

目 录

前 言	1
本书的目的及特点	1
本书的结构及内容	1
简短的历史注释	4
致谢	6
第一章 矢量理论和矩阵理论简介	7
1.1 引言	7
1.2 矢量的表示和矢量运算	7
1.3 矢量的乘运算	9
1.4 三矢量积	11
1.5 矢量的微分	14
1.6 矩阵表示和矩阵运算	15
1.7 矩阵乘运算	17
1.8 方阵、逆矩阵及其它相关矩阵	18
1.9 主方向和特征值	20
第二章 坐标变换和平移	22
2.1 引言	22
2.2 坐标变换矩阵 1	22
2.3 变换矩阵的计算	24
2.4 坐标变换矩阵 2	24
2.5 移动和坐标变换	25
2.6 应用举例	27
2.7 镜像变换	31
第三章 直线、平面和多面体	37
3.1 引言	37
3.2 直线方程和线段求交	37
3.3 控制多边形和梅内劳斯定理	39
3.4 平面方程、平面与直线求交	40
3.5 多面体和它的几何特性	43
3.6 多面体及几何特性 2	44
3.7 多面体的干涉	46
3.8 多面体变形的局部处理	47
第四章 二次曲线和二次曲面	49
4.1 引言	49

4.2	二次曲线	49
4.3	二次曲面	53
4.4	两二次曲面求交	57
第五章	曲线理论	60
5.1	引言	60
5.2	曲线的切矢和曲率	60
5.3	副法矢和挠率	62
5.4	具有参数 t 的表达式	64
5.5	空间曲线的曲率、投影	66
5.6	参数曲线的隐式化	68
第六章	曲面的基本理论	71
6.1	引言	71
6.2	曲面的基本矢量和一阶基本齐式	72
6.3	法截线和法曲率	73
6.4	主曲率	75
6.5	主方向和曲率线	76
6.6	单位法矢的偏导及罗德里克公式	77
6.7	曲面的局部形状	79
第七章	曲面理论的高级应用	82
7.1	引言	82
7.2	脐点	82
7.3	曲面上的特征曲线	84
7.4	曲面的特征曲线 2	96
7.5	等距面	98
7.6	直纹面	101
第八章	插值曲线	104
8.1	引言	104
8.2	多项式和有理多项式插值及外插	104
8.3	具有导数(矢)约束的多项式插值	110
8.4	能量最小的弹性曲线	111
8.5	用参数曲线插值	113
8.6	附:弹性梁模拟方程的推导	115
第九章	Bezier 曲线和控制顶点	117
9.1	引言	117
9.2	曲线段及其控制顶点	117
9.3	Bezier 曲线和它的算子形式	118
9.4	B 曲线的不同表示形式	121
9.5	曲线段端点处微分和速端曲线	122
9.6	Bezier 曲线的几何特性	125

9.7	曲线段分割及 B 多边形	127
9.8	几何连续性	130
9.9	曲线段的升阶	131
9.10	曲面片	132
9.11	曲面片的几何特性	135
9.12	曲面片分割和升阶	136
9.13	附:Bezier 曲线的原始表示形式	137
第十章	Bezier 曲线连接及 B 样条多边形	139
10.1	引言	139
10.2	Bezier 曲线段连接	140
10.3	S 多边形介绍	145
10.4	几何连续性	150
10.5	设计中的曲率轮廓问题	152
第十一章	Bezier 曲面片的拼接和 B 样条多边形的几何特性	156
11.1	引言	156
11.2	B 样条曲面控制顶点网和拼接 Bezier 曲面控制顶点网	156
11.3	S 多边形的几何构造	159
11.4	梅内劳斯边及它们的分点	162
11.5	由 S 多边形计算 B 多边形	164
11.6	计算 B 多边形顶点的公式	167
11.7	附 B 样条曲线的常规方法	172
第十二章	有理 Bezier 曲线/曲面和有理 B 样条曲线/曲面	173
12.1	引言	173
12.2	有理 Bezier 曲线	174
12.3	有理 Bezier 曲面片	182
12.4	有理 B 样条	184
12.5	有理 B 样曲面和有理 Bezier 曲面	187
12.6	二次曲线的表示	190
12.7	用二次曲线进行插值和外插	195
第十三章	四边域曲面片的不规则拼接和圆角过渡	203
13.1	引言	203
13.2	Bezier 曲面片的 C^1 连接	203
13.3	以最少的曲面片构造封闭曲面的例子	205
13.4	具有规则顶点网的三边或五边曲面片	207
13.5	凸——凹混合区域的圆角过渡 2	213
13.6	滚球法圆角过渡	217
13.7	附录	218
第十四章	曲面片的混合连接	221
14.1	引言	221

