以用坐标表示成

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \tag{1.10}$$

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}; \tag{1.11}$$

两个向量垂直的条件是

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{1.12}$$

1.4 对一些几何问题的讨论❶

有了以上三种运算，空间几何学的全部度量性质都可以由此建立起来。例如，我们可以讨论如下几方面的问题：

（1）余弦定理和勾股定理

命题 1.3 若有 $\mathbf{c}=\mathbf{a}\pm\mathbf{b}$，则有

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\pm 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

或

$$\|\mathbf{c}\|^2=\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2\pm 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}); \tag{1.13}$$

若还有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，则有

---

❶ 这段内容是后面某些章节的一些具体问题的几何背景，初读时可以略去。

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$

或

$$\|\mathbf{c}\|^2=\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2. \tag{1.14}$$

证明：由内积运算的性质，

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\pm\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\pm\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\pm 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

于是就有（1.13）及（1.14）。

条件 $\mathbf{c}=\mathbf{a}\pm\mathbf{b}$ 表明 a、b、c 构成一个三角形，（1.13）是刻划三边关系的余弦定理；条件 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 表明 a、b 是三角形中的两个直角边，（1.14）是直角三角形的勾股定理。

（2）平面向量的旋转

设在平面上取定了直角坐标系，基向量为 i、j，对于任意给定的向量 x，它可以表为

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}.$$

将 x 按反时针方向旋转 ψ 角，设所得的向量为 $T(\mathbf{x})=\mathbf{y}$，它可表为

$$\mathbf{y}=y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}。$$

我们来求 y 的坐标（y_1，y_2）和（x）x的坐标（x_1，x_2）之间的关系。

设 x 的长度为 $\|\mathbf{x}\|=r$，它和 i 的夹角为 φ，则有

$$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi。$$

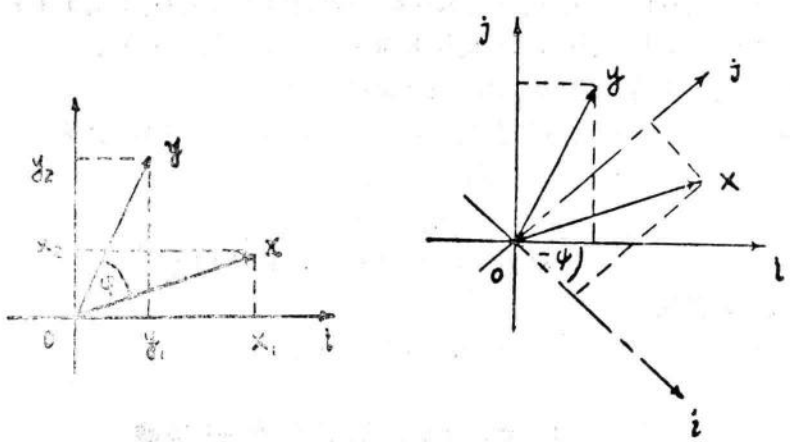

图 1.6

这时有 $\|\mathbf{y}\|=r$，y 与 i 的夹角为 $\varphi+\psi$。于是

$$y_1=r\cos(\varphi+\psi)=r\cos\varphi\cdot\cos\psi-r\sin\varphi\cdot\sin\psi=x_1\cos\psi-x_2\sin\psi,$$

$$y_2=r\sin(\varphi+\psi)=r\sin\varphi\cos\psi+r\cos\varphi\sin\psi=x_1\sin\psi+x_2\cos\psi. \tag{1.15}$$

公式（1.15）可以看作是一般的平面向量 x 旋转 ψ 角而成向量 $\mathbf{y}=T(\mathbf{x})$ 的变换公式。

特别地，当 $\mathbf{x}=\mathbf{i}=(1,0)$ 时，有 $T(\mathbf{i})=(\cos\psi,\ \sin\psi)$；当 $\mathbf{x}=\mathbf{j}=(0,1)$ 时，有 $T(\mathbf{j})=(-\sin\psi,\ \cos\psi)$。于是（1.15）可以表成向量之间的关系式

$$\mathbf{y}=T(\mathbf{x})=x_1T(\mathbf{i})+x_2T(\mathbf{j}). \tag{1.16}$$

若设向量 x 不动，而令坐标轴 i、j 都旋转 $-\psi$ 角，而得新的坐标向量

$$\mathbf{i}'=(\cos\psi,\ -\sin\psi),$$

$$\mathbf{j}'=(\sin\psi,\ \cos\psi).$$

(1.15) 可以写成

$$\begin{cases} y_1=\mathbf{i}'\cdot\mathbf{x}, \\ y_2=\mathbf{j}'\cdot\mathbf{x}. \end{cases} \tag{1.17}$$

