

第3篇 流体流动

主稿、编写人 戴千策 华东理工大学 教授

编写人 方图南 华东理工大学 教授

蔡志武 华东理工大学 博士

符号说明	3-2	1.7.5 湍流参数的实验测量	3-18
1 流体流动的基本原理与基本方程	3-3	参考文献	3-19
1.1 流体的物理属性	3-3	2 流体阻力计算	3-19
1.2 流体运动学	3-4	2.1 流体阻力的分类和机理	3-19
1.2.1 流动的分析描述	3-4	2.2 管子与管件	3-19
1.2.2 流动的几何描述	3-5	2.3 管路阻力	3-19
1.2.3 流体微团运动分析	3-6	2.3.1 直管阻力	3-19
1.2.4 流体运动的分类	3-6	2.3.2 局部阻力	3-23
1.3 流体运动的守恒原理	3-6	2.3.3 蛇管阻力	3-25
1.3.1 控制体和控制面	3-6	2.3.4 非圆形直管阻力	3-25
1.3.2 质量守恒	3-6	2.3.5 变截面管阻力	3-26
1.3.3 能量守恒	3-7	2.3.6 多孔管的阻力	3-26
1.3.4 动量守恒	3-9	2.3.7 非等温流动的阻力	3-27
1.4 流体运动微分方程	3-10	2.4 管路计算	3-27
1.4.1 连续性微分方程	3-10	2.4.1 简单管路	3-27
1.4.2 理想流体运动微分方程	3-11	2.4.2 复杂管路及管网	3-29
1.4.3 粘性流体运动方程——应力形式	3-11	2.5 气体流动	3-32
1.4.4 奈维-斯托克斯方程	3-11	2.5.1 气体流动的摩擦因子和能量方程	3-32
1.5 奈维-斯托克斯方程的解	3-11	2.5.2 等温流动	3-33
1.5.1 准确解	3-11	2.5.3 绝热流动	3-33
1.5.2 近似解	3-11	2.5.4 喷管中的气体流动	3-34
1.5.3 数值解	3-13	2.6 稀薄气体流动	3-35
1.6 边界层理论	3-13	2.6.1 努森数与低压下气体流动状态的区分	3-35
1.6.1 边界层概念, 平面上的边界层	3-13	2.6.2 流导、流量和抽气速率	3-35
1.6.2 曲面上的边界层、边界层分离	3-13	2.6.3 粘滞流的流导	3-35
1.6.3 传热和传质边界层	3-14	2.6.4 分子流的流导	3-36
1.7 湍流理论与实验观测	3-15	2.6.5 过渡流的流导	3-36
1.7.1 湍流基本特征	3-15	2.6.6 管路及阀门的压降	3-36
1.7.2 湍流运动基本方程	3-15	参考文献	3-36
1.7.3 湍流半经验理论	3-16	3 流体均布	3-36
1.7.4 射流速度分布	3-17		

3.1	流动均匀性的表示方法	3-36
3.2	改善流体均匀分布的方法	3-37
参考文献		3-39
4	气液两相流动	3-39
4.1	气泡、液滴、薄膜基本流动行为	3-39
4.1.1	气泡、液滴形态图	3-39
4.1.2	滴、泡终端速度与阻力公式	3-40
4.1.3	气泡液滴阻力曲线与终端速度曲线	3-41
4.1.4	滴、泡终端速度关系	3-42
4.1.5	液膜流动	3-43
4.2	管内气液两相流动	3-43
4.2.1	基本流动参数	3-44
4.2.2	基本流型	3-44
4.2.3	持料量	3-48
4.2.4	压降	3-49
参考文献		3-52
5	非牛顿流体的流动	3-53
5.1	按流变行为的分类	3-53
5.1.1	非牛顿流体的粘度	3-53

5.1.2	广义牛顿流体	3-53
5.1.3	依时性流体	3-55
5.1.4	粘弹性流体	3-55
5.2	广义牛顿流体的管内流动	3-55
5.2.1	充分发展的层流流动	3-55
5.2.2	从层流向湍流的过渡	3-56
5.2.3	管内湍流的速度分布	3-57
5.2.4	流动阻力和摩擦因子	3-57
5.3	粘弹性流体的流动	3-59
5.3.1	粘弹性流体的特异流动行为	3-59
5.3.2	粘弹性流体的定常剪切行为	3-59
5.3.3	粘弹性流体的本构方程及其力学行为	3-61
5.3.4	拉伸流动	3-63
5.4	流变参数的实验测定	3-64
5.4.1	毛细管流变仪	3-64
5.4.2	旋转圆筒流变仪	3-65
5.4.3	锥板流变仪	3-66
参考文献		3-66

符号说明

A	管截面, m^2
a	小球半径, m
C	流导, m^3/s
C_D	阻力系数, 无因次
C_p	定压比热, $J/kg \cdot ^\circ C$
C_v	定容比热, $J/kg \cdot ^\circ C$
d_e	当量直径, m
D	管径, m
D_i	模口、管口直径, m
D_R	减阻百分数, 无因次
F_D	曳力, N
F_r	弗鲁德数, 无因次
F_s	非圆形管的形状因子, 无因次
f	Fanning 摩擦因子, 无因次
G	弹性模量, Pa
G	质量流率, $kg/m^2 \cdot s$
g	重力加速度, $g=9.81m/s^2$
He	Hestrom 数, 无因次
h	液膜厚度, m
h_t	机械能损失, J/kg
J	蠕变柔量, Pa^{-1}
K	稠度系数, $Pa \cdot s^n$
K	分散相与连续相粘度比, 无因次
K	波尔兹曼常数, $K=1.38 \times 10^{-23} J/K$

Kn	Knudsen 数, 无因次
L	长度, 管长, m
L_e	局部阻力的当量长度, m
M	质量, kg
M	分子量, $kg/kmol$
Ma	Mach 数, $Ma = \frac{u}{u_s}$, 无因次
$M_{(1-v)}$	记忆函数, Pa/s
N_1	第一法向应力差, Pa
N_2	第二法向应力差, Pa
n	流动行为指数, 无因次
p	压力, Pa
Q	体积流量, m^3/s
Q	2.6 节中真空下气体流量, $Pa \cdot m^3/s$
R	半径、曲率半径, m
R	通用气体常数, $R=8.314 \times 10^3 J/k \cdot mol \cdot K$
Re	雷诺数, 无因次
Re_B	Bingham 流体雷诺数, 见式 (5-38)
Re_{MR}	Metzner-Reed 雷诺数, 见式 (5-32)
r	径向距离, 矢径, m
r_e	水力半径, m
s	抽气速率, m^3/s
S	两相滑动速度, m/s
T	温度, K
T_R	Trouton 比值, 见式 (5-90)
t	时间, t

