# 关于机械手的间接位置问题的一种解法

张 启 先

（北京航空学院）

**摘　要**

本文讨论了机械手运动中的间接位置问题。作者将闭式运动链机构分析中所用的运动同一性条件进行推广，对机械手运动中的间接位置问题，提出一种较为简便的求解方法。文中结合 *RRPRR* 及 6*R* 两种机械手对所提方法作了具体阐述。

## 一 前 言

机械手运动中，如果各运动副中的运动参数已经测知，则末端手部(夹持器)的位置和方位(姿态)是很容易通过矩阵运算而确定出来的，所以对这种直接位置问题没有再加讨论的必要。但是在机械手的操纵控制中，经常遇到相反的间接位置问题。当机械手的末端手部按要求路线运动时，手部相对机架的一系列位置和方位虽属拟定，但是应该求解各运动副中运动参数的所有可能方案，以便对所有伺服作动器（马达）进行控制，从而使机械手手部达到预定的运动要求。这种间接位置问题的求解一般比较复杂费事，对全由转动副组成而且多于五个自由度的任意机械手，更是非常困难。因此，机械手运动中的间接位置问题引起不少机构学工作者的兴趣和注意。关于间接位置问题的求解方法，可大致分为如下两种：

（1）直接利用机械手运动链中的已知点或已知向量，列出可单独或联立求解不多于三个运动参数的关系式，从而分步解出待求参数。现有机械手专书[2, 3, 4]中均介绍这种方法。

（2）在末端手部和机架之间引进运动已知的假想原动件，这样把开式运动链机械手转变成闭式运动链机构，然后套用空间机构的位移公式来求解运动参数。这种解法反映在文[5]中。

本文所用求解方法基本上属于第（1）种，但与文[2,3,4]相比，特点在于灵活运用机构运动的同一性条件，从而可以一次建立包含较少运动参数的关系式。关于机构运动的同一性条件，在文[1]中已广泛用于作空间闭式运动链机构的位移分析，本文则进一步推广用于求解机械手运动中的间接位置问题。

## 二 解法要点

与一般解法相同，在图8-1所示机械手简图的每一构件上，均固结有相应的右手直角坐标系（$y$ 轴常略去不画），其中 $z$ 轴一般选得沿着运动副的轴线，但是末端手部的 $z_n$ 轴则选得与手部的对称轴线一致，至于 $x$ 轴则沿着相邻两个 $z$ 轴的公垂线。设相邻两个构件的座标

