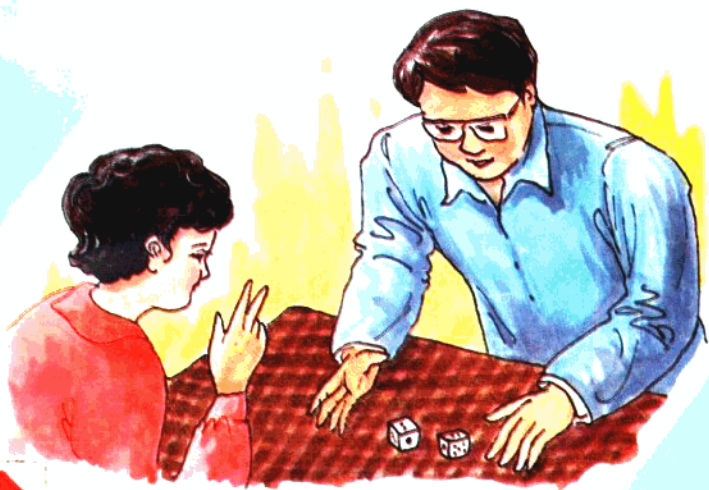


数学故事丛书

偶然中的必然



一 概率的故事

上海科学普及出版社

偶然中的必然

· 概率的故事 ·

张 远 南

上海科学普及出版社

071029

内 容 提 要

本书系数学故事丛书中的一册。全书用24篇生动有趣的小故事叙述概率计算、随机现象等概率论的基本知识，寓数学知识于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

序

自然界的现象大致可分两类，一类是确定性现象，另一类是随机现象。

从表面看，对随机现象的每一次观察，结果总是偶然的、不可预知的。但多次观察一个随机现象，便能从中发现规律。正如常见的掷币游戏那样，多次投掷一枚硬币，出现国徽的可能性大约占一半左右。这是一种寓于偶然中的必然。

概率论的历史，可以追溯到相当久远的年代。第一篇研究概率的论文，发表于公元1657年，距今已有三个多世纪。三百多年来，在几代人的努力下，概率论已经发展成为一门完善的理论，内容丰富，应用广泛，色彩绚丽的学科。

这本书没有打算、也不可能对概率的理论作完整和连贯的叙述，那是教科书的任务。本书的目标，只是想激发读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这门学科的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身，往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，深感普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现知识传递方面的突破。本书则是一种尝试。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的数学读物，它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象

中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等有趣的故事。作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们应该是衡量本书最为精确的天平。

由于作者水平有限，书中的缺点错误在所难免，敬请读者不吝指出。

但愿本书能作引玉之砖，抛临人间！

张远南

1987年4月

目 录

一、神奇的功勋·····	(1)
二、从死亡线上生还的人·····	(4)
三、偶然中的必然·····	(8)
四、威廉·向克斯的憾事·····	(11)
五、勒格让先生的破译术·····	(15)
六、布丰的投针试验·····	(20)
七、一场关于投掷的争论·····	(24)
八、求 π 的“魔法”·····	(28)
九、“臭皮匠”与“诸葛亮”·····	(31)
十、机会均等与妙算概率·····	(35)
十一、分取赌金的风波·····	(40)
十二、五个生日相同的兄弟姐妹·····	(43)
十三、一个关于抽签顺序的谜·····	(46)
十四、贝特兰的概率悖论·····	(51)
十五、以蒙特卡洛命名的方法·····	(55)
十六、关于《血疑》的质疑·····	(59)
十七、小概率·摸彩·储蓄·····	(63)
十八、布朗运动和醉鬼走路·····	(68)
十九、从《歧路亡羊》谈起·····	(72)
二十、选择题与评分和科学反扣·····	(77)
二十一、不模糊的模糊数学·····	(82)
二十二、从齐王赛马到俾斯麦海海战·····	(87)

二十三、“矮高”和“高矮”谁高的启示·····	(91)
二十四、可以作为前言的结束语·····	(95)

一、神奇的功勋

北宋天历、皇佑年间，广源州蛮族首领侬智高在南部不断扩展势力，建立“南天国”政权。公元1052年4月，侬起兵反宋。5月陷邕州（即今南宁），自立“仁惠皇帝”，又自邕州沿江而下，所向皆捷，朝野震动。