14.2	孔斯曲面片	221
14.3	独立边界条件	224
14.4	跨界导矢的修正	226
14.5	$C^{(2)}$ 连接的情形	236
第十五章	三角域曲面片及其连接	240
15.1	引言	240
15.2	三角域曲面片的算子形式	240
15.3	三角曲面片的 $C^{(1)}$ 拼接	244
15.4	三边曲面片的任意连接	248
15.5	三角曲面片的分割	249
15.6	升阶	252
第十六章	曲面求交	253
16.1	引言	253
16.2	平面和曲面的求交	254
16.3	自由曲面求交	257
16.4	由微分方程形式给出的交线	265
16.5	奇异点附近的交线	269
16.6	等距面的交线	273
第十七章	理论在工业中的应用	278
17.1	引言	278
17.2	工程图与几何造型	278
17.3	集成的实例	279
17.4	车型设计系统	282
17.5	自由曲面注塑模产品的 CAD/CAM	291
附录 A	微分方程的数值解法	297
A.1	引言	297
A.2	变步长龙格—库塔方法	298
A.3	变步长预估—校正方法	300
A.4	Bulirsch—stoeer 方法	301
A.5	例子和计算	305
参考文献		309
前言		309
第一章~第四章		311
第五章~第八章		312
第九章~第十二章		313
第十三章~第十五章		315
第十六章		316
第十七章		317

前言

本书的目的及特点

本书的内容原先是准备作为 M. Hosaka 和 F. Kimura 的 *Geometric Modeling and CAD/CAM* 一书的一部分,但是因为我这部分比 kimura 的那部分完成得要早得多,我们就决定先将这部分作为本书单独出版。本书中,大量采用了面向几何的基本方法和工具来对 CAD/CAM 领域中用到的曲线曲面进行分析、拟合和拼合。讨论了自由曲面片的各种表达式和操作、连接(拼接)、干涉(求交)及求值。它们是几何造型中的最重要的组成部分和最基本的处理方法。包括自由曲面在内的几何模型的构造和实用功能都用实例作了解释,其中用到了本书给出的方法和技术。在 Kimura 将要写的书中将要包括一些更深层次的内容,诸如几何模型的数据结构、非流形、几何推理、容差问题,以及产品模型、工艺流程等等。因此,本书题目改为 *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*。

本书有以下特点,虽然在这方面已有很好的教科书,如 G. Farin 的 *Curves and Surfaces for CAD/CAM*[1], C. M. Hoffmann 的 *Geometric and Solid Modeling*[2]。本书与它们的区别在于:分析方法不同,讨论问题的方法和范围也不同。虽然本书讨论的理论和方法都是从学术观点来展开的,但是它们从 60 年代中期直到 1987 年一直用于一些日本公司的实际问题。因为在 70 年代中期以前,作者很难见到国外这方面的文献,因此这方面的研究是很迫切的,这方面的理论和方法是独立于国外面发展的。大多数成果只见于日文杂志和会议录,应用成果成为公司资产,所以本书的一些内容对于英文来说也许是新的。它们在公司的应用很成功,直观的分析方法使应用工程师易于理解方法的本质,并乐于使用。不但如此,本书的内容对目前和将来的问题都具有重要意义,因此作者认为这些内容值得出版。

现在,有很多商业 CAD/CAM 软件。它们对一般的产品是适用的,但是,对于某些特殊用户它们似乎还不够。这就是为什么还有一些公司向本书作者咨询如何将系统应用于他们的特定产品的开发。本书作者认为本书的内容对回答这些问题有一些帮助。

本书的结构及内容

本书是为那些需要了解曲线曲面理论及其处理方法的应用工程师面写的,他们迫切要求高质量地设计和制造其工程产品。作者尽可能使本书的内容易于理解和应用。因此,虽然本书系统地讲述这些方法,但同时也用图示的方法作了解释,以便读者仅用铅笔和纸

即能分析问题,这有助于读者理解他们要解决的问题。

本书分为如下六部分:

- 第一章至第四章。基本的数学工具,一次和二曲线曲面。
- 第五章到第八章。微分几何中的基本的曲线曲面理论及其应用,还包括曲线拟合。
- 第九章到第十二章。曲线曲面的控制顶点及规则连接(拼接)。
- 第十三章到第十五章。曲面片的不规则连接(拼接)及三角曲面片。
- 第十六章和附录。曲面求交,采用数值计算跟踪曲面的交线。
- 第十七章。几何造型和工程绘图。

