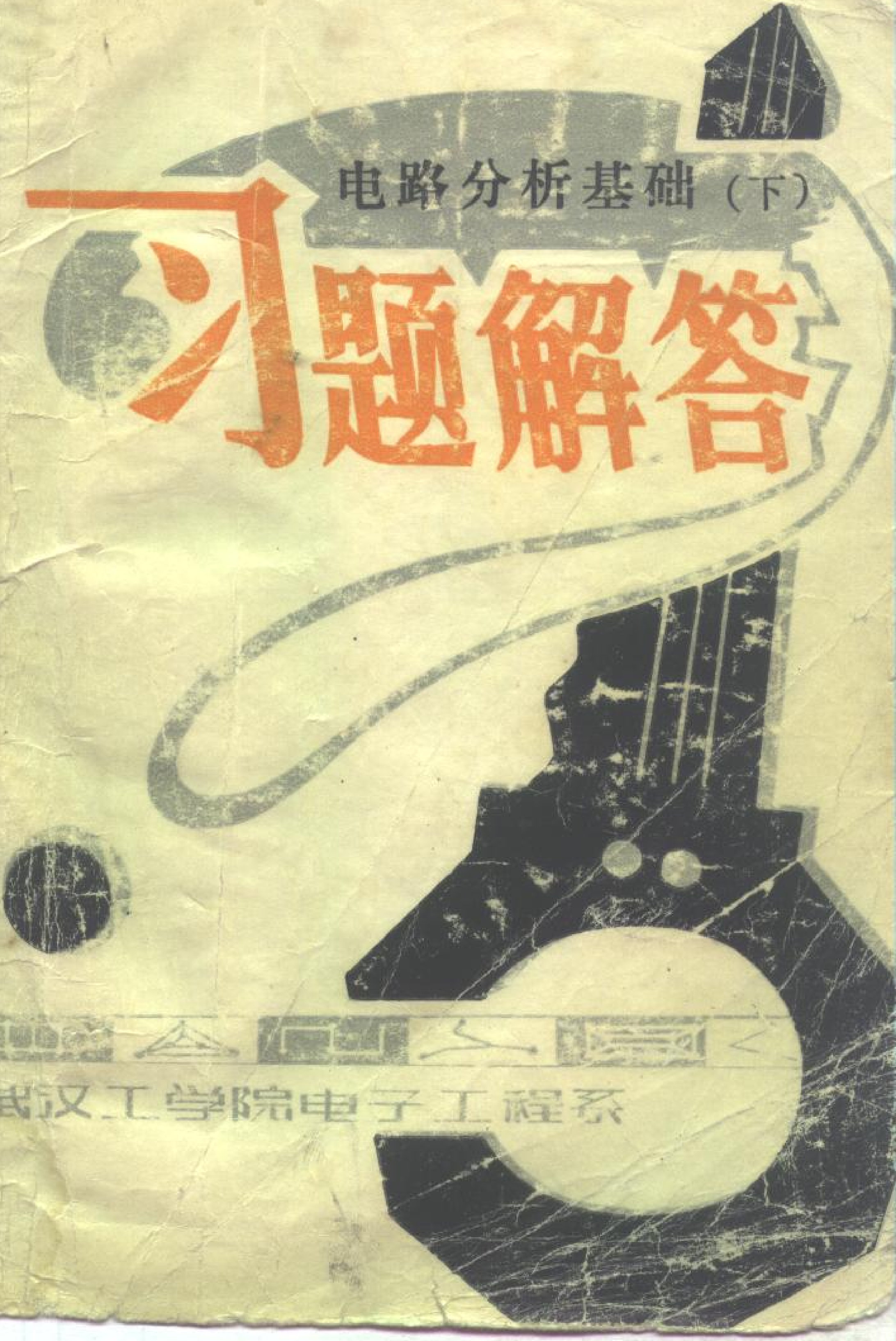
电路分析基础（下）

习题解答



武汉工学院电子工程系

第八章　正弦激励下电路的完全响应

提　　要

1、正弦电压和电流

随时间按正弦规律变化的电压和电流称为正弦电压和正弦电流。

正弦电压的瞬时值可表示为：$u(t)=U_m\cos(\omega t+\phi u)$，式中$u$为瞬时值，$U_m$为最大值，$\omega$为角频率，$\phi u$为初相角。最大值、角频率（或频率）、初相角是描绘正弦量特征的量，称为正弦量的三要素。

