

直方大齋數學上編

數學上編卷八

番禺曹汝英粲三著

零分數

第六十二款 前習除法時其除不盡之數曾告學者以命分法紀之矣惟其時以學者除法尚未習熟不宜雜以他說紛擾其心故命分之義理當時從闕而今始論之也

祇以一條除不盡之數而言則命分之理并不深奧但閱三十之款便知之矣合幾條命分之數而觀之則此諸數其必再可以加減乘除也審矣其加減乘除之法雖不能與前論之加減乘除大異然亦不盡相同也故別名曰分數之加減乘除

欲明分數之加減乘除必須考察分數之性情始易明白今分條論之於後

凡算數必有起算之根欲立起算之根必先取一箇數以爲準則卽如衡法則取兩度法則取丈之類是也根數旣立則遇有數與一箇根數同者卽名之爲一與兩箇根數同者卽名之爲二與三箇根數同者卽名之爲三自三以上可以類推旣明乎此則可悟一二三四諸數必爲整箇根數之倍數故名之爲整數而所取之根卽可名之爲箇數也旣是一二三四諸數爲其爲整箇根之倍數故名之爲整數則未及一箇根數者當必不能與整數同類須別立名目以稱之也所立之名目維何卽零

分數是也

或省曰零數
或省曰分數

所論之數爲物數固之可有起算之根卽非爲物數而爲泛數
亦有起算之根其根維何卽一是也一旣爲泛數之箇數則泛
數亦當分爲整數分數兩種

無論泛數物數若有整數兼有零分數則所成之數名曰整帶
零

如將一箇數勻分五分而取其一則所取之數當稱爲五分之

一如取兩分則稱爲五分之二餘可類推書之則作 $\frac{二}{五}$ $\frac{二}{五}$

總之所分之分數則書於橫線下是名曰分母所取之分數則

書於橫線上是名曰分子

以三而論固可作爲一箇數勻分爲五而取其二以解之惟一
箇數勻分爲五而取其二與兩箇數勻分爲五而取其一無以
異也是則以三而言謂之爲一箇數之五分二可也謂之爲兩
箇數之五分一亦可也凡遇分子大於一者皆可有此兩種解
法

分子大於一既可兩種解法則可悟分子之數不必小於分
母者始合解卽大於分母者亦未嘗不合也卽如三則可作爲
七箇數勻分爲五而取其一以解之也

旣明上條則又可悟三卽與

五
七

相同也旣然相同則是分數也

者實未除之除法題耳

第六十三款 收零作整

由前款末條既知分數即除法則可悟分子如大於分母則可
以母除子而化之為整帶零也如此化法名曰收零作整

即如 $\frac{59}{8}$ 則可作為 $\frac{59}{8}$ 以書之又如 $\frac{79}{7}$ 則作 $\frac{79}{7}$ 餘可類推

