

科學圖書大庫

# 實用數學手冊

譯者 繆龍驥

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

# 科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員  
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年四月二十日再版

## 實用數學手冊

基本定價 4.60

譯者 繆龍驥 國立台灣大學教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號  
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號  
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

# 我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容力求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

**徐氏基金會 敬啓**

**中華民國六十四年九月**

## 譯者小言

本書係譯自 1969 年德文第九版，內容廣泛，適合工程人員及大專高職等各級學校理工科同學參考或複習之用。

讀者如發現錯誤或缺點時，敬請通知中華民國台北市 53～2 信箱徐氏基金會出版部，當考慮於再版時予以訂正，不勝感激！

繆龍驥 於台北  
民國六十一年七月

## 德文七版序

在籌備第七版時再次將書中的印刷錯誤加以校正，其間並參考許多讀者的來函。對於這些讀者，出版者謹在此敬致誠摯的謝意。

## 德文譯本序

由發行布朗斯坦與西曼雅也夫數學袖珍手冊的德文譯本，出版者希望能對於新進的及資深的工程人員，以及此外常與數值計算有關的物理學家及數學家，提供一本實用的參考工具，並藉以彌補德文數學文獻的一個重大的間隙。用於數學複習，這本書也很適宜。這本書的優點可由以下事實獲得最佳證明，就是俄文原本在很少的年代內就多次大量再版，而且每次都在短時期內售罄。

與俄文原本不同之處就是德文本中增添了關於變分法及關於積分方程式的各節。關於這一部分的編寫，出版者要感謝德萊司登交通學院(Hochschule für Verkehrswesen in Dresden)的密勒Miller教授。

## 原著三版序

在第三版中第四編“分析綱要”近於重新編寫，此外補充其他章節並改正已發現的印刷錯誤暨其他缺陷。同時亦增補參考書目錄。

“微分方程式”章的第八至十節（邊界值問題及偏微分方程式）主要出自舒拉—布拉(M. P. Schura-Bura)。

我們要向許多讀者表示我們誠摯的感謝。他們曾對於這本手冊提出意見，給予批評，並指出以前各版中的錯誤及缺陷。我們請求讀者，繼續提供意見，使得這本參考書在以後版本中獲得進一步的改進。

布朗斯坦 (I. Bronstein)  
西曼雅也夫 (K. Semendjajew)

## 原著初版序

在一本袖珍手冊的有限篇幅中，要向工程人員及工業大學同學介紹在學習上以及在實際工作上所需要的數學知識，不可能是一件簡單的事。在要求簡短之下，我們仍然顧到，要使這本書易於了解，便於使用，並且儘可能地在數學上確實（自然只達到一般工程人員所需要的數學嚴密性）。

我們恒應想到，這不是一本教科書，而是一本供參考用的袖珍手冊。因此在編排上不如教科書有系統，讀者不必驚異，羅必達規則（l' Hospital-sche Regel）已在“分析緒論”計算極限值的一節中敘述，而導數的概念還未介紹。又如Gamma函數的定義在“代數”章討論階乘之後就直接給出。這類“缺陷”在手冊中時常出現。因此如果讀者要查考某些事物，不僅可以利用目錄，亦應利用索引。

如果在本文中某處提出一個問題，欲加以剖析，而這個問題在其他有關部分已作詳細討論，則指出相關的頁數，以資查考。然而如果需要查閱其他參考書籍，則只指出作者姓名及頁數，可藉以查出所需要文獻的完全資料（參考目錄附於本手冊後）。

自然這本手冊也可能有若干缺點，但是這些要在使用時才會完全發現。因此我們迫切地請求所有使用者，將所有發現的缺點通知出版者。收到的意見將在再版時予以考慮，加以改進。

我們在此感謝羅普希茲（A. M. Lopschiz），奧勒夫斯基（M. N. Olewski）及錫斯托巴（M. G. Schestopal）三位先生，他們曾校閱手稿的各章，並給予我們有價值的建議。

