

目 录

(第四册)

- 关于非线性常微分方程组的非线性边值问题
.....复旦大学江福汝
- 一类非线性系统的研究.....哈工大谈骏渝
- 星域上的变分不等式.....中科院数学物理所郭友中
- 三阶非线性微分方程边值问题的奇异摄动
.....吉林大学赵为礼
- 两阶拟线性双曲型方程的奇异摄动
.....复旦大学高汝熹
- 一类偏微分方程的摄动解法.....安徽大学刘坛荣
- ✓ 论多尺度扰动方程中长期项的消除
.....云南大学谢应齐先泽进尹东屏
- 一类非线性振动方程的渐近分析.....安徽大学刘曾荣
- ✓ 利用拉格朗日函数进行平均的扰动方法研究
.....云南大学谢应齐谭本德
- 二阶方程指数形式渐近解及其应用
.....安徽大学刘曾荣华东师大徐钧涛
- 关于 N. T. Markov 之《关于 Poincaré 的周期解理论》一文的注
记.....吉林大学刘兴权
- ✓ 论动力稳定性和长期稳定性.....中科院力学所徐硕昌
- 论刚体的迴转稳定准则及其应用
.....中科院力学所徐硕昌
- 非线性弹性体振动联立共振的解法
.....天津大学邱家俊

耦合振动的变分解法.....中科院力学所缪经良

物料在共振筛上的运动及对系统振动的影响.....太原工学院王继宗

单频激励下无阻尼 *Duffing* 方程次谐共振的解析分析、模拟机分析和数值分析.....航天工业部 201 研究所丁一飞

船模强迫横摇振幅跳跃及其稳定性

.....中山大学陈启强

非线性系统动态响应的数值计算方法

.....清华大学郑兆昌谭明一

具有内部约束的弹性杆的屈曲

.....兰州大学程昌钧朱正佑

关于非线性常微分方程组的非线性边值问题 (摘要)

江福汝 (复旦大学, 数学系)

在力学和控制论问题中, 常遇到一类常微分方程组的边值问题, 它们一直是数学家和应用数学家所关心的问题。例如Тихонов, Wasow, Erdélyi, Васильева, O'Malley等都曾在这方面作了很多重要的工作。本文继O'Malley[1]之后, 研究更广泛一类的非线性常微分方程组的边值问题, 在较弱的条件下推广了前人的结果。

考察下面的非线性常微分方程组的非线性边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (0 < x < 1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon) \quad (1)$$

$$A(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (2)$$

$$B(x(1, \varepsilon), y(1, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (3)$$

其中 f, g, A, B 是各变元的无限次可微函数。作假设:

(H₁) 所对应的退化边值问题:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, 0) \quad (4)$$

$$0 = g(t, x, y, 0)$$

$$B(x(1, 0), y(1, 0), 0) = 0 \quad (5)$$

在 $0 \leq t \leq 1$ 存在解 $x_0(t), y_0(t)$ 使成立

$$g_y(t, x_0(t), y_0(t), 0) \leq -K_1 \quad (6)$$

$$B_x(x_0(1), y_0(1), 0) - \frac{g_x(1, x_0(1), y_0(1), 0)}{g_y(1, x_0(1), y_0(1), 0)} B_y(x_0(1), y_0(1), 0) \neq 0 \quad (7)$$

其中 K_1 是某正的常数。

(H₂) 方程

$$A(x_0(0), y_0(0) + \lambda, 0) = 0 \quad (8)$$

存在解入使

$$A_y(x_0(0), y_0(0) + \lambda, 0) \neq 0 \quad (9)$$

(H₃) 存在正的常数 K_2, K , 使

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g_y(0, x_0(0), y_0(0) + r, 0) dr \leq -K_2 \quad (10)$$

$$|f_y(0, x_0(0), y_0(0) + \tau, 0)| \geq K, \quad (11)$$

对于所有介于 0 和 λ 间的 τ 值都成立。

根据函数 $f_y(t, x_0(t), y_0(t) + r, 0), g_y(t, x_0(t), y_0(t) + r, 0)$ 在 $t=0$ 的连续性知道在 $t=0$ 的 δ 邻域成立所有介于 0 和 λ 间的 λ 成立