公元1053年，大将狄青奉旨征讨侬智高。因为当时南方有崇拜鬼神的风俗，所以大军刚到桂林以南，他便设坛拜神说：“这次用兵，胜败还没有把握。”于是拿了一百枚铜币向神许愿，说是：“如果这次出征能够打败敌人，那么把这些铜币扔在地上，钱面（不铸文字的那一面）定然会全部朝上。”

左右官员诚惶诚恐，力劝主帅放弃这个念头，因为经验告诉他们这种尝试是注定要失败的。他们担心最终弄不好，反而会动摇部队的士气。

可是狄青对此概然不理，固执如牛。在千万人的注视下，他突然举手一挥，把铜币全部扔到地上。结果这一百个铜币的面，竟然鬼使神差般全部朝上。这时，全军欢呼，声音响彻山村和原野。

狄青本人也兴奋异常，命令左右，取来一百枚钉子，依照铜钱落地的疏密，用钉子牢牢地钉在地上，向天祈祷道：“等到凯旋归来，定将酬谢神灵，收回铜钱。”

由于士兵个个认定神灵护佑，战斗中奋勇争先。于是，狄青迅速平定了邕州。

回师时，按原先所约，把钱取回。他的僚属们一看，原

来那些铜币两面都是铸成一样的。

狄青由于神奇的功勋而升了官。依智高败逃大理，不知所终。历史的一页，就这么轻轻地翻了过去。从那时起，时间的长河又把人类的文明史，向前推进了近千年。大江东去，浪淘尽，千古风流人物。然而，狄青的奇功，却以其独有的光彩，给人世间留下了永恒的启迪。要领略这一层道理，还得从下面的常识谈起。



大千世界，所遇到的现象不外乎两类。一类是确定性现象，另一类是随机遇而发生的不确定现象。这类不确定现象叫做随机现象。

如在标准大气压下，水加热到 100°C 时沸腾，是确定会发生的现象。用石蛋孵出小鸡，是确定不可能发生的现象。而人类家庭的生男育女，适当条件下的种子发芽等等，则是随机现象。

我们生活着的世界，充满着不确定性。人们虽然能够精确地预卜尚未发生的确定现象的必然事件，却难于预卜尚未发生随机现象的随机事件。我们人类就生活在这种随机事件的海洋里。

现在回到故事的主人公上来。

身为大将军的狄青何尝不知道：掷一枚铜钱，出现正、反面是随机的。掷两枚铜币会出现四种可能：

(正, 正)、(正, 反)、(反, 正)、(反, 反),
掷三枚铜币会出现八种可能:

(正, 正, 正)、(正, 正, 反)、(正, 反, 正)、
(正, 反, 反)、(反, 正, 正)、(反, 正, 反)、(反,
反, 正)、(反, 反, 反)。

以后每多掷一枚铜钱, 各种正反
的配合种数便增多一倍。因此, 掷一
百枚铜币出现某种特定情况(如钱面
全部朝上)的希望是极为渺茫的。这应当是人所共知的经
验。狄青的僚属正由于深知这一点, 才力劝主帅放弃这种尝
试的。广大的士兵出于对鬼神的崇拜、经验的启示、和对主
帅的神秘感, 则疑信参半, 拭目以待。



聪明的狄青, 注意到人们在观察随机现象时, 往往过于
相信自身的经验, 而忽视了前提条件。因此, 他用偷梁换柱
的办法, 巧妙地更换了“铜币有正反两面”的前提, 把铜币
两面铸成一样。这时, 对狄青来说, 一百个钱面全部朝上,
原本是个必然事件, 但在别人看来, 却是几乎不可能出现
的。然而, 这件事居然奇迹般发生了! 那时那刻, 在众人的
心目中, 兴奋战胜了怀疑。他们觉得, 神灵的护佑是这种超
乎寻常巧合的唯一解释。于是, 一种对科学的愚弄, 竟然激
发起千军万马的勇气, 使狄青赢得了战争的胜利。

这个故事给人的启示是: “观察一种现象, 不能忽视它
的前提。”

二、从死亡线上生还的人

在《神奇的功勋》的故事中我们看到，在一种前提下的随机事件，在另一种前提下可能成为必然事件。同样地，在一种前提下的必然事件，在另一种前提下也可能不出现。下面两则“从死亡线上生还”的故事，生动地说明了这一点。