这 (y_1, y_2) 既可看成是 $T(\mathbf{x})$ 在原坐标系中的坐标，又可看成是 $\mathbf{x}$ 在新坐标系中的坐标。因此 (1.15) 既可看成平面向量旋转 ψ 角的变换公式 (1.16)，又可看成坐标轴旋转 $-\psi$ 角的坐标变换公式 (1.17)。

(3) 向量的投影

设有向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，考虑将 $\mathbf{a}$ 分解成如下形式

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mathbf{h}, \tag{1.18}$$

其中的 $\mathbf{h}$ 满足条件

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{b}=0, \tag{1.19}$$

即 $\mathbf{h}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直。(1.18) 式是将向量 $\mathbf{a}$ 按 $\mathbf{b}$ 的方向和与它垂直的方向进行分解，$\mathbf{h}$ 是从 $\mathbf{a}$ 的终点向 $\mathbf{b}$ 所引的垂线，$\lambda\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影。

可以根据条件 (1.19) 求出分解式 (1.18) 中的 λ 和 $\mathbf{h}$：由 (1.18) 得 $\mathbf{h}=\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}$，代入 (1.19) 中得

$$(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0,\ 即\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\lambda\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=0,$$

$$\lambda=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}, \tag{1.20}$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

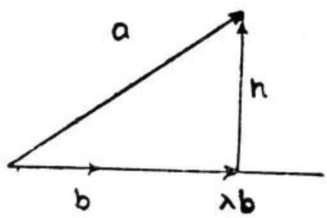

图 1.7

也可以不用垂直条件 (1.19)，而用 $\|\mathbf{h}\|^2$ 最小的原则求分解式 (1.18)，即求 $\mathbf{a}$ 的终点到 $\mathbf{b}$ 的最短距离：由 (1.18) 得

$$\|\mathbf{h}\|^2=\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}=(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})=\lambda^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-2\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}.$$

这 $\|\mathbf{h}\|^2$ 是 λ 的二次三项式，用微分法或初等方法都可以得知，当 λ 和 $\mathbf{h}$ 满足 (1.20) 式时，$\|\mathbf{h}\|^2$ 为最小。这就得到了

命题 1.3 向量 $\mathbf{a}$ 的终点到 $\mathbf{b}$ 的垂线 $\mathbf{h}$ 的长度是 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的最短距离。

(4) 空间的镜面反射变换

设在三维空间中有一个过原点的平面 π，它的方程可以写成

$$h_1x_1+h_2x_2+h_3x_3=0,$$

或

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=0,\ \mathbf{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3),$$

$$\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{1.21}$$

这说明平面 π 上的向量 $\mathbf{x}$（始点在坐标原点，终点在 π 上）都与向量 $\mathbf{n}$ 垂直，即 $\mathbf{n}$ 是平面 π 的法线方向。

对于空间中的任意向量 $\mathbf{a}$，我们来求它的关于平面 π 为对称的向量 $\mathbf{b}$，即 $\mathbf{a}$ 的关于 π 的镜面反射向量。如图 1.8，

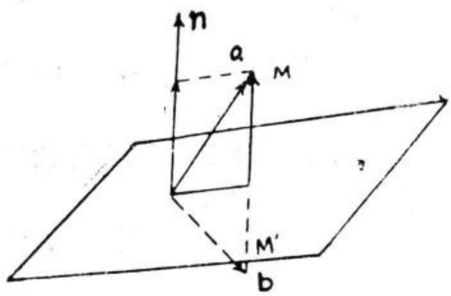

图 1.8

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}-M'M,$$

而 $\mathbf{M'M}$ 与 $\mathbf{n}$ 平行，它等于 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{n}$ 的投影的 2 倍。由（1.21）得

$$\mathbf{M'M}=2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n},$$

于是

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}-2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}。\tag{1.22}$$

如果 $\mathbf{n}_0$ 是单位长的法向量，即有 $\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}_0=1$，则（1.22）可以写成

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_0)\cdot\mathbf{n}_0.\tag{1.23}$$

有时知道了向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，需要求出平面 π，使得 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 向量关于平面 π 为对称，或 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 关于平面 π 互为镜面反射向量。为求出平面 π，只须求出它的法线方向，由图 1.8 可以看出，π 的法线向量可以取为

$$\mathbf{n}=\mathbf{M'M}=\mathbf{a}-\mathbf{b},\tag{1.24}$$

$$\mathbf{n}_0=\mathbf{M'M}/\|\mathbf{M'M}\|=(\mathbf{a}-\mathbf{b})/\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|.\tag{1.25}$$