第六十四款 通分

凡有整數皆可變之為分數如此變法名曰通分即如有數為

五則可變之為 $\frac{5}{1}$ 或為 $\frac{5}{2}$ 或為 $\frac{5}{3}$ 或為 $\frac{5}{4}$

上文第一式右邊之數卽是將箇數勻分一分而取其五之謂也惟箇數勻分爲一卽是得同一箇數復取其五卽是五箇數故五能與五相等也

第二式右邊之數卽是將十箇數勻分爲二而取其一之謂也惟十箇數勻分爲二而取其一卽是五箇數故能與左邊之數相等也

第三第四兩式所以能相等之故可照推之

由上第一式卽可悟凡有整數皆可加一爲母而使之變爲分數也又由二三各式可悟凡有整數皆可任取一數乘之以爲分子而將所取之數以爲分母也

又上文四式之子母皆倍於二式之子母而所值之數皆爲五則可悟凡有分數皆能任取一數以乘其子母而通之使大也如此通大之法亦名曰通分

第六十五款 通分納子

凡有整帶零之數皆可變之爲分數如此變法名曰通分納子

卽如有數爲 $\frac{7}{5}$ 此卽整帶零之數也惟其整數五若照前款之

法通之可變爲

$\frac{14}{10}$

再加原有之零分則爲

$\frac{14}{10}$

惟此式之意卽是

將箇數勻分爲八先取其四十繼取其七也然則合兩次所取

者則為四十七分

$\frac{47}{8}$

由此式可見凡有整帶零之數如欲

矣故即為 $\frac{7}{8}$ 也若

$\frac{7}{8}$

變之為分數則應以零分之母乘整

以式列之則得

$\frac{5}{8}$

數再加零分子其加得之數即為

新分子而以原有之母為母也

先以母乘整故曰通分次加原有之子故曰納子

第四十五次習問

下列各整數試化之為分數而以七為分母

(一) 八

(二) 一

(三) 七

(四) 二

(五) 三

(六) 四

下列各分數試化之為整帶零

或化之為整數

(七) $\frac{7}{8}$

(八) $\frac{3}{8}$

(九) $\frac{3}{8}$

(一〇) $\frac{3}{8}$

(一一) $\frac{3}{8}$

(一二) $\frac{3}{8}$

(一三) $\frac{3}{8}$

下列各數試化之為分數

$$\frac{(-4)}{2} = \frac{(-3)}{2}$$

$$\frac{(-5)}{3} = \frac{(-4)}{2}$$

$$\frac{(-6)}{4} = \frac{(-5)}{3}$$

$$\frac{(-7)}{3} = \frac{(-6)}{4}$$

$$\frac{(-8)}{2} = \frac{(-5)}{3}$$

$$\frac{(-9)}{3} = \frac{(-6)}{4}$$

$$\frac{(-10)}{5} = \frac{(-4)}{2}$$

第六十六款 約分

若將六十四款二四兩式細察之見二式之子母皆半於四式之子母而所值皆是五則可悟凡有分數任取一數以除子母其值仍未變也如此除法是名曰約分

分數之子母愈小愈簡故所用以除子母之數必須為子母之最大公約數始得變出之子母為最簡也設題明之

設如有數為 $\frac{19}{24}$ 試將其子母約為最小之數

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$
 $\frac{1}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$
 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$
 $\frac{1}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$
 $\frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$
 $\frac{1}{11} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{132}$
 $\frac{1}{12} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{156}$
 $\frac{1}{13} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{182}$
 $\frac{1}{14} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{210}$
 $\frac{1}{15} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{240}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{272}$
 $\frac{1}{17} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{306}$
 $\frac{1}{18} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{342}$
 $\frac{1}{19} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{380}$
 $\frac{1}{20} \times \frac{1}{21} = \frac{1}{420}$
 $\frac{1}{21} \times \frac{1}{22} = \frac{1}{462}$
 $\frac{1}{22} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{506}$
 $\frac{1}{23} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{552}$
 $\frac{1}{24} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{600}$
 $\frac{1}{25} \times \frac{1}{26} = \frac{1}{650}$
 $\frac{1}{26} \times \frac{1}{27} = \frac{1}{702}$
 $\frac{1}{27} \times \frac{1}{28} = \frac{1}{756}$
 $\frac{1}{28} \times \frac{1}{29} = \frac{1}{812}$
 $\frac{1}{29} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{870}$
 $\frac{1}{30} \times \frac{1}{31} = \frac{1}{930}$
 $\frac{1}{31} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{992}$
 $\frac{1}{32} \times \frac{1}{33} = \frac{1}{1056}$
 $\frac{1}{33} \times \frac{1}{34} = \frac{1}{1122}$
 $\frac{1}{34} \times \frac{1}{35} = \frac{1}{1190}$
 $\frac{1}{35} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{1260}$
 $\frac{1}{36} \times \frac{1}{37} = \frac{1}{1332}$
 $\frac{1}{37} \times \frac{1}{38} = \frac{1}{1406}$