在第一章中,介绍了矢量和矩阵理论,说明了本书中所采用的标记,并举了一些实例。第二章讨论了物体的运动及坐标变换。由于物体在三维空间中的运动不直观,很难想象,因而我们给出计算公式。为了易于理解,引入了镜像变换来表示旋转和平移。在第三章中,讨论了能用线性方程表示的物体如直线、直线边等。为讨论控制多边形和控制顶点网介绍了几何学的经典理论梅内劳斯定理,它的各种演变形式在后面章节将经常用到,在这一章也简单介绍了面、边及顶点间的拓扑关系。

第四章讲述了二次曲线和二次曲面,它们都是二次方程,因而人们对其性质作了深入的研究。自由曲面上某点附近的形状,可用二次曲面近似表示,曲面交线在奇异点附近是二次曲线,因此,二次曲线和二次曲面是很重要的,需要掌握二次曲线和二次曲面的知识。很多机械零件是由二次曲面和平面构成的。

第五章和第六章是从微分几何学^[1]中抽取的,以便分析和解释曲线曲面。几何量如切矢、法矢、曲率和挠率,以及 Frenet—Serret 公式都有介绍。曲线上某点附近的近似形状可由这些值表示。还给出了一个应用实例,给出空间曲线的高度的表达式,并给出曲线的投影曲线后,确定空间曲线的表达式。最后部分,讨论了平面曲线的隐式化,并应用第十二章的结论,将二次曲线表示为二次有理 Bezier 曲线。

对于曲面,介绍了基本矢量、基本齐次、曲率和曲率线,用于确定曲面上某点附近的形状。介绍了魏因加吞公式和罗德里克方程,它们用来描述法矢的形态,将在第七章中用到。在第七章中定义了曲面上各种曲线以描述曲面的特征。这些曲线根据特性分为几类:表示了曲面内在特性的曲线,与方向有关的曲线,与环境 and 方向有关的曲线,用于搜索曲面上特殊点的曲线。这些包括:鞍点、曲率线、等亮度曲线、轮廓线(silhouette)、高亮度曲线、脊(峰)线和谷线、极值搜索曲线等等。还介绍了等距面和直纹面的基本齐次和曲率,这将在后面用到。

第八章讨论了曲线拟合。首先介绍了采用多项式的拉格朗日公式,讲述了其插值过程和 extrapolation。也介绍了有理形式的拉格朗日公式。虽然这些方法没有直接在 CAD/CAM 中使用,但在第十六章微分方程数值解中将用到,并将在附录中详细讲述。之后,介绍了参数多项式曲线段。构造曲线段使其能量极小,利用这些曲线段可光滑连接给定的点串。这些相连的参数曲线段,度量比例(应当正比于曲线段实际长度)的选择是极重要的,通过书中给出的例子可看出度量比例对形状的影响。前面这些章节是曲线曲面的基本知识。在第九章到第十五章是曲线曲面在 CAD/CAM 中的应用。

第九章,利用控制顶点定义 Bezier 曲线和曲面,引入了作用于控制顶点下标的移位算子,以简化表达式和操作。Bezier 曲线的几何特性可由控制顶点构成的控制多边形推出。

Bezier 曲线的分割和升阶都只需处理 Bezier 控制多边形。Bezier 曲面片表示为 Bezier 曲线的张量积形式。

第十章,首先解释相连接的 Bezier 多边形的自由度,然后介绍连接定义多边形(Con-
nection Defining Polygon—CDP),CDP 保证相连 Bezier 多边形 $C^{(n-1)}$ 连接;当相连的曲线
在连接点处直到 $n-1$ 阶连续,则称它们 $C^{(n-1)}$ 连接。每对 $C^{(n-1)}$ 连接 Bezier 多边形,都有
CDP,由这些 CDP 可推出 B 样条控制多边形。相反地,可根据 B 样条控制多边形推出一组
 $C^{(n-1)}$ 连接的 Bezier 控制多边形。书中给出了由 B 样条控制多边形生成 Bezier 控制多边形的
实用方法,生成的这些 Bezier 曲线与原 B 样条曲线形状完全一样。B 样条控制多边形控
制了相连的 n 次 Bezier 曲线的形状, $C^{(n-1)}$ 意味着对曲线形状的控制是局部的。Bezier 多
边形对形状的控制是全局的。

