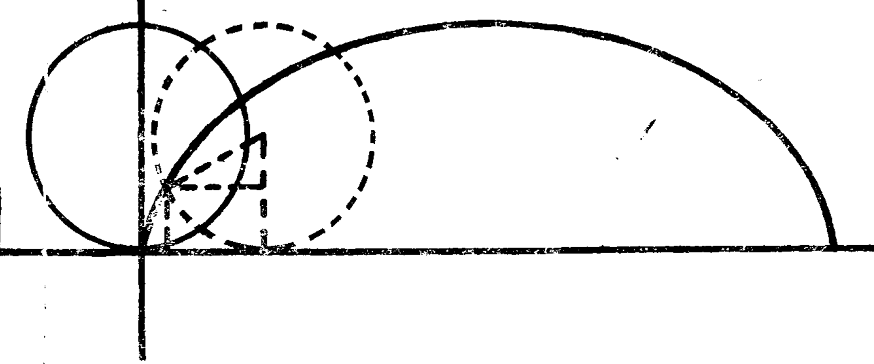
陕西省高等师范函授教材

# 《高等数学讲义》
# 自学指导



陕西省高等师范函授教材

# 《高等数学讲义》

## 自学指导



陕西人民教育出版社 出版

陕西省高等师范函授教材
《高等数学讲义》自学指导
*
陕西人民出版社出版
陕西省新华书店发行
国营五二三厂印刷
*
787×1092 1/32 印张 8.5 字数 190,000
1979年8月第1版 1979年12月第1次印刷
印数：1——19,700
书号：K7094·222 定价：0.89元

# 说　　明

本书原稿系同济大学数学教研组编写，我们对原稿做了校对，并在个别地方做了修改，现在翻印出版作为我省高师函授数学专业学员学习《高等数学讲义》（一九六四年版本）（樊映川等编）的自学指导书。目的是向函授学员介绍正确的学习方法，帮助正确理解高等数学中一些难懂的概念与定理。书中配备的习题可供函授学员自学时选用。希望我省函授辅导教师、学员和广大读者在使用中提出宝贵意见。

陕西教育学院师训部数学组

一九七九年七月

# 目　　次

## 第三篇　数学分析(续)

# 一般学习方法指导

在每一章学习开始时，先看本指导书中关于各章的头一段指导。这一段指出应按怎样的程序来学习这一章：应该先看讲义中那几节教材，那些可以不看，在什么时候看那几段指导，配合着做那些习题等等。必须依照这程序来学习。

## 一、阅读讲义

（1）应当仔细阅读讲义。必须先对前面的内容获得了正确的了解后再继续前进。有必要在纸上作出全部计算（也包括那些因简单而在讲义中略去的在内）。

（2）应特别注意基本概念的定义。所有这些概念反映着现实世界的数量关系或空间形式的性质。应该对这些概念有清楚的了解，否则不可能学好数学。

要仔细考虑讲义中对某些定义所举的例子，并力求自己也能举出类似的例子来。

（3）在阅读教材的同时作好笔记是很有益处的。建议在第一遍阅读教材时在笔记本中记下定义、定理的表述、定理的证明、公式和例题的解答。

学习时可在笔记本上标出要提出的问题。建议作笔记时，在以公式的形式所得的结论下打上重点记号或画上一小

框，以便在复习时能一望而知，且能更好地记住这些公式。

（4）应该记住每一个定理是由假设、结论与证明所组成的。所有的假设在证明中都必须利用到。要能准确地指出定理中每一项假设在证明中的什么地方被利用到。

## 二、习　题

（1）阅读教材后应配合着做指导书所指定的习题。作习题前应对讲义中及本指导书中所举的例题能彻底理解。

（2）作习题时要从教材的理论原理出发。应该注意解题的每一步的根据，并必须确切知道这些根据是正确的。

如果对于同一习题知道几种不同的解法，则应选择最恰当的解法。

在计算开始前为自己拟一个简短的解题计划是有好处的，这一点对比较复杂的习题更加需要。

（3）应该详细地，毫无遗漏地，在习题本上作所有的习题。

可以徒手画图，但应按已给条件来画图并应整洁。如果要求画特别准确的图，例如要用图来检验由计算所得的结果时，那末就要用直尺、量角器、曲线板来画。

（4）每道习题应进行到做出所要求的最终的答案。如果答案可以化简时应化为最简的形式。在解题过程中不应引入 $\pi$ 等等的近似值，以免繁复的数字运算，这些近似值只应在指定要求近似解时，到最后一步才把它引入。