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g_y(t, x_0(t), y_0(t) + r, 0) dr \leq -\frac{1}{2} K_2 \quad (12)$$

$$|f_y(t, x_0(t), y_0(t) + \tau, 0)| \geq \frac{1}{2} K, \quad (13)$$

$$0 \leq t \leq \delta < 1.$$

在 $t=0$ 的 δ 邻域引进快变量为：

$$\xi = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \eta = t \quad (14)$$

根据求导的链法则有

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

在 $t=0$ 的 δ 邻域方程(1)化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{-1} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \eta} &= f(t, x, y, \varepsilon) \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial \eta} &= g(t, x, y, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

假设边值问题(1)——(3)的解具有展开式

$$x(t, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t), & t=0 \text{ 的外部区域} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\eta) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\eta, \varepsilon), & t=0 \text{ 的 } \delta \text{ 邻域} \end{cases} \quad (16)$$

(17)

$$y(t, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t), & t=0 \text{ 的外部区域} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(\eta, \varepsilon), & t=0 \text{ 的 } \delta \text{ 邻域} \end{cases} \quad (18)$$

(19)

其中 $v_n, w_n, (n=0, 1, \dots)$ 是边界层型函数, 即当 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 时指数型地衰减于零。将此展开代入边值问题(1)——(3), 或 (15), (3), 比较 ε 的同次幂的系数, 在外部区域得到关于 $x_n, (n=0, 1, \dots)$ 的递推边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= f(t, x_0, y_0, 0) \\ 0 &= g(t, x_0, y_0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$B(x_0(1), y_0(1), 0) = 0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= f_x(t, x_0, y_0, 0)x_n + f_y(t, x_0, y_0, 0)y_n \\ &\quad + \bar{f}^{(n)}(t, x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}) \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} &= g_x(t, x_0, y_0, 0)x_n + g_y(t, x_0, y_0, 0)y_n \\ &\quad + \bar{g}^{(n)}(t, x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &B_x(x_0(1), y_0(1), 0)x_n(1) + B_y(x_0(1), y_0(1), 0)y_n(1) \\ &\quad + \bar{B}^{(n)}(x_0(1), \dots, x_{n-1}(1), y_0(1), \dots, y_{n-1}(1)) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$(n \geq 1)$$

在 $t=0$ 的 δ 邻域得到关于 $v_n, w_n, (n=0, 1, \dots)$ 的递推边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} &= f(\eta, x_0, y_0 + w_0, 0) - f(\eta, x_0, y_0, 0) \\ \frac{\partial w_0}{\partial \xi} &= g(\eta, x_0, y_0 + w_0, 0) - g(\eta, x_0, y_0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$A(x_0(0), y_0(0) + w_0(0, 0), 0) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial \xi} &= f_y(\eta, x_0, y_0 + w_0, 0)w_n + f_x(\eta, x_0, y_0 \\ &\quad + w_0, 0)v_{n-1} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \eta} + [f_x(\eta, x_0, y_0 \\ &\quad + w_0, 0) - f_x(\eta, x_0, y_0, 0)]x_n + [f_y(\eta, x_0, y_0 \\ &\quad + w_0, 0) - f_y(\eta, x_0, y_0, 0)]y_n + (\bar{f}^{(n)} - \bar{f}^{(n)}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n}{\partial \xi} &= g_y(\eta, x_0, y_0 + W_0, 0)W_n + g_x(\eta, x_0, y_0 \\
&+ W_0, 0)V_{n-1} - \frac{\partial W_{n-1}}{\partial \eta} + [g_x(\eta, x_0, y_0 \\
&+ W_0, 0) - g_x(\eta, x_0, y_0, 0)]x_n + [g_y(\eta, x_0, y_0 \\
&+ W_0, 0) - g_y(\eta, x_0, y_0, 0)]y_n + (\bar{g}^{(n)} - \bar{g}^{(n)})
\end{aligned}
\quad (26)$$

$$\begin{aligned}
&A_y(x_0(0), y_0(0) + W_0(0, 0), 0)W_n(0, 0) \\
&= -[A_y(x_0(0), y_0(0) + W_0(0, 0), 0)y_n \\
&+ A_x(x_0(0), y_0(0) + W_0(0, 0), 0)(x_n(0) \\
&+ V_{n-1}(0, 0)) + \bar{A}^{(n)}],
\end{aligned}
\quad (27)$$