系为 $x_i(y_i)z_i$ 及 $x_j(y_j)z_j$，则对于通常不含有球面副的机械手来说，每两个座标系之间一般具有下列四个尺度和运动参数：

$s_i$——沿 $z_i$ 轴从坐标轴 $x_i$ 量至 $x_j$ 的距离，规定与 $z_i$ 轴正向一致的距离为正；

$\theta_j$——绕 $z_i$ 轴从坐标轴 $x_i$ 量至 $x_j$ 的转角，规定逆时针向的转角为正；

$h_j$——沿 $x_j$ 轴从坐标轴 $z_i$ 量至 $z_j$ 的距离，规定与 $x_j$ 轴正向一致的距离为正；

$\alpha_{ij}$——绕 $x_j$ 轴从坐标轴 $z_i$ 量至 $z_j$ 的转角，规定逆时针向的转角为正。

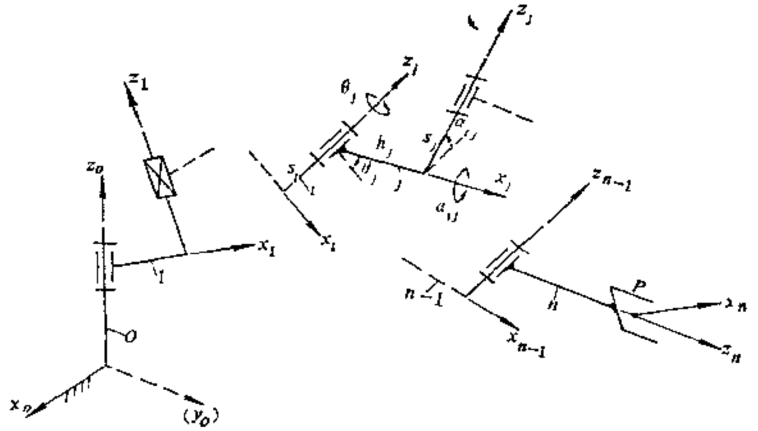


图 8-1

在进行点的座标和向量的方向余弦由座标系 $x_j(y_j)z_j$ 变换到 $x_i(y_i)z_i$ 中时，所用的方向余弦矩阵为

$$C_{ij}=\begin{bmatrix}\cos\theta_j & -\cos\alpha_{ij}\sin\theta_j & \sin\alpha_{ij}\sin\theta_j\\ \sin\theta_j & \cos\alpha_{ij}\cos\theta_j & -\sin\alpha_{ij}\cos\theta_j\\ 0 & \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij}\end{bmatrix} \tag{1}$$

至于由座标系 $x_i(y_i)z_i$ 变换到 $x_j(y_j)z_j$ 的逆变换，按照正交矩阵的特性，将上述矩阵进行转置，即得所用的变换矩阵 $C_{ji}=C_{ij}^T$。

在机械手末端手部的位置和方位拟定后，该手部相对于机架座标系的位置和方位即为已知。所以从运动分析上考虑，机械手与一般闭式运动链机构实无本质区别，不过原动件改作已知空间运动的手部而已。因此，与闭式机构一样，机械手运动时也存在各种运动同一性条件。在求解机械手的运动参数中，常用的运动同一性条件如下：

（1）在有两个运动副轴线相交的机械手中，假想在轴线交点将机械手拆分时，该点在某参考座标系中的座标，无论从该参考座标系左侧或右侧进行计算，应该等同。这样建立的关系式中，可避开一个或两个转角参数。

（2）在含有两对相交运动副轴线的机械手中，假想在两交点把机械手拆分为连架链和浮动链，则该两点在运动中的距离应该等同。这样建立的关系式中可避开二至四个转角参数。

（3）在含有两对正交运动副轴线的机械手中，常有某运动副轴线和两交点的联线垂直，而且从固定座标系来看，也保持同一的垂直关系。这样建立的关系式中，至少可避开三个转角参数。

（4）假想沿一个座标轴轴线把机械手拆分时，该轴线在某参考座标系中的方向余弦，无论从该参考座标系左侧或右侧进行计算，应该等同。按此建立的等同关系式中，可避开一个绕所取轴线转动的转角参数。

（5）假想沿某两个运动副轴线把机械手拆分为连架链和浮动链时，该两轴线夹角的余弦，无论从连架链或浮动链中进行计算，应该等同。按此建立的等同关系式中，可以避开两个绕所取轴线转动的转角参数。

（6）假想沿某两个运动副轴线把机械手拆分为连架链和浮动链时，该两轴线的公垂线距离，无论从连架链或浮动链进行计算，应该等同。按此建立的等同关系式中，同样可避开两个绕所取轴线转动的转角参数。

（7）由于手部位置已知，所以可把机械手抽象为一个空间向量封闭多边形，该向量封闭多边形在任何座标轴上的投影和恒等于零。利用这种等同关系，一般可避开两个或三个运动参数。

当然在具体运用运动同一性条件来进行间接位置问题的求解时，还要用到矩阵运算和空间解析几何的某些知识。至于更具体的解法，下面将结合 *RRPRR* 及 *RRRRRR* 两种机械手加以说明。

## 三　求解 *RRPRR* 机械手中的间接位置问题

如图 6-2 所示，*RRPRR* 机械手是具有五个自由度而适于夹持回转体工件的机械手。一机部自动化研究所研制的 *CIS*-2 工业机械人即属此种类型。设已知机械手的结构参数：$l_{AB}=s_1$，$l_{BC}=h_2=a_2$，$l_{DP}=s_6$，$\alpha_{01}=\alpha_{12}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=90^\circ$，$\theta_3=\alpha_{23}=0^\circ$。机械手末端手部 5 上 $P$ 点在固定座标系中的位置 $x_p$、$y_p$、$z_p$ 及向量 $\boldsymbol{DP}$（$z_5$ 轴）在固定座标系中的方向余弦 $l$、$m$、$n$ 已经拟定。要求解出机械手各运动副中的五个运动参数．$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_4$，$\theta_5$ 及 $s_2$（$=l_{CD}$）。