布朗斯坦（I. Bronstein）

西曼雅也夫（K. Semendjajew）

# 數學符號\*

## I. 關係符號

= 等號  
≡ 恆等  
≠ 不等

≈ 近似  
< 小於  
> 大於

≤ 小於或等於  
≥ 大於或等於

## II. 代 數

| $a$ |

數  $a$  之絕對值

+

加號

-

減號

· 或 ×

乘號，例如  $a \cdot b$  或  $a \times b$ ；乘號常被省略，例如：  
 $ab$ 。

: 或 —

除號 ( $a : b$  或  $\frac{a}{b}$ )

$a^m$

$a$  之  $m$  次冪

$\sqrt{\quad}$

根號，例如： $\sqrt{a}$

$\sqrt[n]{\quad}$

$n$  方根，例如： $\sqrt[n]{a}$

$\log_b$

$b$  為底之對數，例如： $5 = \log_2 32$  (第124頁)

$\lg$

10為底之對數，例如： $2 = \lg 100$  (第124頁)

$\ln$

自然對數，例如： $1 = \ln e$  (第124頁)

( ), [ ], { }

括號 (表示運算順序)

!

階乘，例如  $a!$ ； $b!$ ； $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$   
 $= 720$  (第156頁)

---

\*括號中的頁數指出本文中解釋有關概念的位置。

### III. 幾 何

⊥	垂直
	平行
#	相等並平行
~	相似，例如： $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\triangle$	三角形
$\sphericalangle$	角（有時用 $\sphericalangle$ ），例如： $\sphericalangle ABC$ ， $\sphericalangle ABC$
$\widehat{\quad}$	弧段，例如： $\widehat{AB}$
°	度 } 角與圓弧之度量，例如： $32^\circ 14' 11.5''$
'	
"	
"	

### IV. 三角，雙曲線函數

sin	正弦 } 餘弦 } 正切 } (第175頁) 餘切 } 正割 } 餘割 }
cos	
tg	
ctg	
sc	
csc	反正弦 } 反餘弦 } (第185頁) 反正切 } 反餘切 }
Arccsin	
Arccos	
Arctg	
Arcctg	反正弦之主值 } 反餘弦之主值 } (第185頁) 反正切之主值 } 反餘切之主值 }
arcsin	
arccos	
arctg	
arcctg	

sh	雙曲正弦	}	(第190—192頁)	
ch				雙曲餘弦
th				雙曲正切
cth				雙曲餘切
sch				雙曲正割
csch	雙曲餘割	}	(第192頁)	
Arsh	反雙曲正弦			
Arch	反雙曲餘弦			
Arth	反雙曲正切			
Arcth	反雙曲餘切			

## V. 常數記號

const	常數 (Konstante)
$\pi = 3.14159 \dots$	圓周率 (第165頁)
$e = 2.71828 \dots$	自然對數之底 (第275頁)
$C = 0.57722 \dots$	歐拉常數 (第275頁)

## VI. 分析

lim	極限值 (第264, 272頁)	}	例如 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$	
$\rightarrow$				趨於
$\infty$				無窮大
$\sum$				和
$\sum_{i=1}^n$	和, 其中 $i$ (求和指標) 自 1 變至 $n$			
$f(\quad), \varphi(\quad)$	函數記號, 例如: $y=f(x), u=\varphi(x, y, z)$			
$\triangle$	增量, 例如: $\triangle x$			
$d$	微分, 例如: $dx$ (第303頁)			

\* 在許多書刊中使用不同的雙曲線函數記號, 時常寫作  $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$  以及對於反函數  $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ , 也用  $\operatorname{Sh} x, \operatorname{Ch} x, \operatorname{Th} x, \operatorname{Cth} x$  以及  $\bar{\sinh} x, \bar{\cosh} x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{ctgh} x$  的寫法, 反函數有時在所用函數記號上加指數 - 1 表示, 即如對於  $\operatorname{Arch} x$  寫作  $\operatorname{ch}^{-1}$ .