第3篇 流体流动

主稿、编写人 戴千策 华东理工大学 教授

编写人 方图南 华东理工大学 教授

蔡志武 华东理工大学 博士

符号说明	3-2	1.7.5 湍流参数的实验测量	3-18
1 流体流动的基本原理与基本方程	3-3	参考文献	3-19
1.1 流体的物理属性	3-3	2 流体阻力计算	3-19
1.2 流体运动学	3-4	2.1 流体阻力的分类和机理	3-19
1.2.1 流动的分析描述	3-4	2.2 管子与管件	3-19
1.2.2 流动的几何描述	3-5	2.3 管路阻力	3-19
1.2.3 流体微团运动分析	3-6	2.3.1 直管阻力	3-19
1.2.4 流体运动的分类	3-6	2.3.2 局部阻力	3-23
1.3 流体运动的守恒原理	3-6	2.3.3 蛇管阻力	3-25
1.3.1 控制体和控制面	3-6	2.3.4 非圆形直管阻力	3-25
1.3.2 质量守恒	3-6	2.3.5 变截面管阻力	3-26
1.3.3 能量守恒	3-7	2.3.6 多孔管的阻力	3-26
1.3.4 动量守恒	3-9	2.3.7 非等温流动的阻力	3-27
1.4 流体运动微分方程	3-10	2.4 管路计算	3-27
1.4.1 连续性微分方程	3-10	2.4.1 简单管路	3-27
1.4.2 理想流体运动微分方程	3-11	2.4.2 复杂管路及管网	3-29
1.4.3 粘性流体运动方程——应力形式	3-11	2.5 气体流动	3-32
1.4.4 奈维-斯托克斯方程	3-11	2.5.1 气体流动的摩擦因子和能量方程	3-32
1.5 奈维-斯托克斯方程的解	3-11	2.5.2 等温流动	3-33
1.5.1 准确解	3-11	2.5.3 绝热流动	3-33
1.5.2 近似解	3-11	2.5.4 喷管中的气体流动	3-34
1.5.3 数值解	3-13	2.6 稀薄气体流动	3-35
1.6 边界层理论	3-13	2.6.1 努森数与低压下气体流动状态的区分	3-35
1.6.1 边界层概念, 平面上的边界层	3-13	2.6.2 流导、流量和抽气速率	3-35
1.6.2 曲面上的边界层、边界层分离	3-13	2.6.3 粘滞流的流导	3-35
1.6.3 传热和传质边界层	3-14	2.6.4 分子流的流导	3-36
1.7 湍流理论与实验观测	3-15	2.6.5 过渡流的流导	3-36
1.7.1 湍流基本特征	3-15	2.6.6 管路及阀门的压降	3-36
1.7.2 湍流运动基本方程	3-15	参考文献	3-36
1.7.3 湍流半经验理论	3-16	3 流体均布	3-36
1.7.4 射流速度分布	3-17		

3.1	流动均匀性的表示方法	3-36
3.2	改善流体均匀分布的方法	3-37
参考文献 3-39		
4	气液两相流动	3-39
4.1	气泡、液滴、薄膜基本流动行为	3-39
4.1.1	气泡、液滴形态图	3-39
4.1.2	滴、泡终端速度与阻力公式	3-40
4.1.3	气泡液滴阻力曲线与终端速度曲线	3-41
4.1.4	滴、泡终端速度关系	3-42
4.1.5	液膜流动	3-43
4.2	管内气液两相流动	3-43
4.2.1	基本流动参数	3-44
4.2.2	基本流型	3-44
4.2.3	持料量	3-48
4.2.4	压降	3-49
参考文献 3-52		
5	非牛顿流体的流动	3-53
5.1	按流变行为的分类	3-53
5.1.1	非牛顿流体的粘度	3-53

5.1.2	广义牛顿流体	3-53
5.1.3	依时性流体	3-55
5.1.4	粘弹性流体	3-55
5.2	广义牛顿流体的管内流动	3-55
5.2.1	充分发展的层流流动	3-55
5.2.2	从层流向湍流的过渡	3-56
5.2.3	管内湍流的速度分布	3-57
5.2.4	流动阻力和摩擦因子	3-57
5.3	粘弹性流体的流动	3-59
5.3.1	粘弹性流体的特异流动行为	3-59
5.3.2	粘弹性流体的定常剪切行为	3-59
5.3.3	粘弹性流体的本构方程及其力学行为	3-61
5.3.4	拉伸流动	3-63
5.4	流变参数的实验测定	3-64
5.4.1	毛细管流变仪	3-64
5.4.2	旋转圆筒流变仪	3-65
5.4.3	锥板流变仪	3-66
参考文献 3-66		

符号说明

A	管截面, m^2
a	小球半径, m
C	流导, m^3/s
C_D	阻力系数, 无因次
C_p	定压比热, $\text{J}/\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}$
C_v	定容比热, $\text{J}/\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}$
d_e	当量直径, m
D	管径, m
D_i	模口、管口直径, m
D_R	减阻百分数, 无因次
F_D	曳力, N
F_r	弗鲁德数, 无因次
F_s	非圆形管的形状因子, 无因次
f	Fanning 摩擦因子, 无因次
G	弹性模量, Pa
G	质量流率, $\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$
g	重力加速度, $g=9.81\text{m}/\text{s}^2$
He	Hestrom 数, 无因次
h	液膜厚度, m
h_t	机械能损失, J/kg
J	蠕变柔量, Pa^{-1}
K	稠度系数, $\text{Pa} \cdot \text{s}^n$
K	分散相与连续相粘度比, 无因次
K	波尔兹曼常数, $K=1.38 \times 10^{-23}\text{J}/\text{K}$

Kn	Knudsen 数, 无因次
L	长度, 管长, m
L_e	局部阻力的当量长度, m
M	质量, kg
M	分子量, kg/kmol
Ma	Mach 数, $Ma=\frac{u}{u_s}$, 无因次
$M_{(1-v)}$	记忆函数, Pa/s
N_1	第一法向应力差, Pa
N_2	第二法向应力差, Pa
n	流动行为指数, 无因次
p	压力, Pa
Q	体积流量, m^3/s
Q	2.6 节中真空下气体流量, $\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s}$
R	半径、曲率半径, m
R	通用气体常数, $R=8.314 \times 10^3\text{J}/\text{k mol} \cdot \text{K}$
Re	雷诺数, 无因次
Re_B	Bingham 流体雷诺数, 见式 (5-38)
Re_{MR}	Metzner-Reed 雷诺数, 见式 (5-32)
r	径向距离, 矢径, m
r_e	水力半径, m
s	抽气速率, m^3/s
S	两相滑动速度, m/s
T	温度, K
T_R	Trouton 比值, 见式 (5-90)
t	时间, s

U	来流速度, m/s
U_0	射流速度, m/s
u	流速, 平均流速, m/s
u_s	音速, m/s
u'	脉动速度, m/s
u^+	即 $\frac{u}{u_*}$, 无因次
u_*	摩擦速度, $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, m/s
W	质量流量, kg/s
X	x 轴向的体积力, N/kg
X	Martinelli 参数, 无因次
x	比值, $x = \frac{\tau_y}{\tau_w}$, 无因次
x	x 轴向距离, 无因次
Y	y 轴向的体积力, N/kg
y	Chisholm 参数
y^+	无因次距离, 见式 (5-52)
Z	z 轴向的体积力, N/kg
z	位高, m
α	动能校正系数, 见式 (5-61) 无因次
γ	绝热指数, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, 无因次
γ	应变, 无因次
$\dot{\gamma}$	角变形率, 剪切率, $\frac{1}{s}$
δ	边界层厚度, m
e	管壁粗糙度, m
ϵ	持料量, 无因次
$\dot{\epsilon}$	线变形率, $\frac{1}{s}$
η	非牛顿流体的表观粘度, Pa·s
η_E	拉伸粘度, Pa·s
λ	摩擦因子, 无因次
λ	气体分子平均自由程, m
λ	Maxwell 松弛时间, 式 (5-73), s
μ	粘度, Pa·s
ν	运动粘度, m
ξ	阻力系数, 无因次
ρ	密度, kg/m ³
σ	表面张力, N/m
σ	分子碰撞的有效直径, m
τ	剪应力, Pa
ϕ	摩擦因子, 无因次
ψ_1	第一法向应力系数, Pa·s ²
ψ_2	第二法向应力系数, Pa·s ²
$\psi_{(1-v)}$	松弛函数, Pa