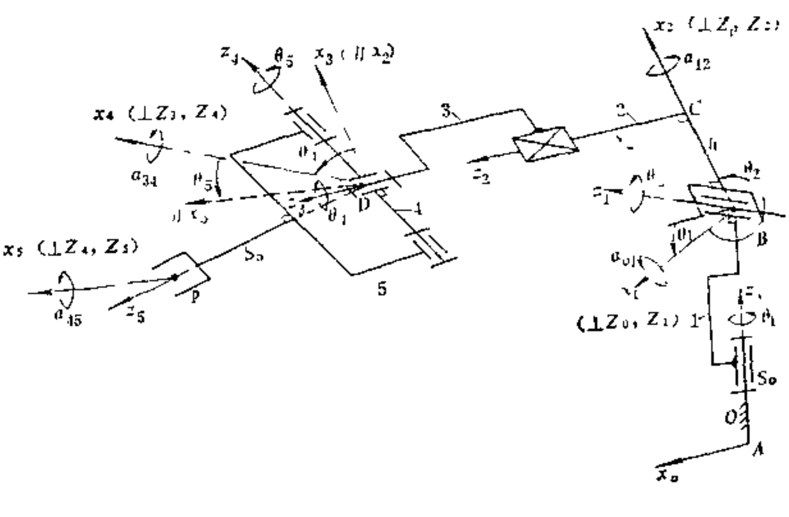


图 8 2

（1）转角 $\theta_1$ 的求解

由于机械手中含有两对 $B$ 点和 $D$ 点正交的转动副轴线，故可按（二）中的（3）来建立

求解 $\theta_1$ 的关系式。从运动链 2-3 来看，轴 $z_1$ 必垂直于联线 $\overline{BD}$，这一性质从固定座标系来看也不改变。在固定座标系中，可写出 $B$ 点和 $D$ 点的座标分别为：

$B$ 点： $x_B = 0$， $y_B = 0$， $z_B = s_0$

$D$ 点： $x_D = x_P - ls_5$， $y_D = y_P - ms_5$， $z_D = z_P - ns_5$

至于轴 $z_1$ 的方向余弦可由方向余弦矩阵 $C_{01}$ 得出。在式（1）中，令下标 $i=0$、$j=1$，而角度 $\alpha_{01}=90°$，可得 $z_1$ 轴在固定座标系中的方向余弦为 $(\sin\theta_1,\ -\cos\theta_1,\ 0)^T$。

因此，按 $z_1 \perp BD$ 可写出

$$(x_D - x_B)\sin\theta + (y_D - y_B)(-\cos\theta_1) + (z_D - z_B)\cdot 0 = 0$$

即得求解转角 $\theta_1$ 的公式为

$$\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{y_D}{x_D} = \frac{y_P - ms_5}{x_P - ls_5}$$

或

$$\theta_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y_P - ms_5}{x_P - ls_5} \tag{2}$$

这里 $\theta_1$ 可有两个解。

（2）距离 $s_2$ 的求解

按（二）中的（2），从连架链计算 $B$、$D$ 两点间的距离应和从浮动链 2-3 算出的等同，即

$$(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2 = a_2^2 + s_2^2$$

由此可得

$$s_2 = \pm\sqrt{(x_P - ls_5)^2 + (y_P - ms_5)^2 + (z_P - ns_5 - s_0)^2 - a_2^2} \tag{3}$$

这里 $s_2$ 也可有两个解。

（3）转角 $\theta_2$ 的求解

按（二）中的（7），将机械手的向量封闭多边形 $ABCDPA$ 向 $z_0$ 轴上取投影，可写出

$$s_0 + a_2\cos(x_2,\ z_0) + s_2\cos(z_2,\ z_0) + s_5\cos(z_5,\ z_0) - z_P = 0$$

由于 $\cos(z_5,\ z_0) = n$ 而利用式（1）可求出

$$\cos(x_2,\ z_0) = [1,\ 0,\ 0]C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sin\theta_2,$$

$$\cos(z_2,\ z_0) = [0,\ 0,\ 1]C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\cos\theta_2,$$