(n ≥ 1)

从边值问题 (24) - (25) 求得边界层型的解 (由隐函数式给出)

$$\xi = \int_{W_0(\eta, \xi)}^{\lambda} \frac{i}{\int_0^t -g_y(\eta, x_0(\eta), y_0(\eta) + r, 0)dr} dt
\quad (28)$$

$$\begin{aligned}
V_0(\eta, \xi) &= - \int_{\xi}^{\infty} \int_0^{W_0(\eta, s)} f_y(\eta, x_0(\eta), y_0(\eta) \\
&+ r, 0) dr ds
\end{aligned}
\quad (29)$$

当 $\xi \rightarrow \infty$ 时是 $O(e^{-k_2 \xi/2})$.

将 V_0, W_0 代入 (26) (27), 得到关于 V_1, W_1 的边值问题

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial \xi} - f_y(\eta, x_0, y_0 + W_0, 0)W_1 \\
&= P_1(\eta, x_0, V_0, y_0, W_0) \\
\frac{\partial W_1}{\partial \xi} - g_y(\eta, x_0, y_0 + W_0, 0)W_1
\end{aligned} \right\}
\quad (30)$$

$$\begin{aligned}
&= Q_1(\eta, x_0, v_0, y_0, w_0) \\
&A_y(x_0(0), y_0(0) + w_0(0, 0), 0)w_1(0, 0) \\
&= R_1(x_0(0), v_0(0, 0), y_0(0), w_0(0, 0)) \quad (31)
\end{aligned}$$

因 P_1, Q_1 都是 $O(e^{-K_2 \varepsilon/2})$, 所以 v_1 和 w_1 是 $O(e^{-m\varepsilon})$, 其中 $m = \min(\frac{K_2}{2}, K_1)$. 类似地可以证明 $w_n(\eta, \varepsilon) \pm v_n(\eta, \varepsilon) = O(e^{-m\varepsilon})$, $(n=2, 3, \dots)$ 所以有

定理 1 在假设 $(H_1)-(H_3)$ 下, 边值问题(1)——(3)的解的 N 阶形式渐近 (按 van der Corput 意义) 近似式是

$$\begin{aligned}
X_N &= \sum_{n=0}^N \varepsilon^n x_n(t) + \varepsilon \phi(t) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_n(t, \frac{t}{\varepsilon}) \\
Y_N &= \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(t) + \phi(t) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n w_n(t, \frac{t}{\varepsilon}) \quad (32)
\end{aligned}$$

其中 $\phi(t)$ 是无限次连续可微的截断函数: $\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq t \leq \delta/3 \\ 0, & \text{当 } 2\delta/3 \leq t \leq \delta \end{cases}$

注. 若假设 (H_2) 不成立, 边值问题(1)——(3)当 ε 充分小时可能无解[2], 定理 1 不再成立. 但对于某一类特殊形式的拟线性方程组的边值问题

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, \varepsilon) + f_2(t, x, \varepsilon)y \equiv f(t, x, y, \varepsilon) \\
\frac{dy}{dt} &= g_1(t, x, \varepsilon) + g_2(t, x, \varepsilon)y \equiv g(t, x, y, \varepsilon)
\end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$A(x(0, \varepsilon), \varepsilon y(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (34)$$

$$B(x(1, \varepsilon), y(1, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (35)$$

将定理 1 中的假设 (H_2) 代替以

(H₂,) 方程

$$A(x_0(0)+\lambda, \int_0^\lambda \frac{g_2(0, x_0(0)+r, 0)}{f_2(0, x_0(0)+r, 0)} dr, 0) = 0$$