代入（1.22）中就得到了从 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的镜面反射变换

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}-2\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}).\tag{1.26}$$

习　　题

1. 已知 $\mathbf{a}=(1,2,0)$，$\mathbf{b}=(2,3,-1)$，求向量 $\mathbf{c}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ 的坐标。

2. 设有向量 $\mathbf{a}=(2,-1)$，$\mathbf{b}=(-1,3)$，$\mathbf{c}=(4,3)$，求形如（1.1）的分解式系数 (x,y)。

3. 设有向量 $\mathbf{a}=(1,-2,2)$，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$，分别求与它们平行的单位长向量。

4. 对于任意角 φ，求证向量 $\mathbf{i}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$，$\mathbf{j}=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$ 可以构成平面上的直角坐标系。

5. 在由向量 $\mathbf{a}=(1,2,1)$ 和 $\mathbf{b}=(2,2,-1)$ 所决定的平面内，找一个和 $x-y$ 平面平行的单位长向量。

6. A 设有两点 $(1,3,2)$，$B(2,0,-1)$，求向量 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 的坐标。

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点的坐标 $A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(2,1,2)$，求三个角。

8. 设向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ 经过旋转变换（1.15）变成 $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$，求证 $\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|$。

9. 求证镜面反射变换不改变向量的长度，即（1.22）或（1.23）中的向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 长度相等：$\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|$。

10. 求一个镜面反射变换，它把向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 变成 $\mathbf{b}=(\|\mathbf{a}\|,0,0)$。

§2. n元数组所构成的向量

2.1 n维向量的概念

象前节那样，将几何中的向量和有序数组对应起来，为几何问题的研究提供了代数工具。但对我们来说更重要的是：这种对应给有序数组提供了直观的几何形象，而这有序数组可能来自与几何根本无关的问题。这种几何的思想不但有助于研究三个数组成的有序数组，而且可用于研究由许多数组成的有序数组。线性代数学就是按这种思想发展起来的。

在大量的实际问题中，往往需要用多个指标来刻划事物的特征。例如，为了刻划n个质点在直线上的位置，需要用n个坐标x_1，x_2，……，x_n；为了知道一块标本的地球化学成分，往往分析它若干种元素的含量；为了知道某种化学元素的分布状况，往往对许多块标本来进行分析……。

刻划某类事物特征的多个指标可以排成一个有序数组。由不超过三个数组成的有序数组，可对应于几何空间中的向量；由多个数组成的有序数组，在代数上与这种向量有许多相似之处，我们也把它叫做向量。

定义 2.1 设n是正整数，由n个数a_1，a_2,……,a_n组成的有序数组叫做n维向量，记为

$$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n).$$

a_1，…，a_n都叫做的$\mathbf{a}$的分量或坐标。所有n维向量的全体组成的集合叫做n维空间，记为R^n。

2.2 n维向量的运算

前节对几何空间中的向量所引进的三种运算，都可用代数方法推广到R^n空间中。

设$\mathbf{a}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1,\ \cdots,\ b_n)$是$R^n$中的任意两个向量，再设$\lambda$是任意实数。可以对它们施行如下三种运算：

（1）加减法

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)+(b_1,\ \cdots,\ b_n)=(a_1\pm b_1,\ \cdots,\ a_n\pm b_n);$$

（2）乘以数

$$\lambda\mathbf{a}=\lambda(a_1,\ \cdots,\ a_n)=(\lambda a_1,\ \cdots,\ \lambda a_n);$$

（3）内积

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+\cdots\cdots+a_nb_n.$$

几何空间中向量的运算和性质，虽然都有明显的几何背景，但从逻辑上讲，它们都可以不依赖于几何学中的概念和结论，只从坐标出发进行研究，当坐标的个数增加到n个时，并没有给代数上的讨论带来任何本质的困难，因此，几何空间中向量的三种运算的全部性质，完全适用于R^n空间。

例如，有了内积运算以后，我们同样可以定义 R^n 中向量的"长度"和"夹角"：

$$\|\mathbf{a}\|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\text{ ❶} \tag{2.1}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\|}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big/\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right). \tag{2.2}$$

为使定义式（2.2）有意义，必须有不等式

$$\left|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\|}\right|\leqslant 1,\text{ 即}$$