本章还讲述了 B 样条控制多边形分割,即增加控制顶点。对三次 B 样条给出了一种
增加自由度的方法,即将 $C^{(2)}$ 连接改为 $G^{(2)}$ (在连接点处曲率矢量连续)。这章最后一部分,
讨论了度量比例对生成的曲线形状和曲率半径轮廓的影响,后者用于判断曲线的形状是
否令人满意。

第十一章第一节讨论了利用张量积,由 B 样条曲面控制顶点生成 Bezier 曲面控制顶
点网。之后各节,证明了由 B 样条控制多边形生成 Bezier 控制多边形的方法,这里采用了
梅内劳斯定理。

第十二章为有理 Bezier 曲线和有理 B 样条曲线。首先介绍与线性分割对应的有理分
割。Bezier 多边形可推出有理 Bezier 多边形,反之,由有理 Bezier 多边形也可推出对应的
非有理 Bezier 多边形,给出了它们之间相互转换的简单的作图法。利用有理 B 样条控制多
边形对应的非有理 B 样条控制多边形可推出 $C^{(n-1)}$ 连接的 Bezier 控制多边形。给出了权
因子对曲线曲面形状的影响。二次有理 Bezier 曲线可以转化为隐式形式的二次曲线,因
此,根据权对二次曲线分类。最后几节,讨论负权因子,采用负权因子进行二次曲线拟合,
这样曲线数目会尽可能地少。

第十三章到第十五章,讨论了不能用 B 样条曲面表示的形状。这些形状常需要采用
曲面拼接。第十三章,讲述了凸角、凸凹角利用 Bezier 曲面片的不规则连接圆角过渡。第十
四章介绍了边界条件和曲面片的自由度不符时的处理方法。首先讲述经典的 Coons 方
法,构造分别满足某边界条件的曲面片,对这些曲面片加权平均生成满足要求的曲面片。

之后介绍满足跨界导矢和高阶导矢的修正曲面片法,并给出了一些例子。最后一
部分,讲述了滚球法生成过渡曲面。

第十五章,用算子形式表示三角曲面片,三角曲面片与四边 Bezier 曲面片类似。但由
于控制顶点较少,在曲面拼接时约束更强。为了灵活地拼接,用到了四边曲面中使用的
修正曲面片。对三角曲面片升阶和分割可与四边曲面片类似处理。

第十六章讲述了各类曲面的求交。在曲面设计中自由曲面求交是困难和重要的问题。
给出了各类曲面(包括等距面)交线的微分方程,成功地应用变步长微分方程数值解法跟
踪交线。

交线上点的迭代始点用其它方法计算,由迭代始点求精确点的计算中截断误差始终
在允许的误差范围内。我们不必为确定步长而费心,即使在奇异点附近(奇异点处两曲面
法矢重合)也可以使用此方法。在奇异点附近,可以只考虑微分方程的高阶项来研究交线,

而在一般情况忽略高阶项。本书给出了各种例子。

在第十七章,用丰田汽车公司(Toyota Motor Corporation)和索尼公司(Sony Corporation)的数据为例说明了集成 CAD/CAM 系统的主要特征。在汽车车身的设计和制造中,至少要考虑两类人的需要,其一是车型设计人员,他们是艺术家;另一类是冲压模具设计人员,他们知道制造模具应具备哪些条件。如果系统提供了这些人乐于使用的人机接口和交互过程,才有可能建立成功的 CAD/CAM 集成系统。在此基础上,可以实现在技术上很复杂的各种自动化处理方法。本章描述了有关这些方面的内容。另一个重要特征是在制造过程各阶段要用到的主模型用数字主模型取代,从数字模型可以抽取用于设计锻模、检查成品和夹具、卡具的标准控制信息。

下一个例子是一个很小的商业产品,比如耳机,虽然尺寸很小,但也采用了相似的设计和计算方法。本章对此也做了简要的说明。在这两个例子中,采用了本书中讲述的理论和方法。

在附录中,给出了用于跟踪曲而上交线的变步长微分方程数值解法。我们试图使讲解过程易于理解而不需要太多的数值积分知识。

简短的历史注释

本书中用到的大部分材料取自作者从 60 年代中期到 80 年代末在日本的一些研究工作。下面简要介绍研究和开发的概况,以使读者了解一些背景。

作者对设计方面的实践经验可以追溯到 1943—1945 年。当时作者从事飞机结构设计。在 1947 年以后,作者在日本国铁研究院从事研究和开发工作。在这些工作中最有名的是提出并完成了实时的铁路订座系统。这个系统在 1960 年初投入使用[3]。由于这个系统作者学习了大量的关于计算机系统设计的知识,了解到人机交互的重要性。