存在解 λ 使

$$A_x(x_0(0)+\lambda, \int_0^\lambda \frac{g_2}{f_2} dr, 0) + A_{y\varepsilon}(x_0(0) + \lambda, \int_0^\lambda \frac{g_2}{f_2} dr, 0) \frac{g_2}{f_2} \neq 0 \quad (A_{y\varepsilon} = \frac{\partial A}{\partial(\varepsilon y)})$$

则类似地可以推知

定理 2、在假设 (H₁), (H₂,), (H₃,) 下, 边值问题 (33) (35) 的解的 N 阶渐近近似式是

$$X_N = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n x_n(t) + \phi(t) \sum_{n=0}^{N+1} \varepsilon^n V_n(t, \frac{t}{\varepsilon})$$

$$Y_N = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(t) + \phi(t) \sum_{n=0}^{N+1} \varepsilon^{n-1} W_n(t, \frac{t}{\varepsilon})$$

其中 $\phi(t)$ 是定理 1 中所定义的截断函数。

记

$$R_N(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - X_N$$

$$S_N(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) - Y_N$$

为边值问题的解与 N 阶形式渐近近似式的余项, 可以和文献 [3] 一样地, 通过构造线性化微分算子, 利用压缩映象原理证明。

$$R_N(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad S_N(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}).$$

因此有

定理 3、在假设 (H₁,)-(H₃,) 下, 边值问题 (1) — (3) 当 ε 充分小时, 存在解 $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \in C^{(1)}$, 和具有渐近展开式

$$\left. \begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= X_N + R_N(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) &= Y_N + S_N(t, \varepsilon) \end{aligned} \right\}$$

其中 X_N, Y_N 是由 (32) 式所定义的 N 阶形式渐近近似式, 和 $R_N = O(\varepsilon^{N+1}), S_N = O(\varepsilon^{N+1})$, 是任意正整数。

参 考 文 献

- [1] O'Malley, R.E., Jr., J. Differential Equations, 8, (1970) 431-447.
- [2] O'Malley, R.E., Jr., 《Introduction to Singular Perturbations》, Acad Press, New York, (1974).
- [3] 江福汝, 应用数学和力学, 3, 2(1982), 145-165.

一类非线性系统的研究

谈 骏 渝

提 要

本文应用参数变易法和逐次逼近法对线性项系数为常数的 n 阶非线性系统进行了研究和讨论, 应用本文的方法可以求得近似的解析解或进行数值求解。

一、引 言

对于非线性系统的研究, 问题常归结为对非线性微分方程的讨论。我们知道, 解非线性微分方程, 仅对一些特殊情形能够求得解析解外, 大多是采用近似方法求解 (有关知识和解法可参阅文献〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔4〕, 〔1〕〔2〕中指出了不少文献, 〔4〕中给出了不少非线性微分方程的题解)。此外, 一些文献又提出和推广了所谓平均法〔2, 5〕和特种球多项式近似法〔6, 7〕等方法。这些方法大都是对二阶或三阶非线性系统进行讨论的。平均法对非线性系统视被积函数中的参数为常数; 特种球多项式法实际上是将方程线性化且对系统的瞬变响应的速度和加速度在形式上加以限制, 而且这两种方法在理论上对近似解的收敛性等均缺乏分析和论证。本文应用参数变易法和逐次逼近法对线性项系数为常数的 n 阶非线性系统进行了研究且可以求得非线性系统的近似解或数值解, 对解的存在唯一与收敛性在理论上也作了简要说明和分析, 其次, 还具体对二阶非线性系统进行了讨论。

二、方法及公式

考虑一个 n 阶非线性系统, 它可用下列运动方程来描述

$$\begin{aligned} X^{(n)} + P_1 X^{(n-1)} + P_2 X^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1} X + \mu F(t, x, x', \cdots), \\ X^{(n-1)} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 X —广义位移, P_i ($i=1, 2, 3, \cdots, n$)—广义恢复力, 皆为常数, F —非线性函数, μ —非线性特征参数。

方程 (1) 的生成解为

$$X = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \cdots + c_n e^{k_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i t}, \quad \text{当 } \mu = 0 \text{ 时}, \quad (2)$$