所以最后可得

$$a_2\sin\theta_2 - s_2\cos\theta_2 = z_P - ns_5 - s_0$$

因此
$$\theta_2 = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + s_2^2 - (z_P - ns_5 - s_0)^2}}{z_P - ns_5 - s_0 - s_2} \tag{4}$$

这里，对应于一个 $s_2$ 可有两个 $\theta_2$ 的解。

（4）转角 $\theta_4$ 和 $\theta_5$ 的解

按（二）中的（4），写出以座标系 $x_3(y_3)z_3$ 作为参考座标系时，轴 $z_5$ 的方向余弦等同

关系式如下：

$$C_{34}C_{45}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=C_{32}C_{21}C_{10}\begin{bmatrix}l\\m\\n\end{bmatrix}=C_{21}\,C_{10}\begin{bmatrix}l\\m\\n\end{bmatrix}$$

利用式（1）将上式展开可得

$$\cos\theta_4\sin\theta_5=(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\cos\theta_2+n\sin\theta_2$$

$$-\sin\theta_4\sin\theta_5=l\sin\theta_1-m\cos\theta_1$$

$$-\cos\theta_5=(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\sin\theta_2-n\cos\theta_2$$

由此可得

$$\theta_4=\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\cos\theta_1-l\sin\theta_1}{(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\cos\theta_2+n\sin\theta_2}\qquad(5)$$

$$\theta_5=\cos^{-1}[n\cos\theta_2-(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\sin\theta_2]$$

$$=\sin^{-1}\frac{m\cos\theta_1-l\sin\theta_1}{\sin\theta_4}\qquad(6)$$

这里，对应于一组 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 值，$\theta_4$ 将有两个可能解；但对应于一组 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_4$ 值，$\theta_5$ 只有一个解。

值得指出，在求解运动参数 $\theta_1$、$s_2$、$\theta_2$ 时，也可按（二）中的（1），利用 $D$ 点在固定座标系中的座标等同关系式[2]，但求解略繁。

## 四　求解 *RRRRRR* 机械手中的间接位置问题

图 8-3 所示是较图 8-2 更为复杂的机械手，它有六个转动副和六个自由度，因而可满足多用途的需要。设已知机械手的结构参数：$l_{AB}=s_0$，$l_{BC}=h_2=a_2$，$l_{CD}=s_3$，$l_{DP}=s_5$，$\alpha_{01}=\alpha_{23}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=90^\circ$，$\alpha_{12}=\alpha_{56}=0^\circ$。机械手末端手部 6 上 $P$ 点在固定座标系中的位置 $x_P$，$y_P$，$Z_P$ 及座标轴 $Z_6$ 和 $x_6$ 在固定座标系中的方向余弦 $l$、$m$、$n$ 和 $u$、$v$、$w$ 均已经拟定。要求解出机械手各转动副中的六个转角参数 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$、$\theta_5$、$\theta_6$。