第一个从死亡线上生还的故事。

传说古代有一位阴险狡诈、残暴凶狠的国王。有一次他抓到一个反对者，决意要将他处死。虽说国王心中早已打定主意，然而嘴上却假惺惺地说：“让上帝的旨意决定这个可怜人的命运吧！我允许他在临刑前说一句话。如果他讲的是真话，那么他将受刀斩；如果他讲的是假话，那么他将被绞死；只有他的话使我缄默不言，那才是上帝的旨意让我赦免他。”

在这番冠冕堂皇话语的背后，国王的如意算盘是：尽管话是由你讲的，但判定真话、假话的权在我，该绞该斩还不是凭我的一句话！



的确，如果判断的前提只凭国王孤立的一句话，那么这位反对者是必死无疑的了。然而愚蠢的国王无论如何没有料到，要是判断真话或假话的前提是指自己所说话的意思，那么情况将完全变了样。聪明的囚犯正是利用这一点，使自己获释的。

亲爱的读者，你猜得到国王的反对者说了一句什么样的话吗？可能你已经猜到了，也可能你还在思考。好！让我告诉你，犯人所说的话是：“我将被绞死。”

对这句话国王能怎么判断呢？如果他断言这句话是“真话”，那么此时按规定犯人应当处斩，然而犯人说的是自己“将被绞死”，因而显然不能算为“真话”。又若国王判定此话为“假话”，那么按说假话的规定，犯人将受绞刑，但犯人恰恰就是说自己“将被绞死”，这岂不表明他的话是真的吗？可见也不能断为假话。

由于国王无法自圆其说，为了顾全自个儿的面子，只好让犯人得到自由。

第二个从死亡线上生还的故事。

相传古代有个王国，由于崇尚迷信，世代沿袭着一条奇特的法规：凡是死囚，在临刑前都要抽一次“生死签”。即在两张小纸片上分别写着“生”和“死”的字样，由执法官监督，让犯人当众抽签。如果抽到“死”字的签，则立即处刑；如果抽到“活”字的签，则被认为这是神的旨意，应予当场赦免。

有一次国王决定处死一名大臣，这名大臣因不满国王的残暴统治而替老百姓讲了几句公道话，为此国王震怒不已。他决心不让这名敢于“犯上”的臣下，得到半点获赦的机会。于是，他与几名心腹密谋暗议，终于想出了一条狠毒的计策：暗嘱执法官，把“生死签”的两张签纸都写成“死”字。这样，不管犯人抽得是哪张签纸，终难幸免于死。

世上没有不透风的墙。国王的诡计终于被外人所察觉。许多悉知内情的文武官员，虽然十分同情这位往日正直的同

僚，但慑于国王的淫威，也只是敢怒而不敢言。就这样终于挨到了临刑的前一天，一位好心的看守含蓄地对囚臣说：“你看看有什么后事需要交待，我将尽力为你奔劳。”看守吞吞吐吐的神情，引起了囚臣的疑心，百问之下，终于获知阴谋的内幕。看守原以为囚臣会为此神情沮丧，有心好言相慰几句，但见犯人陷入沉思，片刻间额上焕发出兴奋的光芒，这使看守感到惊讶不已。

在国王一伙看来，这个“背道离经”的臣子的“死”是必然事件，因为他们考虑的前提条件是“两死抽一”。然而聪明的囚臣，正是巧妙利用了这一点而使自己获赦的。



囚臣是怎样死里逃生的呢？

原来当执法官宣布抽签的办法之后，但见囚臣以极快的速度抽出一张签纸，并迅即塞进嘴里。待到执法官反应过来，嚼烂的纸团早已吞下。执法官赶忙追问：“你抽到‘死’字签还是‘活’字签？”囚臣故作叹息说：“我听从天意安排，如果上天认为我有罪，那么这个咎由自取的苦果我业已吞下，只要查看剩下的签是什么字就清楚了。”这时，在场的群众异口同声地赞成这个做法。

剩下的签当然写着“死”字，这意味着犯臣已经抽到“活签”。国王和执法官有苦难言，由于怕触犯众怒，只好当众

赦免了犯臣。

本来，这位犯臣抽到“生”还是“死”是一个随机事件，抽到每一种的可能性各占一半。但由于国王一伙“机关算尽”，想把这种“有一半可能死”的随机事件，变为“必定死”的必然事件，终于搬起石头砸了自己的脚，反使犯臣因此得以死里逃生。

三、偶然中的必然

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是偶然的，但多次观察某个随机现象，立即可以发现：在大量的偶然之中存在着必然的规律。