上式又可写成矩阵形式

$$\mathbf{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \mathbf{c}, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{X} = (X)$, $(\alpha_i) = e^{k_i t}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), k_i 为生成方程的特征根且假定 k_i 是相异的, c_i, k_i 可为实数或共轭复数。

为了求解方程 (1), 假定积分常数 c_i 是时间 t 的函数, 应用参数变易法, 则有

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) \alpha_i = c'_1 \alpha_1 + c'_2 \alpha_2 + \dots + c'_n \alpha_n = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) \alpha_i' = k_1 c'_1 \alpha_1 + k_2 c'_2 \alpha_2 + \dots + k_n c'_n \alpha_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots (4)$$

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) \alpha_i^{(n-1)} = k_1^{(n-1)} c'_1 \alpha_1 + k_2^{(n-1)} c'_2 \alpha_2 + \dots + k_n^{(n-1)} c'_n \alpha_n = -\mu F.$$

若将 c'_i 看成未知数, 则式 (4) 是一个线性代数方程组。方程 (4) 又可写成

$$\mathbf{A} \mathbf{C}' = \mathbf{F} \quad \text{或} \quad \mathbf{A} \mathbf{C}' - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ k_1 \alpha_1 & k_2 \alpha_2 & \dots & k_n \alpha_n \\ k_1^2 \alpha_1 & k_2^2 \alpha_2 & \dots & k_n^2 \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{(n-1)} \alpha_1 & k_2^{(n-1)} \alpha_2 & \dots & k_n^{(n-1)} \alpha_n \end{pmatrix} \quad (n \cdot n \text{ 阶}) \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\mu F \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dt} \\ \frac{dc_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dc_n}{dt} \end{pmatrix},$$

且 $\mathbf{A}$ 是非奇异的, 即 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 。

解方程 (5), 可以求得

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{L}, \quad (1 \cdot n \text{ 阶})$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}, \quad (7)$$

其中矩阵函数 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t, \mathbf{C})$, 且

$$|\mathbf{A}| = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{(n-1)} & k_2^{(n-1)} & \cdots & k_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n |\mathbf{K}|,$$

又 $\text{adj} \mathbf{A} = (A_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$, A_{ij} 为 $\mathbf{A}$ 中各元 a_{ij} 的代数余因式之值且不含 α_j , 式 (7) 又可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= \frac{\text{adj} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \mathbf{F} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{A_{n1}}{|\mathbf{A}|} \mu F \\ -\frac{A_{n2}}{|\mathbf{A}|} \mu F \\ \vdots \\ -\frac{A_{nn}}{|\mathbf{A}|} \mu F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu K_{n1}}{\alpha_1 |\mathbf{K}|} F \\ -\frac{\mu K_{n2}}{\alpha_2 |\mathbf{K}|} F \\ \vdots \\ -\frac{\mu K_{nn}}{\alpha_n |\mathbf{K}|} F \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

即有

$$\frac{dc_i}{dt} = -\frac{\mu K_{ni}}{\alpha_i |\mathbf{K}|} F, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

其中 K_{ni} 为 $\mathbf{K}$ 中第 n 行中各元 $K_i^{(n-1)}$ 的代数余因式之值。

注意到式 (4), 此时 $\mathbf{X}$ 的一至 $n-1$ 阶导数也即 $\mathbf{F}$ 或 $\mathbf{L}$ 中不含 $\mathbf{C}$ 的导数, 且有

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} \mathbf{C} = (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n),$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{a}' \mathbf{C} = (k_1 \alpha_1 c_1 + k_2 \alpha_2 c_2 + \cdots + k_n \alpha_n c_n),$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$\mathbf{X}^{(n-1)} = \mathbf{a}^{(n-1)} \mathbf{C} = [K_1^{(n-1)} \alpha_1 c_1 + K_2^{(n-1)} \alpha_2 c_2 + \cdots + K_n^{(n-1)} \alpha_n c_n], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(n)} &= \mathbf{a}^{(n)} \mathbf{C} + \mathbf{a}^{(n-1)} \mathbf{C}' = \left[K_1^{(n)} \alpha_1 c_1 + K_2^{(n)} \alpha_2 c_2 + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + K_1^{(n)} \alpha_n c_n + K_1^{(n-1)} \alpha_1 c'_1 + K_2^{(n-1)} \alpha_2 c'_2 + \cdots + K_n^{(n-1)} \alpha_n c'_n \right], \end{aligned}$$