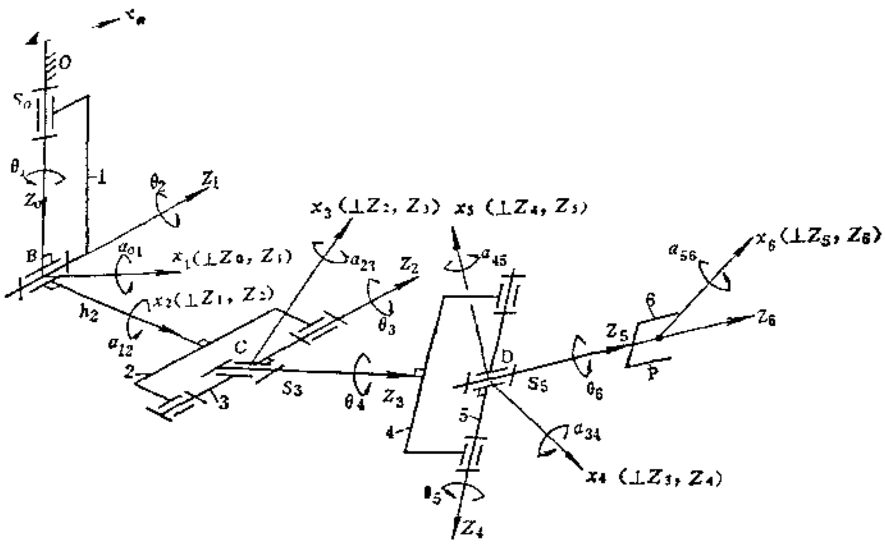


图　8-3

（1）转角 $\theta_1$ 的求解

仿上，按二中的（3），利用轴 $Z_1$ 和联线 $BD$ 垂直的运动同一性条件。直接按式（2）可求转角 $\theta_1$。

（2）转角 $\theta_2$ 的求解

按二中的（2），从连架链计算 $C$、$D$ 两点间的距离应保持定长 $S_3$，即

$$(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2+(Z_D-Z_C)^2=S_3^2$$

在固定座标系中 $C$ 点的座标，可利用 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}$ 的关系求出：

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ Z_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix}+C_{01}C_{12}\begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ a_2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ S_0+a_2\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

至于 $D$ 点的座标则为 $x_D=x_P-lS_5$，$y_D=y_P-mS_5$，$Z_D=Z_P-nS_5$。

将 $C$ 点和 $D$ 点的座标代入上述定长关系式经展开化简可得

$$A\sin\theta_2+B\cos\theta_2=C \tag{7}$$

式中：

$$A=Z_P-nS_5-S_0$$

$$B=(x_P-lS_5)\cos\theta_1+(cy_P-mS_5)\sin\theta_1$$

$$C=0.5a_2+[(x_P-lS_5)^2+(y_P-mS_5)^2+(Z_P-nS_5-S_0)^2-S_3^2]/0.5a_2$$

因此

$$\theta_2=2\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{B+C} \tag{8}$$

这里，对应于每个 $\theta_1$ 可有两个 $\theta_2$ 解。

（3）转角 $\theta_3$ 的求解

仍按二中的（2），但利用 $B$ 与 $D$ 两点。由浮动链 2-3-4 计算 $B$、$D$ 两点的距离应与由连架链 1-0-6 得出的一致。

对浮动链 2-3-4 来说，如取 $Cx_2y_2Z_2$ 作为参考座标系，则 $B$ 点的座标为 $x'_B=-a_2$，$y'_B=0$，$Z'_B=0$ 而 $D$ 点的座标为

$$\begin{bmatrix} x'_D \\ y'_D \\ Z'_D \end{bmatrix}=C_{23}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_3\sin\theta_3 \\ -S_3\cos\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

至于对连架链 1-0-6 来说，$B$、$D$ 两点在固定座标系中的座标均已求出。

因此，按照机械手运动的同一性条件

$$(x'_D-x'_B)^2+(y'_D-y'_B)^2+(Z'_D-Z'_B)^2=(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2+(Z_D-Z_B)^2$$

可得

$$(S_3\sin\theta_3+a_2)^2+(-S_3\cos\theta_3)^2=(x_P-lS_5)^2+(y_P-mS_5)^2+(Z_P-nS_5-S_0)^2$$

因而

$$\theta_3=\sin^{-1}\frac{(x_P-lS_5)^2+(y_P-mS_5)^2+(Z_P-nS_5-S_0)^2-S_3^2-a_2^2}{2a_2S_3} \tag{9}$$

这里，转角 $\theta_3$ 有两个可能解。

（4）转角 $\theta_4$ 的求解

按二中的（5），沿轴线 $Z_4$ 及 $Z_6$ 拆分时，从连架链 6－0－1－2－3－4 计算该两轴线夹角的余弦应与由浮动构件 5 本身得出的结果等同，即

$$\cos(Z_4,\ Z_6)=\cos 90^\circ=0$$

该一关系的矩阵表示形式为

$$[0,\ 0,\ 1]C_{43}C_{32}C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}=0$$

由此可得

$$[\sin\theta_4,\ -\cos\theta_4,\ 0]C_{32}C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}=[\sin\theta_4,\ -\cos\theta_4,\ 0]\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

$$=L\sin\theta_4-M\cos\theta_4=0 \tag{10}$$

式中：

$$L=[(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\cos\theta_2+n\sin\theta_2]\cos\theta_3+[-(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\sin\theta_2+n\cos\theta_2]\sin\theta_3$$

$$M=l\sin\theta_1-m\cos\theta_1$$

$$N=[(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\cos\theta_2+n\sin\theta_2]\sin\theta_3+[(l\cos\theta_1+m\sin\theta_1)\sin\theta_2-n\cos\theta_2]\cos\theta_3$$