$d_x, d_y$  等

$\prime, \prime\prime, \prime\prime\prime, \text{IV}$  或  
 $\cdot, \ddot{\cdot}, \dots, \dots$  }  
偏微分, 例如:  $d_x u$  (第304頁)  
一個自變數的函數的各階導數記號, 例如函數  
 $y=f(x): f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), y',$   
 $y'', y''', y^{IV}, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}$  (第303, 306頁)

$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$  等

$D$

$f'_x, f''_{xx}, f''_{xy}$

或

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  }  
一階導數 }  
二階導數 } 例如:  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  等 (第303, 306頁)  
等 }  
導數之記號 (微分算子), 例如:  $Dy=y',$   
 $D^2y=y''$  等 (第303, 306頁)

$\int$

$\int_a^b$

$\int (k)$

$\int_S, \int_V$

$\iint$

$\iiint$

偏導數, 例如:  $f'_x(u), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  等(第304, 306頁)

積分號 (第334頁)

定積分, 自界限  $a$  至界限  $b$  (第383頁)

曲線積分, 在弧段  $k$  或在其射影上(第414, 417頁)

積分, 在曲面  $S$  上或在立體  $V$  上(第423, 425頁)

二重積分 }  
三重積分 } (第423, 424頁)

## Ⅶ. 複 數

$i$  (有時  $j$ )

$\Re(a)$

$\Im(a)$

$|a|$

$\arg a$

$\bar{a}$

$\text{Ln}$

虛數單位 ( $i^2 = -1$ ) (第507頁)

複數  $a$  之實部 (第507頁)

複數  $a$  之虛部 (第507頁)

$a$  之絕對值 (第508頁)

$a$  之幅角 (第508頁)

與  $a$  共軛之複數, 例如  $a = 2 + 3i, \bar{a} = 2 - 3i$   
(第509頁)

複數之 (自然) 對數 (第513頁)

## VIII 向量分析

$a, b, c$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	向量之記號 (第 534 頁)
$a^\circ$	單位向量, 與向量 $a$ 有相同方向 (第 534 頁)
$i, j, k$	笛卡兒坐標三角形之單位向量 (第 534 頁)
$ a $ 或 $a$	向量 $a$ 之長度 (絕對值) (第 534 頁)
$a = b$	} 向量之相等, 相加與相減 (第 534 頁)
$a + b$	
$a - b$	
$\alpha a$	向量與純量相乘 (第 535 頁)
$a \cdot b$	向量之數積 (第 537 頁)
$a \times b$ 或 $[ab]$	矢積 (第 537 頁)
$a \cdot b \cdot c = a (b \times c)$	混合乘積 (第 538 頁)
$a_x, a_y, a_z$	向量 $a$ 在笛卡兒坐標系之坐標 (第 538 頁)
$\nabla$	漢彌頓微分算子 (Nabla 算子) (第 561 頁)
$\Delta$	拉普拉斯算子 (第 561 頁)
grad	純量場之梯度向量 ( $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$ ) (第 551 頁)
div	向量場之發散量 ( $\text{div } \mathfrak{B} = \nabla \cdot \mathfrak{B}$ ) (第 559 頁)
rot	向量場之旋轉向量 ( $\text{rot } \mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{B}$ ) (第 560 頁)
$\frac{\partial U}{\partial c}$	純量場依方向 $c$ 之導數 (方向導數) (第 551 頁)