在 1959 年,作者进入东京大学后,对图形和设计图形硬件设备发生了兴趣,包括图形输入输出设备和一台 DDA。在 1964 年末作者看到了一份发表于 1963 年 SJCC 由 Sutherland 和 Coons 写的论文,并且被 Coons 的论文强烈震撼。受 Sutherland 的 SKETCHPAD 的启发,作者设计了一个图形系统,系统硬件由日本东芝公司制造,当时使对图形编程技巧一无所知的人们大吃一惊[6]。

由于这些实践经验,作者认识到 Coons 的预言只是一个梦想,Coons 的曲面表达式并不适合于高质量的曲面设计,因此,作者发展了自己的自由曲面理论[7]。日本两大汽车制造厂采用了作者的方法,因为在所有的方案中只有作者的方案通过了他们的测试,而那时作者对汽车工业一无所知。一家公司想把作者的理论用于车身设计,另一家公司(丰田汽车公司)想把作者的理论用于车身冲压模具的 NC 加工。作者提出用数据结构描述车身形状,建立实际物体的计算机模型。这就是几何造型的思想。

当时,在考虑设计过程中信息的生成和传统及转换时,作者认为有必要用计算机能够直接处理的信息代替传统的工程图纸。采用这种思想及其曲面理论,东京汽车公司开发了一个称为 TINCA 的系统,这个系统在 1972 年左右完成[8]。这个系统可以生成加工汽车主模型、冲压模的刀具轨迹。

在公司使用的同时,采用作者关于造型的思想开发出了称之为 GIL 的交互设计语言,运行于东京大学实验室自制的微机上。采用这些设备,几何模型的建立、操作及显示成为可能[9]。这些工作是在不了解 I. Baid 和 M. E. Engli 在几何造型方面的工作基础上独立完成的[10]。发表了有关这方面工作的英文论文[11]。在 1974 年,基于 1964—1972 年的研究工作,作者出版了一本关于计算机图形学及其应用的书[12]。

几何造型的工作由 F. Kimura 进一步发展成为 GEOMAP 系统(GEOMETRIC Modeling And Processing)这是在日本政府的 ETL 完成的,在 ETL 有很好的计算机设备。GEOMAP 系统支持独特的二维数据输入方法和绘图指令。发表了有关 GEOMAP 的英文论文[13][14]。

本书作者 1974 年在欧洲出席 IFIP 会议时,第一次知道了 Bezier 曲线,作者对此很感兴趣,不久就发现了可用于简化其表达及操作的移位算子[15]。这个表达式自此开始使用[15][16]。

1976 年前后,丰田汽车公司再次就新的项目求助于作者,要求用计算机辅助车型设计,以缩短设计时间,并使设计的形状信息直接用于后续各环节中。比如,车身结构设计系统和冲模设计制造系统(TINCA)。这个项目看起来很有吸引力,但很难在一个短时间内达到其目标。当时丰田汽车公司有一个称之为 NTDFB 的系统,这个系统从设计人员构造的泥塑模型上取得测量数据,并用 Coons 曲面片插值方法构造车身线架模型。但是,曲面的质量不令人满意。在用 TINCA 系统制造冲压模时,要对数据作很多修整工作。

在进行新的项目时,对公司车型设计人员采用的传统方法进行了系统的分析和研究,在此基础上,新的曲面合成和求值方法考虑了与车型设计人员的协调。这种新方法模仿了设计人员为表达其意图而构造泥塑模型的创造性工作过程。因此,系统必须提供大量的方法和工具来构造和分析模型,从而使设计人员感觉到这新方法符合他们的习惯。

通过这些实践,加上理论方面的研究工作,以及在丰田汽车公司三年多的研究开发工作经验,系统得以完成并从 1981 年开始投入使用。对产品设计效率和产品质量有了划时代的提高。由于采用了这个系统及与之集成的各个后续系统,抛弃了所有的实物模型,并大大减少了冲压实验次数[18]。

在合作开发系统的过程中,作者发现了很多有待解决的问题,但由于开发时间的限制,它们并没有得以满意地解决。这些问题涉及到自由曲面求值、求交及连接(拼接)。其中一部分在后来进行了详细的分析[17][19][20];本书对这些问题都作了分析和研究。在 1981 年作者由于年龄的限制离开东京大学转到东京 Denki 大学,在那里,作者是大学研究中心的主任,在 1988 年作者退休后,得以有时间写这本书,系统地阐述了作者在自由曲线曲面方面的工作。由于本书属于入门性质的教材,因此省略了一些复杂的分析。