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\|. \tag{2.3}$$

而这个不等式（哥西——布涅科夫斯基不等式），对任意两个向量都成立，我们将在以后给出一般情形的证明。

特别地，当 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 时，有

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=0,$$

我们就说这两个 n 维向量垂直或正交；当 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}(\lambda\neq 0)$ 时，有

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\|}=\frac{(\lambda\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}}{\|\lambda\mathbf{b}\|\ \|\mathbf{b}\|}=\frac{\lambda(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})}{|\lambda|\ \|\mathbf{b}\|\ \|\mathbf{b}\|}=$$

$$=\frac{\lambda}{|\lambda|}=\begin{cases}1, & \text{当 }\lambda>0\\ -1, & \text{当 }\lambda<0,\end{cases}$$

于是向量 $\lambda\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角为

$$(\widehat{\lambda\mathbf{b},\ \mathbf{b}})=\begin{cases}0, & \text{当 }\lambda>0,\\ \pi, & \text{当 }\lambda<0.\end{cases}$$

根据上面的论述，不难验证 R^n 中的一组向量

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\\ \mathbf{e}_2&=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0),\\ \mathbf{e}_n&=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1).\end{aligned} \tag{2.4}$$

是两两互相正交的，而且长度都是 1，即有

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases} \tag{2.5}$$

R^n 中的任意向量 $\mathbf{a}$ 都可以表成

$$\mathbf{a}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)=a_1\mathbf{e}+\cdots+a_n\mathbf{e}_n,$$

这时我们说 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n$ 的线性组合。这些坐标也可以用内积表示出来

$$a_i=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i,\quad i=1,\ \cdots,\ n. \tag{2.6}$$

向量组（2.4）叫做 R^n 的一个**正规直交基**。

有时在 R^n 中只考虑前两种运算，这时称 R^n 为**线性空间**，仍记为 R^n；若同时考虑三种运算，在 R^n 中就引进了长度、角度等度量性概念，这时特别称 R^n 为**欧氏空间**，记为 E^n。

---

❶ 记号 $\sum_{i=1}^{n}$ 表示关于下标 i 从 1 到 n 求和，一般地有 $\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$，其中 A_i 是与 i 有关的任意表达式。

2.3 一些应用实例

我们按几何学的思想，对 n 个数组成的有序数组引进了上述三种运算，建立了一系列的几何学概念。实际上，当 $n>3$ 时这些运算和概念都不反映任何初等几何上的事物（因为初等几何空间最多是三维的）。但在各种各样的具体问题中，这些运算和概念却都有实际的背景。

例 2.1 设对某块标本分析了 n 种化学元素的含量值，得到的 n 个数据构成一个 n 维向量，它的第 i 个分量代表第 i 种元素的含量值（$i=1, 2, \cdots, n$）。若进行两次分析，就得到两个 n 维向量 $\mathbf{a}=(a_1, \cdots, a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1, \cdots, b_n)$，这两次分析的平均结果构成一个新的 n 维向量

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

例 2.2 设对某变量进行 n 次观测，得到观测值 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$。n 次观测的平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n).$$

将 n 维向量 $(\bar{x}, \cdots, \bar{x})$ 记为 $\mathbf{x}_0$，则 n 次观测的离差为

$$[(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2.$$

例 2.3 对 n 块标本分析了某两种元素的含量，得到两个 n 维向量 $\mathbf{c}_u=(c_1, \cdots, c_n)$，$\mathbf{p}_b=(p_1, \cdots, p_n)$。

为了根据这些数据刻划两种元素的差异，可计算各标本分析数据的偏差平方和。

$$d^2=\sum_{i=1}^{n}(c_i-p_i)^2=\|\mathbf{c}_u-\mathbf{p}_b\|^2,$$

它是向量 $\mathbf{c}_u-\mathbf{p}_b$ 的长度平方，也叫做向量 $\mathbf{c}_u$ 和 $\mathbf{p}_b$ 的矩离平方。

为了刻划两种元素的相关性，首先算出它们之间的平均值

$$\bar{c}=\frac{1}{n}(c_1+\cdots+c_n), \quad \bar{p}=\frac{1}{n}(p_1+\cdots+p_n).$$

令

$$\mathbf{c}_{u0}=(c_1-\bar{c}, \cdots, c_n-\bar{c}), \quad \mathbf{p}_{b0}=(p_1-\bar{p}, \cdots, p_n-\bar{p}).$$

这两个元素的相关系数就是向量 $\mathbf{c}_{u0}$ 和 $\mathbf{p}_{b0}$ 之间的夹角余弦

$$r=\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})(p_i-\bar{p})\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2\sum_{i=1}^{n}(p_i-p)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\cos(\widehat{\mathbf{c}_{u0},\mathbf{p}_{b0}}).$$