（5）做习题时不要先看答案和题解（只有较难的习题附

题解）．应作出最后结果后再对照答案。如果自己作出的结果与本指导书所给的答案不同，必须仔细检查出发生差异的原因。

## 三、自我检查题

在学习了教材和作了习题以后，应该在习题本上回答本指导书中所列的自我检查题。

解答时应说明理由，但语言应尽可能扼要与具体。

## 四、测验作业

（1）在没有做完指导书中所规定的（在该次测验作业之前应完成的）习题之前不应动手做测验作业。

（2）测验作业的解答应叙述得详细、干净。必要时应附注所根据的理由。图可以徒手画。

# 各章学习方法指导

# 第一篇　解析几何

本篇中的第一章至第六章的内容作为复习的内容．因一般说来对这些内容（行列式及线性方程组、平面解析几何）已有比较深入的了解；但考虑到有些内容因久未接触而可能遗忘，所以仍给予适当指导以便于复习．

## 第一章　行列式及线性方程组

读§1.1～§1.4后，读学习方法指导1、2及例1并做习题1.1.1～1.1.5．再读§1.5，§1.6，然后读学习方法指导中的例2．做习题1.1.6，1.1.7．§1.7删去．最后回答自我检查题．

### 学习方法指导

1．注意用行列式来研究二元线性方程组和三元线性方程组所得结论中的相似之处．

2．讲义上册15页中的定理2的证明比较难懂，现解释于下．

$$\triangle' = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3.$$

这里 $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

分别为行列式$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中对应于第一列元素

$a_1$，$a_2$，$a_3$的代数余子式。

但另一方面因$\triangle'$中第一列与第二列相同，根据性质Ⅱ可知$\triangle' = 0$，因此有 $b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$。

## 例　　题

**例 1**　设有行列式

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix},$$

(a) 求这行列式中第二行各元素的子行列式；

(b) 求这行列式中第二行各元素的代数余子式 $A_2$, $B_2$, $C_2$；

(c) 求第二行各元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和；

(d) 求第一行各元素与第二行对应元素的代数余

子式的乘积的和。

**解**：(a) 对应于 $a_2=-1$ 的子行列式为 $\begin{vmatrix}2&3\\5&2\end{vmatrix}=-11$，

对应于 $b_2=3$ 的子行列式为 $\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=-4$，

对应于 $c_2=4$ 的子行列式为 $\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1$。

(b) $A_2=(-1)^{1+2}\cdot(-11)=11$，

$B_2=(-1)^{2+2}\cdot(-4)=-4$，

$C_2=(-1)^{3+2}\cdot 1=-1$。

(c) $a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2=-1\cdot 11+3\cdot(-4)$

$+4\cdot(-1)=-27$。

根据定理 1，这行列式的值为 $-27$。在 §1.2 中已用对角线法则算得这行列式的值确是 $-27$。

(d) $a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=1\cdot 11+2\cdot(-4)$

$+3\cdot(-1)=0$。

根据定理 2，这结果是必然的。

**例 2**. 已知三条互不平行的直线的方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_3x+B_3y+C_3=0$。求这三条直线相交于一点的条件。

**解**：如果所给三条直线相交于一点 $(x_0, y_0)$，那末下面三个式子同时成立：

$$\begin{cases}A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,\\A_2x_0+B_2y_0+C_2=0,\\A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.\end{cases}\qquad(1)$$

但这三个式子同时成立也就表示三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z=0. \end{cases} \tag{2}$$

有非零解 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=1$（因为把 $x_0$，$y_0$ 及 1 分别代入方程组(2)中的 $x$，$y$ 及 $z$ 就得(1)的三个式子)．而方程组(2)有非零解的必要和充分条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

因此条件（3）也是所给三直线交于一点的必要和充分条件．

## 自 我 检 查 题

（1）方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=C_1, \\ A_2x+B_2y=C_2. \end{cases}$$