Ω	涡量, $\frac{1}{s}$
$\dot{\Omega}$	旋转角速度, rad/s
ω	旋转角速率, $\frac{1}{s}$
下 标	
g	气相
l	液相
m	气液混合物
s	表观
s	声音
s	滑移
TP	气液两相
W	壁面

1 流体流动的基本原理与基本方程

1.1 流体的物理属性

流体是由运动分子组成的。但工程上在考察流体宏观运动规律时, 通常将流体看作是充满所在空间、内部无任何空隙的连续体, 流体质量在空间连续分布, 这就是流体的连续介质假定。

考察流体运动, 经常提及流体质点(或微团)。流体质点的尺寸远小于放置在流体中的实物或流体所处空间的尺寸, 但远大于分子自由程。它含有足够多的分子, 能用统计平均的方法求出流体宏观特征量, 如压力、密度、宏观速度等, 可以对这些宏观量的变化进行考察。

流体受力后导致运动, 流体的物理属性是运动状态不同的内因。对于流体运动有影响的物性主要是密度、粘性、压缩性、表面张力等。

(1) 粘性

流体不能保持一定的形状, 任何微小的剪切力都可以使通常的流体发生任意大的变形。流体受到剪切力作用时, 抵抗变形的特性叫做粘性。实际流体都是有粘性的, 但各种流体的粘性有很大差异, 常见的空气、水粘性很小, 而蜂蜜、甘油的粘性则很大。

粘性流体运动时, 剪切应力与剪切变形率成正比, 用数学式表示为

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} \quad (1-1)$$

这一方程式称为牛顿粘性定律。式中 τ_{yx} 的下标, 第一个字母 y 表示剪切应力的作用面垂直于 y 轴, 第二个字母表示力的方向。 τ_{yx} 即表示作用在 y 等于常数的平面上沿 x 方向的剪应力。系数 μ 称为动力粘度, 简称粘度。速度

梯度 $\frac{du}{dy}$ 即剪切 (变形) 率。

粘度的单位在 SI 制中是 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 或 $\text{Pa} \cdot \text{s}$, 在 CGS 制中是 $\text{s} \cdot \text{dyne}/\text{cm}^2$, 又称为泊 (P)。1 泊 = 10^2 厘泊 (cP) = $10^{-1} \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 。将泊或厘泊换成 SI 制, 只需将其数值分别乘以 0.1 和 0.001。

粘度 μ 与密度 ρ 之比, $\nu = \mu/\rho$, 称为运动粘度。其单位是 m^2/s , 通常将 cm^2/s 称为斯, 1 斯 = $10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ 。

纯液体的粘度以及液体混合物的粘度参见第一篇有关内容。

粘度与温度有关, 低密度气体的粘度随温度上升而增大, 液体的粘度随温度上升而降低。温度对于某些液体和气体粘度的影响分别示于图 1-1 和图 1-2。

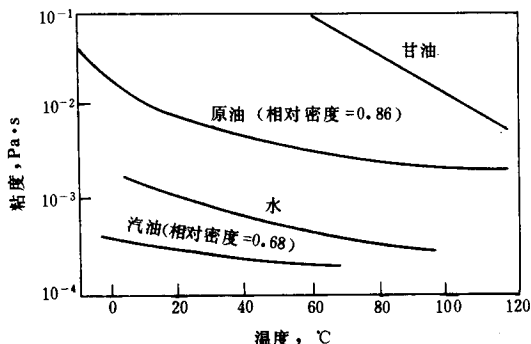


图 1-1 液体的粘度与温度的关系

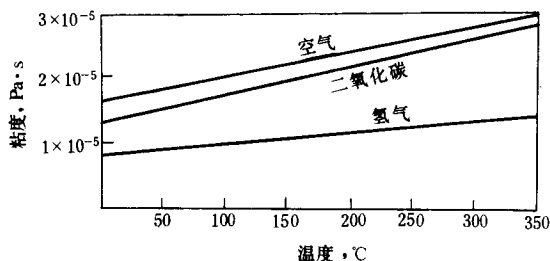


图 1-2 气体的粘度与温度的关系

粘度与温度的关系, 亦可通过近似计算得到。对于气体

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + B}{T + B} \quad (1-2)$$

式中 $B=110.4$, T_0 、 μ_0 为参考温度和参考粘度。

对于水而言

$$\mu = \frac{0.01779}{1 + 0.0368T + 0.00022099T^2} \quad (\text{P}) \quad (1-3)$$

压力对流体粘度的影响一般可以忽略, 除非压力极高。

粘性遵循牛顿粘性定律的流体称为牛顿流体, 不遵循这一规律称为非牛顿流体。

粘度数据的来源, 目前还主要依靠测定。所用仪器

种类繁多, 如毛细管式、转筒式、锥板式、落球式等, 参见 5.4 节。

(2) 压缩性

流体体积或密度随压力变化的性能称为压缩性。一般说, 液体的压缩性很小。例如, 水在温度不变的情况下, 每增加一个大气压, 它的体积仅比原来减小 0.005% 左右。在相当大的压力范围内, 液体密度几乎是常数, 因而可以认为液体是不可压缩的。但在特殊情况下, 如在水中爆炸或水击等问题, 则必须把液体看成是可压缩的。

气体一般视为可压缩的, 但如果压力差较小, 运动速度较小, 并且没有很大的温差, 实际上气体所产生的体积变化也不大。这时, 可以近似地将气体视为不可压缩, 从而气体和液体服从同样的规律。

(3) 表面张力

在气液界面、互不相溶的两种液体界面、甚至某些液固界面 (例如水银与玻璃的界面) 都会出现表面张力。表面张力对流动产生的影响一般很小, 与其它作用力相比通常可以忽略。但在研究毛细现象, 具有自由面的流动以及两相流动如液滴、气泡的形成, 液体射流, 涂布流等问题时^[1], 则必须考虑表面张力作用。

表面张力对运动的影响, 往往通过附加压力、附加表面运动表现出来。曲面两侧的附加压差是

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1-4)$$

式中 R_1 、 R_2 ——曲面的两个主曲率半径;

σ ——液体表面张力。

表面张力与温度、浓度有关。当表面上不同区域的温度或浓度互不相同, 就产生表面张力梯度, 从而引起表面层内液体的运动, 这称之为玛兰哥尼效应^[2]。若这一效应由温度引起, 这又称为热毛细现象^[2]。这些现象在传热、传质研究中有重要意义。

表面张力及其与温度的关系参见第一篇有关章节。

(4) 流体分类

按照所考虑的影响流动的物性, 常将流体分成不同的类型, 或者称之为不同的流体模型。例如是否考虑粘性, 把流体分成理想流体和粘性流体, 与此对应也就有理想流体力学和粘性流体力学。是否考虑压缩性, 将流体分成可压缩和不可压缩。这一分类的依据主要是气体的运动速度。当气流速度 u 与声速 u_s 相比很小, 则气体可近似作为不可压缩流体。 $(u/u_s = Ma)$, 称为马赫数) 至于表面张力, 在考虑其对运动的影响时, 往往属于物理化学流体动力学的内容^[2]。