以及

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{X}', \dots, \mathbf{X}^{(n-1)}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{a} \mathbf{C}, \mathbf{a}' \mathbf{C}, \dots, \mathbf{a}^{(n-1)} \mathbf{C}), \quad (12)$$

因此方程 (7) 或 (9) 是关于 $\mathbf{C}$ 的一阶微分方程, 且方程 (7) 等价于积分方程

$$\mathbf{c} = \int_{t_0}^t \mathbf{L}(t, \mathbf{c}) dt + \mathbf{c}_0, \quad (13)$$

又

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{C}_0$ 中的各元为积分常数, 由初始条件决定。

若非线性系统 (1) 具有初始条件

$$X(t_0) = d_0, X'(t_0) = d_1, \dots, X^{(n-1)}(t_0) = d_{n-1}, \quad (15)$$

由式 (11), 有

$$\mathbf{K}\mathbf{C}_0 = \mathbf{D}, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ K_1^2 & K_2^2 & \dots & K_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_1^{(n-1)} & K_2^{(n-1)} & \dots & K_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}, \\ \mathbf{K}^{-1} &= \frac{\text{adj}\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|}, \quad |\mathbf{K}| \neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

应用逐次逼近法, 由式 (13) 可求得第 K 次近似

$$\mathbf{C}_k = \int_{t_0}^t \mathbf{L}(t, \mathbf{C}_{k-1}) dt + \mathbf{C}_0, \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ \vdots \\ C_{ni} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

将 $\mathbf{C}_k$ 代入式 (3) 即可求得非线性系统的第 K 次近似解。

以上讨论, 对非线性自由振动和强迫振动都是适用的, 当 F 显含 t 时, 假定 F 有以下形式

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = F_1(x, x', \dots, x^{(n-1)}) - \frac{1}{\mu} F_2(t), \quad \mu \neq 0, \quad (20)$$

则方程 (1) 为

$$X^{(n)} + P_1 X^{(n-1)} + P_2 X^{(n-2)} + \dots + P_{n-1} X + \mu F_1 = F_2, \quad (21)$$

如果能够求得生成方程 ($\mu = 0$) 的特解 X , 则方程 (21) 的解可取如下形式

$$X = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n + \bar{X}, \quad (22)$$

且 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 同上可以求得。在一般情况下, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \int_{t_0}^t \mathbf{L}(t, \mathbf{C}) dt + \mathbf{C}_0 \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt + \mathbf{C}_0 \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_1 dt + \int_{t_0}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_2 dt + \mathbf{C}_0, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\mu \mathbf{F}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

如果扰力为谐波函数, 如 $F_2(t) = q \cos(\omega t + \varphi)$, 则式 (23) 右端第二个积分中各元均由以下形式积分所组成

$$\begin{aligned} g_i(k) \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha_i} q \cos(\omega t + \varphi) dt &= q g_i(k) \int_{t_0}^t e^{-k_i t} \cos(\omega t + \varphi) dt = \\ &= q g_i(k) e^{-k_i t} \frac{-k_i \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)}{k_i^2 + \omega^2} \Big|_{t_0}^t, \end{aligned} \quad (25)$$

上式中 $g_i(k)$ 只依赖于 k_i , 且当 $k_i^2 + \omega^2 = 0$ 或 $k_i = \pm i\omega$ 时, 即非线性系统谐波解的固有频率与激励力的圆频率相等时, 系统将发生振荡或共振。