（$a$）有唯一确定解，（$b$）没有解，（$c$）有无限多组解，这三种情形如何用几何观点来解释？

（2）三个三元非齐次线性方程的方程组，它的系数应满足什么条件，才能使这方程组有唯一确定的解？如何求这解？

（3）三个三元齐次线性方程的方程组，它的系数应满足什么条件，才能使这方程组归结为两个方程？归结为一个方程？

## 习　题

1.1.1. 用对角线法则分别计算行列式：

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.1.2. 按第一列展开上题中的每个行列式，并计算它们的值。

1.1.3. 利用行列式性质Ⅶ再计算，1.1.1 中的每个行列式。

1.1.4. 分别计算行列式：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$； (b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

1.1.5. 从方程 $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 求出 $x$。

1.1.6. 分别解方程组：

(a) $\begin{cases} 2x-x=1, \\ 2x+4y-z=1, \\ x-8y-3z=-2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+(1+a)y+z=2a, \\ x+y+(1+a)z=0; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x-y+z=1, \\ x+y-z=2, \\ 5x+y-z=7. \end{cases}$

1.1.7. 分别解方程组：

(a) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y+3z=0, \\ 2x+3y-z=0; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 3x-y+2z=0, \\ 11x+y+4z=0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 3x-3y+6z=0, \\ 5x-5y+10z=0; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 3x-y+4z=0, \\ 4x+y+3z=0. \end{cases}$

## 习 题 答 案

1.1.1. (a) $-4$; (b) 8; (c) $-48$. 1.1.2. 同前. 1.1.3. 同前. 1.1.4. (a) $ab$; (b) $\sin(\alpha+\beta)$; (c) $(x-y)(y-z)(z-x)$. 1.1.5. $x_1=2$, $x_2=3$. 1.1.6. (a) $x=1$, $y=0$, $z=1$; (b) $x=a$, $y=1$, $z=-1$; (c) 无解. 1.1.7. (a) $x=y=z=0$; (b) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{-7}=k$; (c) $x=y-2z$, $y$ 与 $z$ 是任意数值; (d) $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=k$.

## 题 解

1.1.4. (c) 先根据行列式性质Ⅶ，以 $-1$ 乘第二列各元素后加于第一列的对应元素，再以 $-1$ 乘第三列各元素后加于第二列的对应元素；然后把行列式按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & y-z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y^2-z^2) - (x^2-y^2)(y-z)$$

$$= (x-y)(y-z)(y+z-x-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

# 第二章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

先读§2.1～§2.6，然后读学习方法指导1、2，并做习题1.2.1～1.2.11.

再读§2.7、§2.8及学习方法指导3、4，并做习题1.2.12～1.2.15.

最后回答自我检查题.

## 学 习 方 法 指 导

1. 在学习解析几何时，首先必须学会：

(*a*) 能按给定的点的坐标描点；

(*b*) 如果平面上的点的位置已知，能确定该点的坐标；

(*c*) 会利用本章公式来解有关问题.

2. 现在我们用数学归纳法来证明讲义上册28页中的公式(2). 数学归纳法在中学代数里已经讲过. 数学里常常用它来证明对于从某一个自然数起直到任意的自然数 $n$ 都是正

确的某一个论断。这个方法的步骤如下：

①证明当 $n$ 取第一个值（例如 $n=1$ 或者 $n=2$ 等等）的时候，这个论断是正确的；

②假设当 $n=k$ 的时候（$k$ 是一个自然数），这个论断是正确的，然后去证明当 $n=k+1$ 的时候，这个论断也是正确的。

下面就应用此法并利用讲义上册 28 页中的公式(1)来证明公式(2)。

①把(1)式写成

$$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3,$$

此式表示当 $n=3$ 时，(2)式是成立的。

②假设当 $n=k$ 的时候($k$ 是一个自然数，且 $k\geqslant 3$)，(2)式成立，即

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k=A_1A_k$$

成立。现在要证明当 $n=k+1$ 时(2)式也成立，为此试将上式两边都加上 $A_kA_{k+1}$。得

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}$$
$$=A_1A_k+A_kA_{k+1}.$$

但根据 $AB+BC=AC$ 有 $A_1A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1}$。这样把所得的 $A_1A_{k+1}$ 代入上式的右边，就得到：

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}$$
$$=A_1A_{k+1}.$$

这就是我们所要证明的论断。

因 $n=3$ 时(2)式成立(由①)，故 $n=3+1=4$ 时(2)式也