1.2 流体运动学

1.2.1 流动的分析描述

描述流体运动的方法有两种, 即拉格朗日法和欧拉

法。拉格朗日法着眼于流体质点的位置随时间的变化,了解整个流体运动的情况。为此,需要用某种数学方法区别不同的流体质点。通常取初始时刻流体质点的坐标,即 $t=0$ 时质点的坐标 (a, b, c) , 并称之为拉格朗日坐标。对于某一给定的质点, a, b, c 是确定的常数,在整个运动过程中,它始终表示同一个流体质点。不同的质点则有不同的 a, b, c 值,所以也称为流体坐标。运动的流体质点经历一段时间以后,在任意时刻 t , 到达的新位置 (x, y, z) 可以由标号 (a, b, c) 及时间 t 决定。

$$r = r(a, b, c, t) \quad (1-5)$$

其中 r 为流体质点的矢径,将 (1-5) 对 t 求一阶、两阶偏导数可分别得到流体质点运动的速度和加速度。

欧拉法不跟踪个别流体质点,而注视空间点。考察速度以及其它物理量如压力、密度等,在流体运动的全部空间范围内的分布,以及这种分布随时间的变化。数学式表示为

$$u = u(r, t) \quad (1-6)$$

研究化工中的流动问题,多数使用欧拉法。但在考察扩散之类的问题时也用拉格朗日法。

1.2.2 流动的几何描述

从几何上表示流体的运动,可用轨线或流线。流体

质点位置随时间的变化称为轨线。而所谓流线是这样的曲线,对于某一固定时刻,曲线上任一点的速度方向与曲线在该点的切线方向重合。于是流线上各点的切线方向表示速度的方向,而流线的疏密表示速度的大小(如图 1-3)。

根据流线的定义,流线的微分方程是

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)} \quad (1-7)$$

式中, u_x, u_y, u_z 是速度 u 在 x, y, z 方向上的分量。

轨线和流线是两个具有不同内容和意义的曲线。轨线是同一质点在不同时刻形成的曲线,它与拉格朗日观

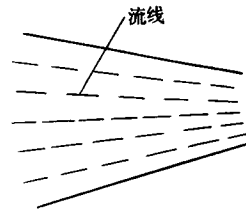
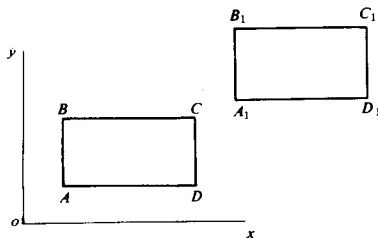
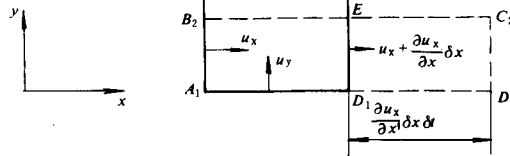


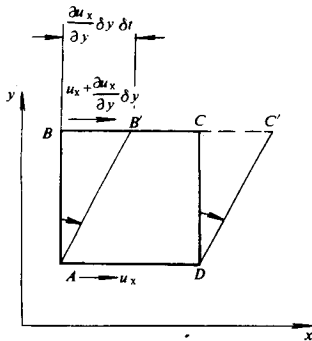
图 1-3 渐缩管中的流线



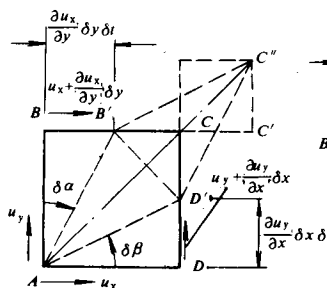
(a) 平移运动



(b) 线变形



(c) 角变形



(d) 旋转运动

图 1-4 流体微团运动的四种基本形式

点相联系;而流线则是同一时刻不同质点所组成的曲线,它与欧拉观点相联系。在非定常运动时,流线和轨线是不重合的;而在定常运动时,则两者重合。

1.2.3 流体微团运动分析

流体微团运动有四种基本形式,参见图 1-4。

平移:流体微团保持其原来的形状、大小和对角线方向,只产生线位移;

线变形:流体微团改变了形状,但各边的夹角不变;

角变形:流体微团形状改变,各边间的夹角改变,但微团对角线未变;

旋转:流体微团保持其原来的形状,对角线的方向产生偏移,发生移动。

流体微团变形和旋转运动特征量的数学表达式是:

线变形率($\dot{\epsilon}$)表示单位时间内长度的改变与原来长度之比,亦称拉伸变形率。

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1-8)$$

角变形率($\dot{\gamma}$)表示单位时间内夹角的平均变化,亦称剪切变形率。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1-9)$$

上述表达式指出,线变形是平行于运动方向的速度梯度引起的,而角变形则是由垂直于运动方向的速度梯度引起的。

表示旋转运动的特征量常用速度的旋度,称为涡量 Ω 。它是旋转角速度 ω 的 2 倍,即

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-10)$$

1.2.4 流体运动的分类

流动的分类可以按不同的标准:以流体与固体的相对关系可分为外流与内流。外流亦称绕流,这是指流体绕过置于无限流体中的物体或物体在无界流体中运动,如空气绕过机翼。内流亦称管流,这是指流体处于固体壁面所限制的空间内流动。还有一类流动,如多孔介质中的运动则属于中间状态。

按运动与时间的关系可分为定常运动与非定常运动。所有描述流动的物理量都不依赖于时间,称为定常

运动。这时物理量对时间的偏导数为零,即 $\frac{\partial (\quad)}{\partial t} = 0$ 。若

$\frac{\partial (\quad)}{\partial t} \neq 0$ 则流动将是非定常的。

以空间为标准,按流场描述所需要空间坐标的数目,流动可分为一维、二维或三维流动。一般说来,流动是三维的,即表征流动的物理量如速度是 (x, y, z) 三个坐标的函数。显然,减少自变量可使问题的研究变得简便。因此,在许多情况下可对问题作不同程度的简化而构成一维、二维流动。在 x, y, z 直角坐标系中,如果确实或近似认为 z 方向的速度分量 $u_z = 0$, $\frac{\partial (\quad)}{\partial z} = 0$,这就是二维流动。对于管道内的流动,应用截面平均流速作为计算的依据,这就构成了一维流动。

1.3 流体运动的守恒原理

1.3.1 控制体和控制面

运用物理学上守恒原理分析流体流动,由于流体本身不能保持其位置和形状,通常只能在流场中选择固定体积的空间即控制体作为考察的对象。控制体的形状和大小可以根据流动情况和边界任意选取,但一经选定,其形状和位置相对于坐标系统就不再改变。控制体所围空间区域的边界面称为控制面,控制面必须是封闭的。

1.3.2 质量守恒

流动的质量衡算式称为连续性方程,是流动的基本方程之一。非定常流动状态下一维流动时质量衡算的表达式是

$$W_1 - W_2 = \frac{dM}{dt} \quad (1-11)$$

式中 W 为质量流量, $W = \rho u A$, ρ 为流体密度, u 为截面平均流速, A 为截面积。 $M = \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx$, $\frac{dM}{dt}$ 为控制体内物质的增量。将 M, W 值代入上式,则有

$$\rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2 = \frac{d \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx}{dt} \quad (1-12)$$

定常流动时,则有

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (1-13)$$

对于不可压缩流体, ρ 为常数,则

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad (1-14)$$

若系统为多组分,以 a_i 表示 i 组分的质量分数,即

$a_i = \frac{W_i}{W}$, 则对 i 组分有

$$W_1 a_{11} - W_2 a_{12} = \frac{dM_1}{dt} \quad (1-15)$$

对于 n 个组分的系统, 式 (1-15) 可给出 $n-1$ 个方程, 另加一个是总的质量守恒方程。

1.3.3 能量守恒

(1) 流动系统的机械能衡算

在流体流动系统中, 如果没有加热和冷却, 忽略粘性, 流体的密度或比容不变, 是不可压缩流体, 对这种系统进行能量衡算, 只需进行机械能衡算。满足上述条件, 且无外功加入的流动系统中, 可能发生变化的机械能是: 位能、静压能和动能。定常流动时, 对于图 1-5 所示系统, 输入流体的质量流量为 W_1 , 位置高度为 z_1 , 静压力为 p_1 , 截面上的均匀流速为 u_1 ; 输出流体的质量流量为 W_2 , 位置高度为 z_2 , 静压力为 p_2 , 均匀流速为 u_2 。输入和输出的总机械能相等, 则

$$W_1 g z_1 + W_1 \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} W_1 u_1^2 = W_2 g z_2 + W_2 \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} W_2 u_2^2 \quad (1-16)$$