### 德文字母

<i>A</i>	<i>a</i>	<i>U</i>	<i>u</i>	<i>U</i>	<i>u</i>
<i>B</i>	<i>b</i>	<i>V</i>	<i>v</i>	<i>O</i>	<i>o</i>
<i>C</i>	<i>c</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>P</i>	<i>p</i>
<i>D</i>	<i>d</i>	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>Q</i>	<i>q</i>
<i>E</i>	<i>e</i>	<i>E</i>	<i>e</i>	<i>R</i>	<i>r</i>
<i>F</i>	<i>f</i>	<i>F</i>	<i>f</i>	<i>S</i>	<i>s</i>
<i>G</i>	<i>g</i>	<i>G</i>	<i>g</i>	<i>T</i>	<i>t</i>
<i>H</i>	<i>h</i>	<i>H</i>	<i>h</i>	<i>U</i>	<i>u</i>
<i>I</i>	<i>i</i>	<i>I</i>	<i>i</i>	<i>V</i>	<i>v</i>
<i>J</i>	<i>j</i>	<i>J</i>	<i>j</i>	<i>W</i>	<i>w</i>
<i>K</i>	<i>k</i>	<i>K</i>	<i>k</i>	<i>X</i>	<i>x</i>
<i>L</i>	<i>l</i>	<i>L</i>	<i>l</i>	<i>Y</i>	<i>y</i>
<i>M</i>	<i>m</i>	<i>M</i>	<i>m</i>	<i>Z</i>	<i>z</i>

### 希臘字母

<i>A</i>	<i>α</i>	<i>A</i>	<i>α</i>	Alpha	<i>N</i>	<i>ν</i>	<i>N</i>	<i>ν</i>	Ny
<i>B</i>	<i>β</i>	<i>B</i>	<i>β</i>	Beta	<i>Ξ</i>	<i>ξ</i>	<i>Ξ</i>	<i>ξ</i>	Xi
<i>Γ</i>	<i>γ</i>	<i>Γ</i>	<i>γ</i>	Gamma	<i>Ο</i>	<i>ο</i>	<i>Ο</i>	<i>ο</i>	Omikron
<i>Δ</i>	<i>δ</i>	<i>Δ</i>	<i>δ</i>	Delta	<i>Π</i>	<i>π</i>	<i>Π</i>	<i>π</i>	Pi
<i>E</i>	<i>ε</i>	<i>E</i>	<i>ε</i>	Epsilon	<i>Ρ</i>	<i>ρ</i>	<i>Ρ</i>	<i>ρ</i>	Rho
<i>Z</i>	<i>ζ</i>	<i>Z</i>	<i>ζ</i>	Zeta	<i>Σ</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>	<i>σ</i>	Sigma
<i>H</i>	<i>η</i>	<i>H</i>	<i>η</i>	Eta	<i>T</i>	<i>τ</i>	<i>T</i>	<i>τ</i>	Tau
<i>Θ</i>	<i>θ</i>	<i>Θ</i>	<i>θ</i>	Theta	<i>Υ</i>	<i>υ</i>	<i>Υ</i>	<i>υ</i>	Ypsilon
<i>I</i>	<i>ι</i>	<i>I</i>	<i>ι</i>	Iota	<i>Φ</i>	<i>φ</i>	<i>Φ</i>	<i>φ</i>	Phi
<i>K</i>	<i>κ</i>	<i>K</i>	<i>κ</i>	Kappa	<i>Χ</i>	<i>χ</i>	<i>Χ</i>	<i>χ</i>	Chi
<i>Λ</i>	<i>λ</i>	<i>Λ</i>	<i>λ</i>	Lambda	<i>Ψ</i>	<i>ψ</i>	<i>Ψ</i>	<i>ψ</i>	Psi
<i>M</i>	<i>μ</i>	<i>M</i>	<i>μ</i>	My	<i>Ω</i>	<i>ω</i>	<i>Ω</i>	<i>ω</i>	Omega