 $\frac{1}{38} \times \frac{1}{39} = \frac{1}{1482}$
 $\frac{1}{39} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{1560}$
 $\frac{1}{40} \times \frac{1}{41} = \frac{1}{1640}$
 $\frac{1}{41} \times \frac{1}{42} = \frac{1}{1722}$
 $\frac{1}{42} \times \frac{1}{43} = \frac{1}{1806}$
 $\frac{1}{43} \times \frac{1}{44} = \frac{1}{1892}$
 $\frac{1}{44} \times \frac{1}{45} = \frac{1}{1980}$
 $\frac{1}{45} \times \frac{1}{46} = \frac{1}{2070}$
 $\frac{1}{46} \times \frac{1}{47} = \frac{1}{2162}$
 $\frac{1}{47} \times \frac{1}{48} = \frac{1}{2256}$
 $\frac{1}{48} \times \frac{1}{49} = \frac{1}{2352}$
 $\frac{1}{49} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{2450}$
 $\frac{1}{50} \times \frac{1}{51} = \frac{1}{2550}$
 $\frac{1}{51} \times \frac{1}{52} = \frac{1}{2652}$
 $\frac{1}{52} \times \frac{1}{53} = \frac{1}{2756}$
 $\frac{1}{53} \times \frac{1}{54} = \frac{1}{2862}$
 $\frac{1}{54} \times \frac{1}{55} = \frac{1}{2970}$
 $\frac{1}{55} \times \frac{1}{56} = \frac{1}{3080}$
 $\frac{1}{56} \times \frac{1}{57} = \frac{1}{3192}$
 $\frac{1}{57} \times \frac{1}{58} = \frac{1}{3306}$
 $\frac{1}{58} \times \frac{1}{59} = \frac{1}{3422}$
 $\frac{1}{59} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{3540}$
 $\frac{1}{60} \times \frac{1}{61} = \frac{1}{3660}$
 $\frac{1}{61} \times \frac{1}{62} = \frac{1}{3782}$
 $\frac{1}{62} \times \frac{1}{63} = \frac{1}{3906}$
 $\frac{1}{63} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{4032}$
 $\frac{1}{64} \times \frac{1}{65} = \frac{1}{4160}$
 $\frac{1}{65} \times \frac{1}{66} = \frac{1}{4290}$
 $\frac{1}{66} \times \frac{1}{67} = \frac{1}{4422}$
 $\frac{1}{67} \times \frac{1}{68} = \frac{1}{4556}$
 $\frac{1}{68} \times \frac{1}{69} = \frac{1}{4692}$
 $\frac{1}{69} \times \frac{1}{70} = \frac{1}{4830}$
 $\frac{1}{70} \times \frac{1}{71} = \frac{1}{4970}$
 $\frac{1}{71} \times \frac{1}{72} = \frac{1}{5112}$
 $\frac{1}{72} \times \frac{1}{73} = \frac{1}{5256}$
 $\frac{1}{73} \times \frac{1}{74} = \frac{1}{5402}$
 $\frac{1}{74} \times \frac{1}{75} = \frac{1}{5550}$
 $\frac{1}{75} \times \frac{1}{76} = \frac{1}{5699}$
 $\frac{1}{76} \times \frac{1}{77} = \frac{1}{5850}$
 $\frac{1}{77} \times \frac{1}{78} = \frac{1}{6002}$
 $\frac{1}{78} \times \frac{1}{79} = \frac{1}{6156}$
 $\frac{1}{79} \times \frac{1}{80} = \frac{1}{6312}$
 $\frac{1}{80} \times \frac{1}{81} = \frac{1}{6470}$
 $\frac{1}{81} \times \frac{1}{82} = \frac{1}{6630}$
 $\frac{1}{82} \times \frac{1}{83} = \frac{1}{6792}$
 $\frac{1}{83} \times \frac{1}{84} = \frac{1}{6956}$
 $\frac{1}{84} \times \frac{1}{85} = \frac{1}{7122}$
 $\frac{1}{85} \times \frac{1}{86} = \frac{1}{7290}$
 $\frac{1}{86} \times \frac{1}{87} = \frac{1}{7460}$
 $\frac{1}{87} \times \frac{1}{88} = \frac{1}{7632}$
 $\frac{1}{88} \times \frac{1}{89} = \frac{1}{7806}$
 $\frac{1}{89} \times \frac{1}{90} = \frac{1}{7982}$
 $\frac{1}{90} \times \frac{1}{91} = \frac{1}{8160}$
 $\frac{1}{91} \times \frac{1}{92} = \frac{1}{8340}$
 $\frac{1}{92} \times \frac{1}{93} = \frac{1}{8522}$
 $\frac{1}{93} \times \frac{1}{94} = \frac{1}{8706}$
 $\frac{1}{94} \times \frac{1}{95} = \frac{1}{8892}$
 $\frac{1}{95} \times \frac{1}{96} = \frac{1}{9080}$
 $\frac{1}{96} \times \frac{1}{97} = \frac{1}{9270}$
 $\frac{1}{97} \times \frac{1}{98} = \frac{1}{9462}$
 $\frac{1}{98} \times \frac{1}{99} = \frac{1}{9656}$
 $\frac{1}{99} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{9852}$