按连续性方程, $W_1 = W_2$, 上式可以改写为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (1-17)$$

上式称为伯努利方程。它适用于不可压缩的理想流体作定常流动而无外功输入的情况。

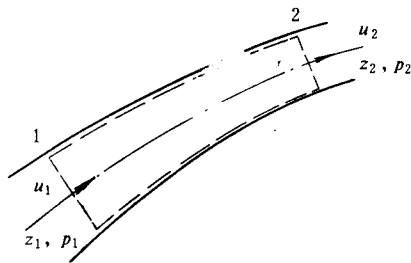


图 1-5 流动系统的机械能衡算

(2) 粘性流体的机械能衡算

对粘性流体进行机械能衡算, 前述方程需作两方面的修正, 一是粘性摩擦造成机械能损耗; 二是粘性流体在管内流动时, 截面上速度不均匀, 因而截面上各点动能不再相等, 近壁处动能小, 而中心处动能大, 必须采用该截面上的平均动能。由于

$$\frac{\bar{u}^2}{2} \neq \overline{\frac{u^2}{2}}$$

即速度平方的平均值并不等于平均速度的平方。因此, 应

用平均速度进行动能计算时, 需要校正。

这样, 校正后的粘性流体机械能衡算式成为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 u_2^2}{2g} + h_f \quad (1-18)$$

式中, h_f 为单位质量流体的平均机械能损耗; α_1 、 α_2 为动能校正系数, 管流层流 $\alpha=2$, 湍流时 $\alpha=1.05$ 。

(3) 可压缩流体的机械能衡算

当气体的压缩性不能忽略时, 其密度将随压力而变。此时对一维管流作机械能衡算时, 如不考虑粘性, 则应写为

$$g z_1 + \frac{u_1^2}{2} = g z_2 + \frac{u_2^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad (1-19)$$

对于可逆等温过程, $\frac{p}{\rho} = \text{常数}$, $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_2}{p_1}$

对于可逆绝热过程, $p \rho^\gamma = \text{常数}$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (1-20)$$

式中 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, 即定压比热与定容比热之比, 称为绝热指数。

(4) 伯努利方程的应用

伯努利方程说明流动过程中不同形式能量之间的转换。在工程计算中经常用于确定流动参数之间的相互关系。也是流量测量的基本原理。

(4.1) 重力射流, 位能和动能的相互转换 如图 1-6 所示, 容器下部有一相距液面为 h 的小孔, 液面处受大气压 p_a 的作用, B 处液体成自由射流由小孔流出, 该处压力也为大气压。器底至小孔的中心距离为 z_B 。

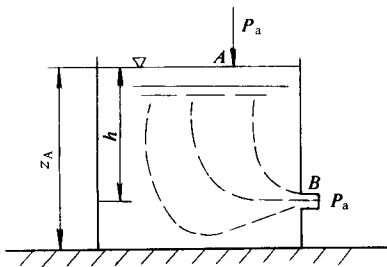


图 1-6 重力射流

设截面 A 处的速度为 u_A , B 处速度为 u_B ; z_A 、 z_B 分别为 A 、 B 面的高度; 如果忽略小孔处流动不均匀的影响, 则根据伯努利方程

$$g z_A + \frac{p_a}{\rho} + \frac{u_A^2}{2} = g z_B + \frac{p_a}{\rho} + \frac{u_B^2}{2} \quad (1-21)$$

如果容器截面积为 A_1 , 小孔截面积为 A_0 , 则根据连

续方程应有 $A_1 u_A = A_0 u_B$, 或 $\frac{u_A}{u_B} = \frac{A_0}{A_1}$ 。由于 $A_1 \gg A_0$, 因此, $u_A \ll u_B$, 与 $\frac{u_B^2}{2}$ 相比, $\frac{u_A^2}{2}$ 可以忽略, 于是

$$u_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \quad (1-22)$$

此例表明, 按已知的位差可以计算流体流动所能达到的速度, 反之, 可按需要的流速, 决定应该给予的位差。

(4.2) 压力射流, 压力能与动能的相互转换 如图 1-7 所示, 容器中的压力 p_1 大于大气压 p_a , 气体在 p_1 作用下从小孔流出, 速度为 u , 设 p_1 保持恒定。应用伯努利方程可得

$$u = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_a}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (1-23)$$

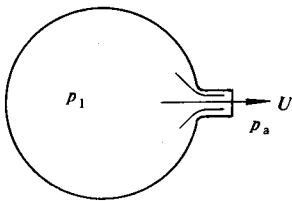


图 1-7 压力射流

显然, 此式只适用于 Δp 较小, 流体可作为不可压缩处理的情况。利用式 (1-23) 可以估计气体作为不可压缩流体处理时的极限速度。当然其值大小与许可的误差有关。假如许可 $\Delta p/\rho = 0.01$, 从关系式 $p v^\gamma = \text{常数}$ 或 $p = \text{常数} \times \rho^\gamma$, 可得 $\Delta p = \gamma p \frac{\Delta p}{\rho}$ 。p 是标准大气压, $\gamma = 1.4$, 于是

$\Delta p \approx 1.4 \times 1.0133 \times 10^5 \times 0.01 = 1418.6 \text{ N/m}^2$, 取 ρ 的平均值为 1.226 kg/m^3 , 则得

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \approx 48.1 \text{ m/s}$$

如果许可密度变化 10%, 则许可的极限速度增大 $\sqrt{10}$ 倍, 即为 152.1 m/s 。

(4.3) 驻点压力, 动能与压力能的相互转换 如图 1-8 所示, 流体以 u_∞ 速度流动, 如在此均匀流场里放置一个障碍物, 则紧靠物体前缘的流体将受到阻碍而向各个方向分散并绕过物体。在受阻区域的中心点 s, 流体被滞止, 该处的速度为零, 此点称为驻点。设未受扰动流体的势能为 p_0/ρ , 驻点处的势能为 p_s/ρ , 按伯努利方程, 则

$$p_s/\rho + 0 = p_0/\rho + \frac{U_\infty^2}{2}$$

$$\text{于是} \quad p_s = p_0 + \frac{\rho U_\infty^2}{2} \quad (1-24)$$

显然, p_s 大于 p_0 , 两者的差值为 $\frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ 。 p_s 为驻点压力, 亦称冲压压力。

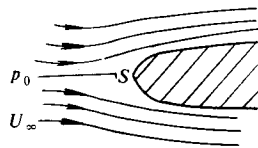


图 1-8 驻点压力

基于这一关系式, 可设计测速装置 (毕托管), 它的示意图如图 1-9, 改写上式可得

$$u_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}} \quad (1-25)$$

$$\text{或} \quad u_A = \sqrt{\frac{2R(\rho_1 - \rho)g}{\rho}} \quad (1-26)$$

式中 ρ_1 —— U 形压差计中指示液的密度;

ρ —— 管中流体密度;