11115124

# 目 錄

## 第一編 數值表與曲線

I. 數值表	1
甲. 初等函數數值表	3
1. 常用常數	3
2. 平方, 立方數, 根值	4
3. 整數之冪, 自 $n = 1$ 至 $n = 100$	23
4. 倒數	25
5. 階乘及其倒數	27
6. 整數 2, 3 及 5 之若干冪數	28
7. 十為底之對數 (常用對數)	29
8. 逆對數	31
9. 三角函數之真數	33
10. 指數函數, 雙曲線函數及三角函數	37
11. 指數函數 (對於 $x$ 自 1.6 至 10.0)	41
12. 自然對數	43
13. 直徑為 $d$ 之圓周	46
14. 直徑為 $d$ 之圓面積	48
15. 弓形之確定因數	50
16. 角度換算為弧度	56
17. 比例數值表	57
18. 二次內插法表	59
乙. 特種函數數值表	60
19. Gamma 函數	60
20. 貝塞爾函數 (柱面函數)	61

21. 勒威德多項式 ( 球面函數 )	63
22. 橢圓積分	64
23. 機率積分	66
<b>II. 圖形表示</b>	<b>68</b>
<b>甲. 初等函數</b>	<b>68</b>
1. 多項式	68
2. 有理分式函數	70
3. 無理函數	75
4. 指數函數及對數函數	76
5. 三角函數	81
6. 反三角函數	84
7. 雙曲線函數	85
8. 反雙曲線函數	87
<b>乙. 重要曲線</b>	<b>88</b>
9. 三階曲線	88
10. 四階曲線	90
11. 擺線 ( 旋輪線 )	94
12. 螺線	99
13. 其他曲線	102

## 第二編 初等數學

<b>I. 近似計算</b>	<b>105</b>
1. 用近似值計算之規則	105
2. 近似公式	110
3. 計算尺	110
<b>II. 代數</b>	<b>118</b>
<b>甲. 恆等變形</b>	<b>118</b>

1.	基本概念	118
2.	有理整式	118
3.	有理分式	120
4.	無理式，冪式及根式之變形	123
5.	指數式及對數式	124
乙.	方程式	127
6.	代數方程式變形為標準形式	127
7.	一，二，三及四次方程式	129
8.	$n$ 次方程式	132
9.	超越方程式	135
10.	行列式	139
11.	線性方程式系之解法	142
12.	較高次方程式系	149
丙.	代數補編	150
13.	不等式	150
14.	級數，有限級數與平均值	154
15.	階乘及 Gamma 函數	156
16.	複合	157
17.	二項式定理	158
III.	幾何	160
甲.	平面幾何	160
1.	平面圖形	160
乙.	立體幾何	166
2.	空間直線與平面	166
3.	稜，多面角，空間角	166
4.	多面體	167
5.	由曲面圍成之立體	170
IV.	三角學	175

甲. 平面三角學 .....	175
1. 三角函數 .....	175
2. 三角學之最重要公式 .....	178
3. 正弦變量 .....	181
4. 三角形之計算 .....	182
5. 反三角函數 ( 測圓函數 ) .....	185
乙. 球面三角學 .....	187
6. 球面幾何學 .....	187
7. 球面三角形計算 .....	188
丙. 雙曲線函數 .....	190
8. 雙曲線函數之定義 .....	190
9. 雙曲線函數之最重要公式 .....	190
10. 反雙曲線函數 .....	192
11. 雙曲線函數之幾何定義 .....	193

### 第三編 解析幾何與微分幾何

I. 解析幾何 .....	195
甲. 平面解析幾何 .....	195
1. 基本概念與公式 .....	195
2. 直 線 .....	199
3. 圓 .....	202
4. 橢 圓 .....	203
5. 雙曲線 .....	205
6. 拋物線 .....	208
7. 二階曲線 ( 圓錐曲線 ) .....	210
乙. 空間解析幾何 .....	212
8. 基本概念與公式 .....	212
9. 空間中直線與平面 .....	218
10. 二階曲面 ( 方程式為標準式 ) .....	225
11. 二階曲面 ( 一般理論 ) .....	229