当生成方程的特征根有重根的情况, 假若有 m 个不同的 α_i 重重根 $k_i (i=1, 2,$

$3, \dots, m)$, 其生成解为 $X = \sum_{i=1}^m P_i(t) e^{k_i t}$, 且 $P_i(t) = C_{0i} + C_{1i}t + C_{2i}t^2 + \dots + C_{i-1,i}t^{i-1}$ 。同前讨论, 可以求得 $C_{0i}, C_{1i}, \dots, C_{i-1,i} (i=1, 2, 3, \dots, m)$ 。

由线性代数及微分方程的理论可知, 方程 (1) 的生成方程有 n 个线性无关的特征根, 其对应的线性无关解的朗斯基行列式不等于零, 因而由方程 (4) 或 (5) 可以唯一的解出 $\mathbf{C}'_i$ 或 $\mathbf{C}'$ 。又只要 $\mathbf{L}(t, \mathbf{C})$ 适当光滑 (如连续和满足李普希兹条件或连续可微), 那么方程 (7) 和 (13) 便是等价的, 满足初始条件的解存在唯一, 由逐次逼近法求得的近似解收敛, 即有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}_{ik} = \mathbf{C}_i$, 且 $\mathbf{C}'_i$ 或 $\mathbf{C}$ 仍是方程 (7) 和 (13) 的解^(3,8)。于是有

$$X = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i c_{ik} = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i, \quad (26)$$

只对充分小的正数 $\delta_i > 0, \varepsilon > 0$, 当 $|C_i - C_{ik}| < \delta_i$ 时, 有

$$\begin{aligned} |X - X_k| &= |\sum \alpha_i c_i - \sum \alpha_i c_{ik}| \leq \sum |\alpha_i| |c_i - c_{ik}| < \\ &< \sum |\alpha_i| \delta_i \leq \alpha \sum \delta_i < \varepsilon, \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\alpha = \max |\alpha_i| (i=1, 2, 3, \dots, n)$, $\delta = \sum \delta_i < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ 。由式 (26)、(27) 即

可证明非线性系统的解是存在与唯一的, 其近似解也是收敛的。

这里的讨论, 对非线性特征参数 μ 并没有要求是很小的限制, 即 μ 不一定是微参数。对于非线性系统 (1) 或 (21), 一般情况应用本文的方法均能求得近似解。

下面我们具体对常用的二阶非线性系统进行讨论。

三、二阶非线性系统及举例

考虑一二阶非线性系统并可用下列运动方程来描述

$$X'' + P_1 X' + P_2 X + \mu F(X, X') = f(t), \quad (28)$$

P_1, P_2 为常数, 初始条件 $X(t_0) = a, X'(t_0) = b$ 。当 $\mu = 0$ 时, 其对应齐次微分方程的通解为

$$X = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2, \quad (29)$$

其中 $\alpha_1 = e^{k_1 t}, \alpha_2 = e^{k_2 t}, k_{1,2} = \frac{-P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - 4P_2}}{2}$ 且 $P_1^2 - 4P_2 \neq 0$ 。

将 c_1, c_2 视为 t 的函数, 为使齐次生成解 (29) 满足方程 (28), 则有

$$c_1' \alpha_1 + c_2' \alpha_2 = 0, \quad (30)$$

$$k_1 c_1' \alpha_1 + k_2 c_2' \alpha_2 = -\mu \bar{F} + f(t),$$

式中 $\bar{F} = F(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2, k_1 c_1 \alpha_1 + k_2 c_2 \alpha_2)$ 。由式 (30) 可以解得

$$C_1' = \frac{1}{\alpha_1(k_2 - k_1)} (\mu \bar{F} - f), \quad C_2' = -\frac{1}{\alpha_2(k_2 - k_1)} (\mu \bar{F} - f), \quad (31)$$

上式等价于积分方程

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{k_2 - k_1} \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha_1} (\mu \bar{F} - f) dt + c_{10} = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\int_{t_0}^t \frac{\mu \bar{F}}{\alpha_1} dt - \int_{t_0}^t \frac{f}{\alpha_1} dt \right) + c_{10}, \\ C_2 &= \frac{1}{k_2 - k_1} \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha_2} (\mu \bar{F} - f) dt + c_{20} = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\int_{t_0}^t \frac{\mu \bar{F}}{\alpha_2} dt - \int_{t_0}^t \frac{f}{\alpha_2} dt \right) + c_{20}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 c_{10}, c_{20} 由初始条件确定, 当 $t = t_0$ 时

$$c_{10} + c_{20} = a, \quad (33)$$

$$k_1 c_{10} + k_2 c_{20} = b,$$

由此可求得

$$C_{10} = \frac{ak_2 - b}{k_2 - k_1}, \quad C_{20} = \frac{b - ak_1}{k_2 - k_1}, \quad (34)$$