R —— U 形压差计读数。

不难看出, 毕托管测定的是点速度。利用毕托管可以测得沿截面的速度分布。

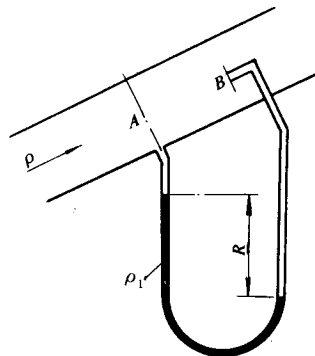


图 1-9 毕托管测速示意图

为进一步阐述伯努力方程的应用, 下面再举两个实例。

例 1-1 文丘里管测定气体流量 文丘里管为一根渐缩渐扩管, 可用于测量流量。图示 I、II 处的速度分别为 u_1 、 u_2 , 横截面积分别为 A_1 、 A_2 , 压力分别为 p_1 、 p_2 , 试求截面 I 处的流体速度 u_1 与 p_1 、 p_2 的关系。

假定自管的入口到最小截面的区域内气体按绝热定律变化。

解: 气体绝热膨胀下的伯努利方程为

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$$

连续性方程

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

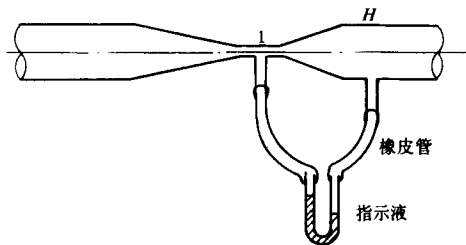
由以上两式可求得

$$u_1^2 = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}{\left(\frac{p_1}{\rho_2} \right)^2 \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}$$

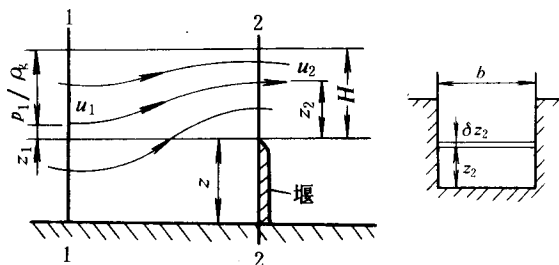
因为 $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma$, 故

$$u_1^2 = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}{\left(\frac{p_1}{\rho_2} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}$$

因此, 已知 p_1 、 p_2 、 ρ_1 , 即可推知速度



例 1-1 附图



例 1-2 附图

例 1-2 堰顶溢流 在水流中设置的障碍壁, 称为堰。水流从堰顶溢流而过, 出现水面降落, 这类现象就是堰顶溢流 (如附图)。溢流现象颇为复杂, 现作如下简化假定:

1) 上游流动均匀, 压力服从静力学方程

$$p = \rho gh;$$

2) 自由面保持水平, 直至堰壁。水流质点水平地通过堰顶, 与堰平面垂直;

3) 堰顶水流的压力为大气压;

设堰顶宽为 b , 试求堰顶溢流的流量 Q 与堰上游液流高度 H 之间的关系。

解: 在所给假定的基础上, 水流视为理想流体流动, 于 1-1、2-2 截面任选一根流线, 列出伯努利方程

$$H + \frac{u_1^2}{2g} = 0 + \frac{u_2^2}{2g} + z_2 \quad (1)$$

其中 H 是自由面的高度, $H = \frac{p_1}{\rho g} + z_1$

$$\text{由式①得} \quad u_2 = \left[2g \left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g} \right) \right]^{1/2} \quad (2)$$

上式表明, u_2 随 z_2 变化, 水流通过深度为 δz_2 的截面的流量为 $u_2 b \delta z_2$, 所以总流量

$$\begin{aligned} Q &= b \int_0^H u_2 dz_2 = b \sqrt{2g} \int_0^H \left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g} \right)^{1/2} dz_2 \\ &= -\frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right]_0^H \\ &= \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{u_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{u_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

由于 u_1 决定于 Q , 因此需要用试差法求解上式。因 $\frac{u_1^2}{2g}$ 与 H 相比很小, 为计算方便, 可以忽略, 得

$$Q \approx \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (4)$$

为了使在简化条件下所得的计算结果, 更好地与实际相符, 必须引进流量系数 C_b , 以修正忽略水流收缩、粘性等因素所产生的偏差, 通常 $C_b \approx 0.6$ 。

在化工设备板式塔中, 常用堰顶溢流。已知过堰的液流量, 就可计算堰上的液层高度, 并确定塔板的液层阻力。改写式④则可得到所需地计算公式

$$H = C_w \left(\frac{Q}{b} \right)^{2/3} \quad (1-27)$$

C_w 是由实验确定的系数。

1.3.4 动量守恒

在流动系统中动量守恒原理一般表达为: 作用在控制体上所有外力的总和等于流体通过控制体的动量变化率。由于动量是矢量, 故计算中通常应用投影方程。对于图 1-10 所示的非均匀管段, x 方向的动量守恒式为

$$\begin{aligned}
 p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_x + \int_{x_1}^{x_2} \rho g A \cos \alpha dx \\
 = (\rho_2 A_2 u_2) u_2 - (\rho_1 A_1 u_1) u_1 + \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u A dx
 \end{aligned}
 \quad (1-28)$$

式中 A_1 、 u_1 、 p_1 及 A_2 、 u_2 、 p_2 分别为截面 1-1 及 2-2 的面积、流速、压力。 F_x 为管壁对流体作用力总和的 x 方向分量， α 为 x 轴与重力的夹角。

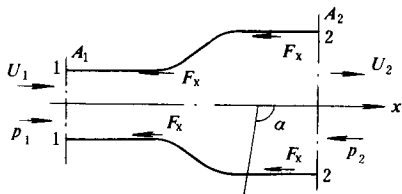


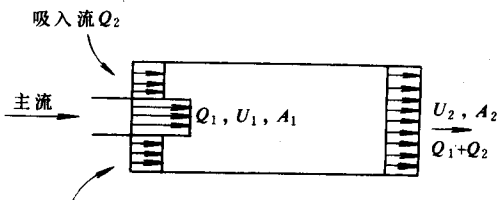
图 1-10 动量守恒

定常流动时，等式右端最后一项为零。

动量守恒定律的应用

动量守恒定律和机械能守恒定律，都是考察流体流动时必须遵循的规律。应用机械能守恒定律时，机械能的损耗通常认为很小，可以忽略；或者采用其它方法进行估算，否则机械能衡算式中将出现未知的 h_f 项。对于动量守恒定律来讲，则不涉及是否存在能耗的问题，它只是将力和动量变化率联系起来。因此当无法确定机械能损耗，而不能有效地应用机械能衡算时，可以应用动量守恒定律来确定流体流动中各运动参数之间的变化关系。但是应用动量守恒定律也有其前提，即必须确定边界上的作用力。

例 1-3 射流吸入 设空气以速度 u_1 ，自截面积为 A_1 的喷嘴喷出，其体积流量为 Q_1 。该射流进入截面积为 A_2 的导管，见附图。假设射流喷嘴截面及管截面上的速度 u_1 和 u_2 都是均匀的。射流将“吸入”周围的空气，两者在导管内混合，经数倍于导管直径的距离后，速度趋向均匀。应用动量守恒定律，可计算射流吸入的体积流量 Q_2 。在这种流动中，由于射流的突然扩大和吸入气体间的激烈混合，必有机械能损耗，因此难以有效地使用能量守恒方程。



例 1-3 附图

设导管两端敞开，因而压力均为大气压，并作如下简化假定：(1) F_x 很小，可以忽略，于是外力和为零；(2) 吸入气体的动量远小于射流的动量，也可忽略。因此，定常流动时的动量守恒定律成为

$$\rho Q_1 u_1 = \rho (Q_1 + Q_2) u_2$$

或

$$\rho u_1^2 A_1 = \rho u_2^2 A_2 \quad (1-29)$$

由式 (1-28) 得

$$u_2 \frac{Q_2}{Q_1} = u_1 - u_2 \quad \text{即} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{u_1}{u_2} - 1$$