在作者完成日本国铁订座系统开发后,作者作为顾问参与了东京期货交易中心的在线期货信息及交易系统的开发,它们与 CAD/CAM 系统有很大区别,但它们也有共同点,在于如果没有专家,系统便无法成功运行。作者认识到:良好的人机接口与系统的高可靠性和高水平一样,是系统成功运行的重要因素。

致谢

作者感谢在研究过程中给作者提出问题以及同作者一起讨论问题、并检验研究结果的同仁们。作者尤其要感谢丰田汽车公司的同仁和东京大学的 T. Sata 教授,是他第一次将作者引入这个领域。还要感谢东京大学的 Kimura 教授,在这个领域中他先是我们学生,后来成为我的同事。

还要感谢丰田汽车公司的 M. Ohara 先生和 M. Higashi 博士以及索尼公司的 T. Kuragano 博士允许我采用他们的开发成果作为第十七章的素材。除了第十七章的图之外,书中所有的图都是由东京 Denki 大学的 T. Saitoh 先生和 Stanley 电气公司的 T. Kushimoto 先生、H. Kobayasi 先生完成的。本书中包括了他们与作者一起工作的成果。

Springer-Verlag 的 J. Andrew Ross 先生校正了原稿中的许多错误;作者对此深表谢意。

Mamoru Hosaka

1991 年 8 月于东京

第一章 矢量理论和矩阵理论简介

1.1 引言

在处理几何物体及其几何特性时,为便于读者理解,简化对几何物体及几何特性的描述,本书自始至终都使用矢量及矩阵表示和运算。这一章,讲述矢量和矩阵运算的基本理论,并列举一些例子。这一章的内容在以后各章节中都要用到。

1.2 矢量的表示和矢量运算

矢量具有模长和方向。用图形表示,矢量是一个附有箭头的直线段;直线段的长度为矢量模长,箭头方向为矢量的方向。通常不必考虑矢量的绝对位置,除非我们考虑的是一个在固定位置上的矢量。

在三维空间中,矢量具有三个自由度,方向和模长,或者表示为空间坐标系中的三个分量。坐标系并不要求是正交的,为简单起见,首先讲述正交坐标系,之后再处理非正交坐标系。坐标系三个轴上的单位矢量记为 i, j 和 k 。矢量 i, j 和 k 用坐标系三个轴上的分量表示为

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1) \quad (1.1)$$

任意矢量 a 的三个分量标记为 a_x, a_y, a_z , 则 a 表示为

$$a = (a_x, a_y, a_z) \quad (1.2)$$

矢量 a 与常量 c 的乘运算,两矢量 a 和 b 的加、减运算定义为对它们坐标分量的相同运算:

$$c = ca = (ca_x, ca_y, ca_z), \quad (1.3)$$

$$c = a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) \quad (1.4)$$

图 1.1 用图形方式表示了上述运算。根据式(1.1), (1.2), (1.3)和(1.4), 矢量 a 可写为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1.5)$$

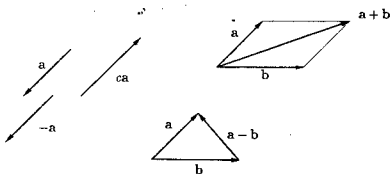


图 1.1 矢量及矢量运算的图形表示

空间上一点 P 的位置可由 P 点到坐标原点的距离确定, 是一个矢量。通常当一个矢量表示某位置时, 矢量的起点定在原点, 因此, 点 P 的坐标值 (p_x, p_y, p_z) 即为其位置矢量的坐标分量:

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \quad (1.6)$$

有两种方式表示矢量, 一种方式是, 各分量水平地写在一对括号内, 另一种方式则把各分量垂直地写在一对大括号内:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

后一种写法占用较多空间, 而且与通常的打字习惯不同, 在用这种表示方法时, 经常改写为下式

$$\mathbf{a}^T = (a_x, a_y, a_z)^T \quad (1.8)$$

其中上标 T 表示转置。

位置矢量 $\mathbf{p}$ 的起点为位置 $\mathbf{q}$ 时, 偏移矢量 $\mathbf{d}$ 表示为

$$\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (p_x - q_x, p_y - q_y, p_z - q_z) \quad (1.9)$$