这个量值反映了 $\mathbf{c}_{u0}$ 和 $\mathbf{p}_{b0}$ 的各个分量成比例的情况。特别是若有数值 λ，使得 $\mathbf{c}_{u0}=\lambda\mathbf{p}_{b0}$，则当 $\lambda>0$ 时 $r=1$，说明这两个元素是正相关的；当 $\lambda<0$ 时，$r=-1$，说明这两个元素是反相关的。

这些实例说明，在 R^n 中用几何的思想引进了向量概念和运算以后，就使大量的与几何没有直接关系的研究对象，从数学角度和几何学联系起来了，这为它们提供了直观的几何形象和强有力的几何工具，从而把一些复杂问题大大简化了。

习　　题

1. 设有向量 $a=(2, 1, -1, 2)$, $b=(3, -1, -2, 1)$, $c=(1, 2, 1, -1)$，求这三个向量的长度，两两之间的夹角余弦，a、b 的端点连线的中点坐标。

2. 求 n 维向量 $x=(1, 1, \cdots, 1)$ 和 (2.4) 式中给出的各坐标向量的交角。

3. 求与向量 $x=(3, 2, 0, -1)$ 平行的长度为 1 的向量。

4. 参照 1.4 段，在 E^n 空间中讨论勾股定理，投影问题和镜面反射变换，并证前节习题 9，10。

§3 矩　　阵

3.1 矩阵的定义

在许多实际问题中，有些客观对象不能用一个有序数组（向量）来刻划，需要用多个向量或矩形数表来刻划。

例如，从某地区取出 n 块标本，对每块标本测得某 m 种氧化物的含量百分比（有时称为 m 个变量），于是可将数据列成下表

变量号 \ 标本号	1	2	……	n
1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}
⋮	…………			
m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

其中的 $a_{ij}(i=1, \cdots, m_n;\ J=1, 2, \cdots, n)$ 表示第 i 种氧化物在第 j 块标本中的含量百分比。

再如，在某测区中取 m 条测线，在每条测线上取 n 个测点，也可以将测得的数据（可以是某地层的标高数据，某地质体的地球化学指标，也可以是磁异常数据等）列成类似的数表，这时 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 代表第 i 条测线的第 j 个测点上的数据。

若不管数据的具体含意，可单把数据按原来位置写成下面的表格形式：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

定义 3.1 　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的矩形数表叫 $m\times n$ 阶**矩阵**（当 $m=n$ 时叫 n 阶方阵），记为 $A_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$，一般简记为 A。

构成矩阵的每个数 a_{ij} 都叫矩阵的一个元素。矩阵中的每个横排叫做行，每个纵排叫做列。a_{ij} 表示矩阵的第 i 行第 j 列的元素。

例如，下面有三个矩阵，

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&5&-4\\2&6&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-2&4\\1&3&7\end{bmatrix},\quad C=[2\ 6\ 0\ 8],$$

其中的 A 为 3 阶方阵，B 为 2×3 阶矩阵，C 为 1×4 阶矩阵。

两个矩阵 A 和 B，如果它们有相同的行数和列数，而且对应的元素都相等，就说 A 和 B 相等，并记成 $A=B$。

3.2 转置矩阵和对称矩阵

若 A 是 n 阶方阵，其中的行号和列号相同的元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 都叫做对角线元素。

把矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行、列互换而得的矩阵叫做 A 的转置矩阵，一般记作 A'（也可记作 A^T）。即若

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{m1}&a_{m2}\cdots a_{mn}\end{bmatrix},\quad 则\ A'=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}\cdots a_{m1}\\a_{12}&a_{22}\cdots a_{m2}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{1n}&a_{2n}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}.$$

例如，若

$$A=[1,\ -2,\ 3],\quad 则\ A'=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix};$$

若

$$B=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\\4&2\end{bmatrix},\quad 则\ B'=\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&1&2\end{bmatrix};$$

若

$$C=\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{bmatrix},\quad 则\ C'=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{bmatrix}。$$

若矩阵 A 具有性质

$$A=A',$$

就说它是对称矩阵。

这就是说，对称矩阵的行数和列数相等——它首先应该是一个方阵；其次，它的关于对角线为对称的元素相等。例如

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&5\\3&5&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&4&2&5\\3&2&0&-1\\1&5&-1&-2\end{bmatrix}.$$

都是对称矩阵．而