改写式 1-29

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$$

从而得到吸入比 Q_2/Q_1 为

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} - 1 \quad (1-30)$$

式 (1-30) 提供了射流吸入比的估算式。如果忽略混合时的能量损失，从机械能衡算式也可以导出一个吸入比的计算式。但实验证明，式 (1-30) 更接近于实际。

式 (1-30) 表明， A_2 增大，吸入比将随之增大，但也有个限度，因为在推导时假设导管出口处流速均匀。如 A_2 过大，此前提将不再成立。

1.4 流体运动微分方程

1.4.1 连续性微分方程

在直角坐标系中，立方微元体质量衡算得到的连续性微分方程为

$$\begin{aligned}
 \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \\
 &= -\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \quad (1-31)$$

当流体不可压缩，密度 ρ 为常数， $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ，上式成为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1-32)$$

这是最常用的连续性方程的形式。

对于二维运动，连续性方程式为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (1-33)$$

二维运动，存在流函数 ψ 。它与速度分量的关系是

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

引入流函数，连续性方程 (1-33) 将自动满足。

1.4.2 理想流体运动微分方程

在直角坐标系中, 理想流体在三个坐标轴方向的运动微分方程是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-34)$$

这组方程亦称欧拉方程。式中 X 、 Y 、 Z 是体积力在坐标轴方向上的分量。假设流体不可压缩, 且 $\rho = \text{const}$, 作定常运动, 体积力有势, 欧拉方程沿流线积分可得伯努利方程。

对于静止流体, 方程 (1-34) 中速度分量为零, 给出流体平衡微分方程将其积分, 可得静力学基本方程

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (1-35)$$

或 $p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2) = p_1 + \rho gh$

上述方程适用于重力场中处于平衡状态下的不可压缩流体。表明静压力仅取决于垂直位置, 而与水平位置无关。

1.4.3 粘性流体运动方程——应力形式

以应力表示的粘性流体的运动微分方程, 在直角坐标中可表达为

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du_x}{Dt} &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho x \\ \rho \frac{Du_y}{Dt} &= \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho y \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} &= \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho z\end{aligned}\quad (1-36)$$

这组方程对任何粘性液体, 任何运动状态都是适用的, 但方程数与未知量之数不相等。为使这组方程在原则上成为可解, 必须进一步考虑应力和应变率之间的关系, 即本构方程, 补足所需关系。

1.4.4 奈维-斯托克斯方程

对层流流动的牛顿流体, 剪应力与剪切速率间的关系是

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1-37)$$

法向应力与线变形速率之间的关系是

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-38)$$

将这些关系式代入式 (1-36), 可得粘性流体的运动微分方程

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du_x}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho X \\ \rho \frac{Du_y}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho Y \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho Z\end{aligned}\quad (1-39)$$

这组方程称为奈维-斯托克斯方程, 是牛顿第二定律在粘性流体层流运动时的具体表达形式。

1.5 奈维-斯托克斯方程的解

粘性流体运动方程组中有四个未知数 (三个速度分量 u_x 、 u_y 、 u_z 及压力 p), 它们是独立变数 x 、 y 、 z 、 t 以及一些参数如 ρ 、 μ 、 g 等的函数。假设 ρ 、 μ 为常数, 体积力仅有重力, 则四个未知数有四个方程 (三个运动方程和一个连续性方程)。原则上说问题是可解。但由于这组方程中包含未知量的乘积, 如 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ 等, 方程是非线性的, 求它的一般解在数学上有极大的困难, 只能在某些特定情况下求解。

求解运动方程有三种方法: 准确解、近似解和数值解。

1.5.1 准确解

运动方程建立 150 多年以来, 已得到约 80 个准确解^[3]。从求解情况看, 绝大多数是忽略变位加速度的非线性项而求得的线性解。涉及的流动类型及流场几何形状, 有库特流 (定常及非定常)、管流、驻点流、旋转流以及具有移动边界的流动, 边界上的吸入流等。

求解奈维-斯托克斯方程, 可得速度分布和流量与压强关系, 部分结果见表 1-1。

1.5.2 近似解

为扩大基本方程的可解范围, 解决更多的工程实际

表 1-1 层流流动时的速度分布和流量与压降的关系

类 型	速度分布	流量与压降的关系
圆管	$u_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (R^2 - r^2)$	$Q = \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) R^4$
平行平板	$u_x = \frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 - y^2/h^2)$	$Q = \frac{2h^3}{3\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \cdot B$
圆心圆管环隙	$u_x = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \times \left[a^2 - r^2 + (a^2 - b^2) \frac{\ln(a/r)}{\ln(b/a)} \right]$	$Q = \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln(a/b)} \right]$
椭圆管	$u_x = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$	$Q = \frac{\pi}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
等边三角形管道	$u_x = \frac{\Delta p/L}{2\sqrt{3}a\mu} \times \left(z - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) (3y^2 - z^2)$	$Q = \frac{a^4\sqrt{3}}{320\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)$
矩形管	$u_x = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \times \left[1 - \frac{\cosh(\frac{i\pi z}{2a})}{\cosh(\frac{i\pi b}{2a})} \right]$	$Q = \frac{4ba^3}{3\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \times \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \times \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(\frac{i\pi b}{2a})}{i^5} \right]$

问题，发展了许多近似解法。依照雷诺数的大小，有极慢运动近似（ $Re \leq 1$ ）和边界层近似（ $Re \gg 1$ ）。此外还有摄动法、润滑近似、准定常近似等。

绕球极慢流动近似解所得主要结果为

速度分布： $u_r = U \cos\theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$ (1-40)

$u_\theta = U \sin\theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$ (1-41)

压力分布： $p = -\frac{3}{2} \mu \frac{Ua}{r^2} \cos\theta + p_0$ (1-42)

斯托克斯阻力公式

$F_D = 6\pi\mu aU$ (1-43)

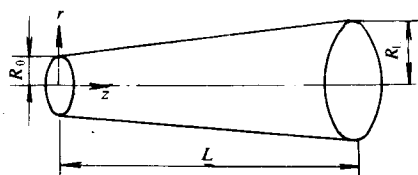
式中 F_D 为总曳力， a 为球的半径， U 为来流速度， p_0 为来源压力。上式适用于 $Re = \frac{aU\rho}{\mu} < 1$ 的情况，是低雷诺数下曳力与速度的关系式。

例 1-4 微斜锥形管中的压降—润滑近似 图示微斜锥形管，试由 Poiseuille 方程推出压降与流量的关系。

解：轴向距离 z 处的管半径为

$R(z) = R_0 + \frac{(R_L - R_0)}{L} z$ (a)

由于坡度很小，假定润滑近似可以适用，将非平行



例 1-4 附图

表面之间的流动近似看作流过平行表面的流动。这样，Poiseuille 方程可以适用；但由于 $R(z)$ 不断变化，需以 $\frac{dp}{dz}$ 代替 $\Delta p/L$ 。于是

$$Q = \frac{\pi R_{(z)}^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) \quad (b)$$

微分式 (a)，以 dR 代替 dz ，代入上式得

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{R_L - R_0}{L} \right)$$

移项积分得

$$Q = \frac{3\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \times \frac{R_0 - R_L}{R_L^{-3} - R_0^{-3}} \quad (c)$$

$$\text{或 } Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} R_0^4 \left[1 - \frac{(R_L/R_0)^2 - 3(R_L/R_0)^3}{1 + (R_L/R_0) + (R_L/R_0)^2} \right] \quad (d)$$