故

六九一
三四二九

子母疊次去其同用之生數以求之更覺簡便者如下題是也

設如有數為

$$\frac{二}{一五〇四八} \frac{五}{一四六五二}$$

試將其子母約至最小之數

$$\frac{三}{三六六三} \frac{六}{三七六二} \frac{七}{四〇七八} \frac{八}{三三八}$$

先將原數列左爰視子母之末二位皆可以四除之而盡則以四除子母得右邊之數又視右邊子母各位相加以九除之可盡則以九除子母得第二層又視第二層之子母皆

可以十一除之而盡卽以十一除子母得第三層第三層不能

再約卽為所求之數如此算法較捷於先求最大公約數者

如或棄去一兩箇生數之後而所得之數不易察出其下一次之生數則可用最大公約數法以接求之如下題是也

設如有數爲

$$\frac{10998}{32058}$$

試將其子母約至最小數

$$\frac{10998}{32058} = \frac{5499}{16029}$$

$$= \frac{1833}{5343}$$

$$\frac{611}{17812}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{611}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{559}{559}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

故

$$\frac{10998}{32058}$$

$$\frac{10998}{32058}$$

如或接用最大公約法而得公約爲一則前次所謂不易察出生數之數卽爲所求也

第四十六次習問

下列各數試將其子母約至最小之數

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{30}{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{59}{34} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{48}{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{86}{30} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{33}{42} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{50}{78} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{15}{22} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{25}{47} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{45}{31} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{95}{22} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{96}{27} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{72}{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{90}{19} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{70}{44} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{95}{31} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{15}{26} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{0}{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{92}{34} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{85}{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{64}{30} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{0}{42} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{90}{78} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{89}{22} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-) \\ \hline \frac{52}{47} \end{array}$$

第六十七款 齊分

若有幾箇不同母之分數而欲知其孰大孰小則非將其母變爲同數不可蓋母數相同則視其子數即可知孰爲大孰爲小也如此變法是名曰齊分設題明之

設如有數爲 $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ 問此三數中孰爲大孰爲小試按其大小之次序順列之

如此類之題其原有之母數各不相同無從懸定其孰大孰小也故必須變其母爲同數惟欲變其母爲同數則須將各母求最小公倍數以爲公母其式如下

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{16}{105}$$

既得最小公
倍數則以各
原母除之

$$\frac{8}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{16}{105} \div \frac{4}{5} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{4}{21} \div \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$$

除得之數為九六四然則
原有之第一數當以九通
之第二數當以六通之第
三數當以四通之始得各
母皆為七十二也

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{315}{480}$$

$$\frac{35}{48} \div \frac{5}{6} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{315}{480} \div \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$$

$$\frac{21}{40} \div \frac{9}{10} = \frac{7}{12}$$

既得三數之母皆為七十二則其孰大
孰小可看子數而定之故其大小之次

序當為

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$$

如或原有各母不能有同生數則可將各母連乘以為公母而

將各原數之分子乘其餘之母以作本數之新分子如此乘法是名曰互乘齊母如下題是也

設如有 $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{9}$ 試將其母齊之

此題之母不能有相同之生數則以之連乘得

既得公母本應將原有各母

除之以求通大之倍數惟因

原有之三母彼此無相同之

生數故可將餘兩母相乘以

為任一數之倍數而得式為

$$7 \times 9 \times 5 = 315$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 9 \times 5}{7 \times 9 \times 5} = \frac{135}{315}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 7 \times 5}{9 \times 7 \times 5} = \frac{175}{315}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7 \times 7}{5 \times 7 \times 7} = \frac{196}{245}$$

第四十七次習問