偏移矢量的模长即点 $\mathbf{p}$ 与点 $\mathbf{q}$ 间的距离为

$$|d| = |p - q| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2 + (p_z - q_z)^2} \quad (1.10)$$

矢量的模长等于各分量平方之和再取平方根,模长也称为矢量的绝对值。与矢量 a 方向相同模长为 1 的矢量 $\hat{a}$ 称为方向 a 上的单位矢量,可由矢量 a 除以 a 的绝对值得出:

$$\hat{a} = \frac{a}{|a|} \quad (1.11)$$

坐标轴 x, y 和 z 方向上的单位矢量为上面提到的 i, j 和 k 。

1.3 矢量的乘运算

1.3.1 矢量的内积

下面定义矢量 a 和 b 的内积。内积是标量,等于两矢量的绝对值的乘积,再乘以 $\cos\theta$,其中 θ 是 a 和 b 的夹角:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\theta \quad (1.12)$$

内积 $a \cdot a$ 写为 a^2 ,等于矢量 a 的绝对值的平方,因此:

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} \quad (1.13)$$

如果两非零矢量 a 和 b 垂直(正交),则 $a \cdot b$ 等于 0。由上面可知 $i^2 = j^2 = k^2 = 1, i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ 。因为 a 和 b 可表示为(1.5)式的形式,在正交坐标系中 $a \cdot b$ 等于对应各分量乘积之和:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.14)$$

两个非零矢量的内积为正、零或负,则两矢量的夹角小于、等于或大于 90° 。内积与矢量顺序无关。

1.3.2 矢量叉乘

矢量 a 和 b 的叉积是一个矢量,这里记为矢量 c 。 c 的模长为 a, b 的绝对值及 $|\sin\theta|$ 的乘积,其中 θ 为 a, b 的夹角:

$$|c| = |a| \cdot |b| |\sin\theta| \quad (1.15)$$

当 a 和 b 的起点相同时, $|c|$ 等于由 a 和 b 构成的平行四边形的面积。 c 的方向遵守由 a 到 b 的右手螺旋规则。因此 c 垂直于 a 和 b 。如果叉乘时 a, b 的顺序调换一下, 则 c 的方向相反:

$$a \times b = -b \times a \quad (1.16)$$

叉积为零的两个非零矢量是相互平行的。平面的法矢可由平面上两个不平行的矢量叉乘得到。平面的前面和后面由平面法矢的方向确定。表示为下式时:

$$c = a \times b \quad (1.17)$$

叉积 c 的分量可由 a 和 b 的分量表示, 假设各矢量的分量如下:

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_x, a_y, a_z), \\ b &= (b_x, b_y, b_z), \\ c &= (c_x, c_y, c_z) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

由 $a \cdot c = 0$ 和 $b \cdot c = 0$ 得到:

$$\left. \begin{aligned} a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z &= 0, \\ b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

从上面两个关于 c_x, c_y 和 c_z 的线性方程, 得到:

$$c_x = \gamma \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c_y = \gamma \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad c_z = \gamma \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

这里 γ 是依赖于 a 和 b 的常量。为确定 γ , 我们选 $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ 。这样由 a 和 b 叉乘确定 $c = (0, 0, 1)$ 。比较式(1.20), γ 应为 1。从而, 由(1.20)式, γ 应为 1。总结如下:

$$c = c_x i + c_y j + c_z k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

1.4 三矢量积

1.4.1 三矢量的标量积

三矢量标量积,是由两矢量叉乘,再与第三个矢量求内积而计算出的一个标量。假设矢量 a, b 和 c 的起点相同,如图 1.2。

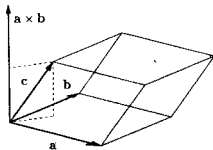


图 1.2 标量积

$|a \times b|$ 等于以 a 和 b 为边的平行四边形的面积,这个平行四边形的单位法矢 n 为

$$n = \frac{(a \times b)}{|a \times b|} \quad (1.22)$$

内积 $(n \cdot c)$ 为 c 在 n 上的投影长度, $|a \times b|(n \cdot c)$ 为底面积乘以高(见图 1.2),是以 a, b 和 c 为边的平行六面体的体积。如果这个值为零,则三矢量共面;如果为正,则 c 在法矢方向取 $a \times b$ 的平面的前侧;如果为负,则 c 在以 $a \times b$ 为法矢方向的平面的后侧。