就拿掷币来说吧！一枚均匀的钱币掷到桌上，出现正面还是反面预先是无法断定的。假如我们掷的钱币不止一枚，或掷的次数不止一次，那么出现正、反面的情况又将如何呢？这可是一个有趣的问题。

历史上就有人做过成千上万次投掷钱币的试验，下面列的是几位知名人士的试验记录：

实 验 人	投掷次数	出现正面	频 率 (出现次数/投掷次数)
狄 摩 更	2048	1061	0.5181
布 丰	4040	2048	0.5069
皮 尔 逊	12000	6019	0.5016
皮 尔 逊	24000	12012	0.5005

容易看出，投掷的次数越多，频率越接近于0.5。这中间究竟有些什么奥妙？第一个科学地指明其中规律的，是世界数学史上著名的贝努里家族的雅各·贝努里（Bernoulli, Jacob 1654—1705）。贝努里家族是从荷兰移居到瑞士的新教徒。从17世纪末到18世纪，这个家族的三代人，出了8位杰出的数学家。雅各是其中最负盛名的一位。他的数学几乎是

靠自学成才的。但由于他的才华和造诣，从33岁到逝世的18年时间里，一直受聘为巴塞尔大学教授。他的名著《推测术》是概率论中的一个丰碑。书中证明了极有意义的大数定律。这个定律说明：当试验次数很大时，事件出现的频率和概率有较大偏差的可能性很小。因此可用频率来代替概率。这个定律使贝努里的姓氏永载史册。

大数定律说的是：当试验次数很大时，随机事件A出现的频率，稳定地在某个数值P附近摆动。这个稳定值P，叫做随机事件A的概率，并记为 $P(A) = P$ 。

频率的稳定性可以从人类生育的统计中得到生动的例证。一般人或许会认为，生男生女的可能性是相等的，因而推测男婴和女婴出生数的比应当是1:1，可事实并非如此。

公元1814年，法国著名的数学家拉普拉斯（Laplace 1749~1827）在他的新作《概率的哲学探讨》一书中，记载了以下有趣的统计。他根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料，得出几乎完全一致的男婴出生数与女婴出生数的比值为22:21，即在全体出生婴儿中，男婴占51.2%，女婴占48.8%。可奇怪的是，当他统计1745—1784整整四十年间巴黎男婴出生率时，却得到了另一个比25:24，即在全体出生婴儿中，男婴占51.02%，与前者相差0.14%。

差异！千分之一点四的微小差异！拉普拉斯对此感到困惑不解，他深信自然的规律，他觉得在这千分之一点四的后面，一定有着深刻的因素。于是，拉普拉斯深入进行调查研究，终于发现当时的巴黎人“重女轻男”，有抛弃男婴的陋俗，以致于歪曲了出生率的真相，经过修正，巴黎男、女婴出生的概率依然是：

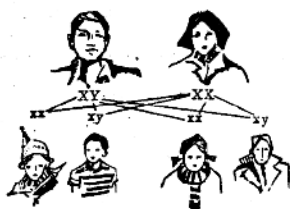
$$P(\text{男}) = 0.512$$

$$P(\text{女}) = 0.488$$

我国的几次人口普查统计表明，男、女婴出生数的比也是22:21。

为什么男婴出生率要比女婴出生率高一些呢？这是生物学上的一个有趣课题。

原来人类体细胞中含有46段染色体。这46段染色体都是成对存在的，分为两套，每套中位置相同的染色体，具有相同的功能，共同控制人体的一种性状。第23对染色体是专司性别的，这一对因男女而异：女性这一对都是X染色体。男性一条是X染色体，一条是Y染色体。由于性细胞的染色体都只有单套，所以男性的精子有两种，一种含X，一种含Y，而女性的卵子，则全部含X。生男生女取决于X和Y两种精子同卵子结合。如果带Y染色体的精子同卵子结合，则生男，如果是带X染色体的精子同卵子结合，则生女。大概是由于含X染色体的精子与含Y染色体的精子之间存在某种差异吧！这使得他们进入卵子的机会不尽相同，



从而造成男婴和女婴出生率的不相等！生物学家应当感谢数学家发现了这个问题。

以上事实雄辩地表明：在大量纷纭杂乱的偶然现象背后，隐藏着必然的规律。“频率的稳定性”就是这种偶然中的一种必然。