故

$$\theta_4=\mathrm{tg}^{-1}\frac{M}{L} \tag{11}$$

这里，对应于一组 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$ 值，$\theta_4$ 将有两个可能解。

（5）转角 $\theta_5$ 的求解

仍按二中的（5）进行，但沿轴线 $Z_3$ 及 $Z_6$ 拆分。从浮动链 4-5 计算该两轴线夹角的余弦 $\cos(Z_3,\ Z_6)$ 应与从连架链 6－0－1－2－3 计算的结果一致。因此可写出

$$[0,\ 0,\ 1]C_{34}C_{45}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=[0,\ 0\ 1]C_{32}C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

即

$$[0,\ 1,\ 0]\begin{bmatrix} \sin\theta_5 \\ -\cos\theta_5 \\ 0 \end{bmatrix}=[0,\ 0,\ 1]\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

或

$$-\cos\theta_5=N$$

而

$$\theta_5=\cos^{-1}(-N) \tag{12}$$

这里，对应于一组 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$ 值，$\theta_5$ 可有两个解。

（6）转角 $\theta_6$ 的求解

由于转角 $\theta_6$ 与轴 $x_6$ 的方位有关，故应按二中的（4），假想沿轴 $x_6$ 把机械手拆分而建立关系式。取 $x_5(y_5)Z_5$ 作为参考座标系，写出轴 $x_6$ 的方向余弦等同关系式如下：

$$C_{56}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=C_{54}C_{43}C_{32}C_{21}C_{10}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=C_{54}C_{43}\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中 $\overline{U}$、$\overline{V}$、$\overline{W}$ 与 $u$、$v$、$w$ 的关系和前面推导 $L$、$M$、$N$ 与 $l$、$m$、$n$ 的关系完全相同。

进一步展开式（13）可得

$$\cos\theta_6=(U\cos\theta_4+V\sin\theta_4)\cos\theta_5+W\sin\theta_5$$

$$\sin\theta_6=U\sin\theta_4-V\cos\theta_4$$

$$0=(U\cos\theta_4+V\sin\theta_4)\sin\theta_5-W\cos\theta_5$$

因此

$$\theta_6=\mathrm{tg}^{-1}\frac{U\sin\theta_4-V\cos\theta_4}{(U\cos\theta_4+V\sin\theta_4)\cos\theta_5+W\sin\theta_5} \tag{14}$$

$$\theta_5=\mathrm{tg}^{-1}\frac{W}{U\cos\theta_4+V\sin\theta_4} \tag{15}$$

式（15）可作为前面按式（12）计算转角 $\theta_5$ 的核查公式。式（14）表明，对应于一组 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$、$\theta_5$ 值，转角 $\theta_6$ 只有一个解。

## 五 结 束 语

综上可知，灵活运用机构运动的同一性条件，的确可使机械手运动中的间接位置问题的求解，得到一些简化。由此不难进一步分析运动参数的全部可能解（"树状"解），以便对机械手运动进行合适的控制。二中的第（6）所述运动的同一性条件，在本文中没有得到应用，它将用于研究更为复杂的机械手。

## 参 考 文 献

〔1〕 张启先 空间机构运动的同一性条件及其在简化位移分析中的应用 机械工程学报 第16卷 第3期，1980.

〔2〕 牧野·洋 自动机械机构学 昭和51年（1976）

〔3〕 合田周平，木下源一郎 ロボワト工学 1977

〔4〕 Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные Роботы: Динамика И Алгоритмы 1978

〔5〕 Duffy J., Martinovic R. Kinematics of 3R-2P Computer Controlled Manipulators Proceedings of The 7th International Symposium on Industrial Robots, 1977

### On a Method of Solving The Indirect Position Problems of Manipulators

Zhang Qixian

Abstracts

The present paper deals with the indirect Position problems of manipulators. This paper extends The use of identity conditions for motions of closed-loop mechanisms and suggests a rather simplified method of solving The indireet position proflems of manipulators. In order to illustrate This method, RRPRR and 6R manipulatovs are given as two examples.