此式表示，将 Poiseuille 方程乘一校正系数（上式中的方括号部分）即得微维形管的流量公式。

1.5.3 数值解

粘性流体运动方程的数值解法主要是有限差分法和有限元法。有关这方面的进一步介绍可参见文献 [4]。

1.6 边界层理论

1.6.1 边界层概念，平面上的边界层

空气、水等低粘度流体与物体表面接触并有相对运动时，在高雷诺数下，壁面附近的流动可近似地分成两个区域：(1) 靠近表面的薄层，被 Prandtl 称为边界层，其中法向速度梯度很大。描述流体运动必须用奈维-斯托克斯方程，即使粘度很低，粘性力与惯性力相比有同样量级；(2) 离开表面较远的区域，速度梯度近似为零，粘性影响可以忽略，流体运动服从欧拉方程。沿平板上的边界层见图 1-11。

(1) 边界层中的流动状态

随 Re 数的增大，边界层中的流动状态从层流转变为湍流。对于平板上的边界层，由层流转变为湍流的临界雷诺数为

$$Re_x = \frac{xU_0}{\nu} = 5 \times 10^5 \sim 2 \times 10^6 \quad (1-44)$$

式中 x 为离开前缘的距离， U_0 为来流速度。

(2) 边界厚度 δ

沿表面的外法线方向，流体运动速度从零逐渐增加，在垂直距离 δ 处，流速接近于来流速度 ($u_x = 0.99U_0$)，此 δ 称为边界层厚度。其值可由测量或计算得到。

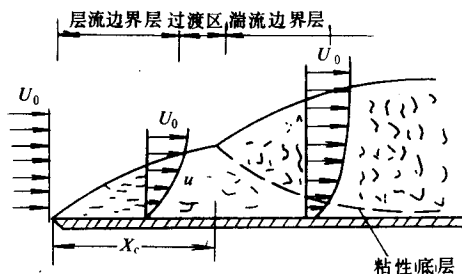


图 1-11 平板上的边界层

(3) 边界层微分方程

从二维奈维-斯托克斯方程出发，经量级比较，Prandtl 导出平板上的边界层方程为

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

(4) 边界层动量积分关系式

卡门导出的边界层动量积分关系式为

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} [u_x (U - u_x)] dy + \frac{dv}{dx} \int_0^\delta (U - u_x) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1-46)$$

由上述微分方程式积分关系式可计算或近似计算出边界层中的速度分布、剪应力及边界层厚度。平板上层流边界层厚度为

$$\delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (1-47)$$

壁附近速度分布可近似地写为

$$\left. \begin{aligned} u_x &\doteq \frac{Uy}{\delta} \\ u_y &\doteq \frac{\nu y^2}{\delta^3} \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

1.6.2 曲面上的边界层、边界层分离

沿流动方向，通道截面积发生变化（收缩或扩张），则外流的速度和压力沿流动方向均会发生变化，这对边界层中的流动有显著影响。如果外流减速，压力沿流动方向增大，出现逆压力梯度。当逆压力梯度足够大时，近物体表面的流体在逆压力梯度作用下会停止前进，甚至向上游返回。随着回流迅速地向外扩展，边界层越来越远地被推离物体表面，与壁面脱离形成旋涡，这就是边

界层分离现象。如图 1-12。

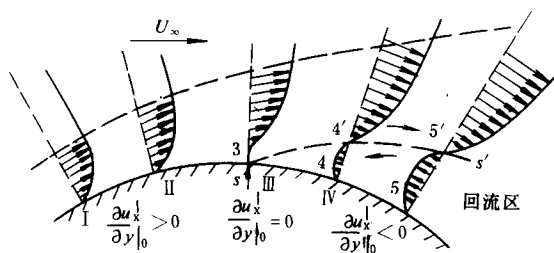


图 1-12 曲线上的边界层

柱体绕流时,层流分离点在 $\theta=81^\circ$ (从前驻点算起), 湍流分离点在 $\theta=130^\circ$, 见图 1-13。

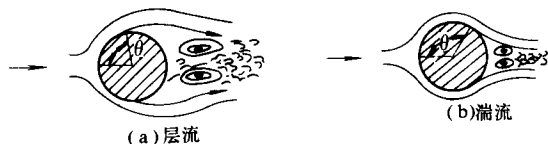


图 1-13 绕柱体流动时的分离点

边界层分离的若干实例示于图 1-14。

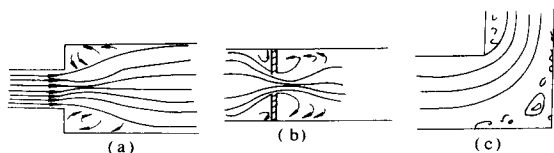


图 1-14 管道流动中的几种边界层分离现象

(a) 流动截面突然扩大; (b) 通道中有障碍物;
(c) 绕尖角的流动

例 1-5 层流边界层的近似计算 不可压缩流体绕长度为 L 的平板运动, 来流速度为 U , 试求边界层厚度 δ 随距离 x 的变化规律。

解: 设速度 u_x 可用 y 三次方的多项式表示

$$u_x = a + by + cy^2 + dy^3$$

式中 a, b, c, d 为待定系数, 由边界条件决定。

边界条件是: $y=0$ (固体表面) 处, $u_x=0$

$$y=\delta \text{ (边界层外缘)}, u_x=U; \tau=\mu \frac{du_x}{dy}=0$$

则有

$$\frac{du_x}{dy}=0$$

在固体壁面上, $u_x=u_y=0$, 由式 (1-45) 得

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

由于 $dp/dx=0$, 所以 $\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$, 由这四个边界条件可

决定 4 个系数为: $a=0; b=\frac{3}{2} \frac{U}{\delta}; c=0; d=-\frac{U}{2\delta^3}$

$$\text{由此得速度分布为 } u_x = \frac{U}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right) \quad (a)$$

$$\text{由牛顿粘性定律 } \tau_w = \mu \left(\frac{du_x}{dy} \right)_{y=0}$$

$$\text{将 (a) 式微分代入上式得 } \tau_w = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta} \quad (b)$$

对平板, $U \frac{dU}{dx} = 0$, 边界层动量积分关系式 (1-46) 可写成

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) = \tau_w / \rho \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \theta &= \int_0^\delta \frac{u_x}{U} \left(1 - \frac{u_x}{U} \right) dy \\ &= \int_0^\delta \frac{1}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right) \left[1 - \frac{1}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right) \right] dy \\ &= \frac{39}{280} \delta \end{aligned}$$

代入 (c) 式并积分得

$$\frac{13}{280} \rho U \delta^2 = \mu x + c$$

因为当 $x=0$ 时, $\delta=0$, 所以 $c=0$, 于是得

$$\delta = 4.64 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (d)$$

1.6.3 传热和传质边界层

流动边界层的概念推广到温度场, 可导出传热边界层。推广到浓度场, 可导出传质边界层。

(1) 传热边界层

当流体流过与其温度不同的固体表面时, 因存在温度差而传热。无论加热还是冷却, 温度变化主要发生在壁面附近的薄层中。薄层之外温度几乎是均匀的。薄层中温度梯度较大, 因而分子的导热的作用不可忽略, 这和沿壁面流动必须考虑壁面附近分子粘性的情况类似的。传热中具有上述特点的边界附近的薄层称为传热边界层或温度边界层 (图 1-15)。

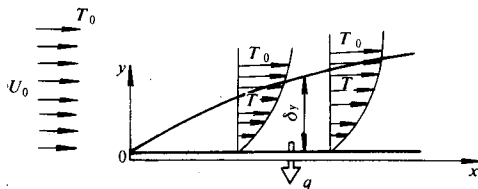


图 1-15 传热边界层