在上面计算平行六面体体积过程中,我们取 a 和 b 确定的面为底面。我们也可以取 b, c 确定底面,或 c 和 a 确定底面,体积应当是相同的,因此 $(b \times c) \cdot a, (c \times a) \cdot b$ 及 $(a \times b) \cdot c$ 相等,把它们记为 $[a, b, c]$,称为 a, b, c 的标量积:

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[b, a, c] \quad (1.23)$$

当其中两矢量方向相同或相反,或者三矢量共面时,标量积为零。标量积的符号常用于判断某点位于平面的哪一侧。

1.4.2 三矢量的矢量积

三矢量 a, b 和 c 的矢量积为 $(a \times b) \times c$ 或 $a \times (b \times c)$,在几何造型中常用到它们。 $a \times b$ 是 a 和 b 确定的平面的法矢, $(a \times b) \times c$ 垂直于 $(a \times b)$,因此 c 在 a, b 确定的平面内,为 a

和 b 的线性组合,如图 1.3。

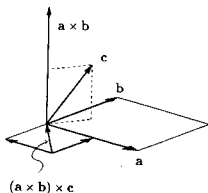


图 1.3 三矢量的矢量积

$$(a \times b) \times c = \lambda a + \mu b \quad (1.24)$$

这里 λ 和 μ 为待定标量值。式(1.24)两端都点乘矢量 c (求内积),左端 $[c, a \times b, c]$ 为零,右端为

$$\lambda(a \cdot c) + \mu(b \cdot c) = 0 \quad (1.25)$$

由上式得出:

$$\lambda = -\gamma(b \cdot c), \mu = \gamma(a \cdot c) \quad (*)$$

其中 γ 是与 a, b 和 c 无关的常量。为确定 γ , 取 a, b 为互相垂直的两个矢量, c 取为 b , 计算式(1.24)的两端, 并利用 $(*)$ 式得出的关系式 $\lambda = -\gamma b^2$ 和 $\mu = 0$, 最后确定常量 γ 为 1。由此推出:

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a \quad (1.26)$$

交换 $(a \times b)$ 和 c 的顺序, 再交换 a 和 b 的顺序, 对调 c 和 a , 推出下面结果:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (1.27)$$

(1.26)式两端都点乘矢量 d , 又可以推出另一个矢量乘积公式:

$$[(a \times b) \times c] \cdot d = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d).$$

左端为标量积 $[(a \times b), c, d]$ 。由式(1.23), $[(a \times b), c, d] = (a \times b) \cdot (c \times d)$, 因此有公式:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) \quad (1.28)$$

1.4.3 应用实例

例1 建立坐标系

三矢量积可确定空间坐标系。假设 a 和 b 确定的平面的单位法矢为 n :

$$n = \frac{a \times b}{|a \times b|} \quad (1.29)$$

记 $\xi = n, \hat{\xi} = \hat{a}$, 构造 $\hat{\eta}$ 垂直于 $\hat{\eta}$ 和 $\hat{\xi}$

$$\hat{\eta} = \hat{\xi} \times \hat{\xi} = \frac{(a \times b) \times a}{|a \times b| \cdot |a|} \quad (1.30)$$

根据式(1.26), 右端为

$$(a \times b) \times a = (a \cdot a)b - (b \cdot a)a = a^2 b - (b \cdot a)a$$

从而 $\hat{\eta}$ 为

$$\hat{\eta} = \frac{b - (\hat{b} \cdot \hat{a})\hat{a}}{|a \times b|}$$

相互正交的 $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ 和 $\hat{\xi}$ 矢量确定了一个正交坐标系。

例2 式(1.28)的利用

三矢量 a, b 和 c 起点相同, a, b 确定的平面与 b, c 确定的平面垂直, a 与 b 之间的夹角为 θ_1 , b 与 c 间的夹角为 θ_2 , a 与 c 间夹角为 θ_3 , 则下式成立:

$$\cos \theta_3 = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$$

证明如下: 在(1.28)式中令 $d=b$, 因为 $a \times b$ 和 $b \times c$ 垂直, (1.28)式左端为零, 将内积写成模长与 $\cos \theta$ 的乘积形式(θ 为两矢量夹角), 就可推出上式。

1.4.4 非正交坐标系

我们经常使用正交坐标系, 但有时需要使用非正交坐标系。假设 e_1, e_2 和 e_3 为坐标系三个轴上的单位矢量, e_1 和 e_2 夹角为 ω , e_1 与 e_3 决定的平面的法矢与 e_3 夹角为 θ 。

现在来考虑一个任意的单位矢量 a 在非正交坐标系中的表示。 a 可表示为