将 c_{10}, c_{20} 代入式 (32), 并由逐次逼近法, 有

$$C_{1i} = \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\mu \int_{t_0}^t \frac{\bar{F}_{i-1}}{\alpha_1} dt - \int_{t_0}^t \frac{f}{\alpha_1} dt \right) + c_{10}, \quad (35)$$

$$C_{2i} = \frac{1}{k_2 - k_1} \left(\mu \int_{t_0}^t \frac{\bar{F}_{i-1}}{\alpha_2} dt - \int_{t_0}^t \frac{f}{\alpha_2} dt \right) + c_{20},$$

式中 $\bar{F}_{i-1} = F(c_{1,i-1}\alpha_1 + c_{2,i-1}\alpha_2, k_1c_{1,i-1}\alpha_1 + k_2c_{2,i-1}\alpha_2)$. 将式 (35) 代入式 (29) 即可求得二阶非线性系统的第 i 次近似解。

如果能求得非线性系统 (28) 的生成方程的特解 $\bar{X}$, 则生成方程的通解为

$$X = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \bar{X}, \quad (36)$$

则式 (30) ~ (35) 中应取 $f = 0$, 且有 $c_{10} = \frac{(a - \bar{X}_0)k_2 - (b - \bar{X}'_0)}{k_2 - k_1}$,

$c_{20} = \frac{(b - \bar{X}'_0) - (a - \bar{X}_0)k_1}{k_2 - k_1}$, 将所求得的 c_{1i}, c_{2i} 代入式 (36) 即可求得第 i 次近似解。

在一些问题中, 我们希望能够求得周期解。如果非线性系统 (28) 有周期解, 则 $f(t) - \mu F(x, x')$ 应是变元 t 的周期函数。当 $P_1 = 0, P_2 = P^2$ 时, 有

$$X'' + P^2 X = f(t) - \mu F(X, X'), \quad (37)$$

这里, 我们讨论应用本文方法求非线性系统 (37) 的周期解的问题。此时方程 (37) 所对应的特征根为虚根, 其通解形式为

$$X = c_1(t)\cos pt + c_2(t)\sin pt + \bar{X}(t). \quad (38)$$

式 (38) 包括有两部分; 前两项相当于非线性自由振动 (c_1, c_2 还依赖于初始条件), 第三项决定于干扰力, 相当于非线性强迫振动。当扰力为周期函数或可展为付里叶级数时, 强迫振动的周期与扰力的周期相同。如 $f(t) = q\sin\omega t$, 则 $\bar{X} = \frac{q\sin\omega t}{p^2 - \omega^2}$, 由此看出, 强迫振动与自由振动不能具有相同的周期或频率。若自由振动为周期函数, 则应满足条件

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/p} \bar{F}_{i-1}(t)\cos ptdt &= 0, \\ \int_0^{2\pi/p} \bar{F}_{i-1}(t)\sin ptdt &= 0, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (39)$$

式中 $\bar{F}_{i-1} = F_i(X_{i-1}, X'_{i-1})$ 。因此若要系统有周期解, 则扰力的频率应不等于系统的固有频率, 即扰力不含共振项且应满足条件 (39)。

例. 具有非线性阻尼力的振动。这里以阻尼力与平方成正比为例, 其运动微分方程式是

$$X'' + P^2 X \mp \mu X'^2 = 0, \quad (49)$$

式中最后一项在速度指向 X 轴的负向时取负号, 指向 X 轴的正向时取正号。假定初始条件是 $(X)_{t=0} = a, (X')_{t=0} = 0$, 则在振荡的前半周里, 式 (49) 左端第三项前应取负