两个同频率正弦量的初相角之差，称为相位差，它反映了这两个量随时间变化的步调的差异。

2、正弦激励下电路的完全响应

在正弦激励下电路的完全响应由齐次微分方程的解和特解组成。齐次方程解和第六章中所述相同，特解可设为同频率的正弦函数，代入微分方程中求得；积分常数的值也和以往一样由初始条件确定。

根据所得解的性质可知，齐次方程解是电路的“暂态响应”分量；而特解则是电路的“稳态响应”分量。

3、用相量法求微分方程的特解

（1）相量、相量法

正弦量可以用复数来表示。例如$i(t)=I_m\cos(\cdots+\phi)$

可写作：　$i(t)=Re\left[I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right]=Re\left[\dot{I}e\right.$

式中$\dot{I}=I_m e^{j\phi}=I_m\underline{/\phi}$包含着正弦量的最大值$I_m$和初相$\phi$这两个要素，给定角频率就可以完全地确定正弦量。称为（电流）相量。相量在复平面上的图示，称为相量图。用相量代表正弦波，以简化正弦交流电路微分方程特解的计算，这种简化的计算方法称为相量法。

（2）用相量法求微分方程的特解

把微分方程中的变量x和正弦激励分别用对应相量$\dot{X}$和$\dot{A}$替换，$\dot{X}$和k次导数用$(j\omega)^k\dot{X}$替换，就可将微分方程化为对应相量的复数方程。由复数方程便可解得相量$\dot{X}$并由此求得对应的正弦解x。

练 习 题

8—1　求图8—1所示各波形的周期和频率。

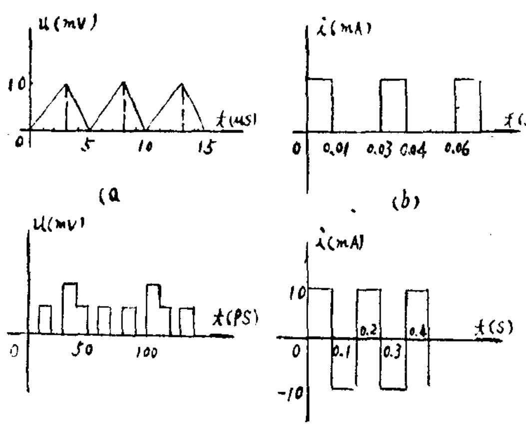


图 8—1

解：（1）图8—1(a)所示波形

$$T=5\mu s$$

$$=1/T=1/5\times10^{-6}=200(KH_Z)$$

（2）图(b)所示波形，$T=0.03s$，

$f=1/T=1/0.03=33.3(H_Z)$

（3）图(c)所示波形，$T=70_{ps}$

$f=1/T=1/70\times10^{-12}=14.3(GH_Z)$

（4）图(d) 所 示 波形，$T=0.2s$

$f=1/T=1/0.2=5(H_Z)$ #

8—2 试绘$u(t)=cos(2t+60°)\cdot U(t)V$的波形图，分别用$t$和$\omega t$为横坐标。$U(t)$为单位阶跃函数。

解： $u(t)=cos(2t+60°)\cdot U(t)V$的波形如图8—2所示。

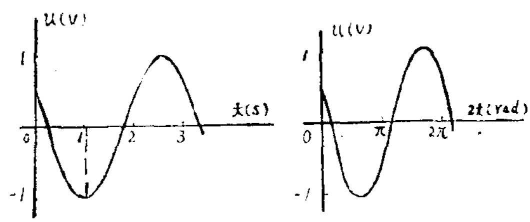


图 8—2

8—3 8—3所示电压波形，其最大值1V，试写出时间起点分别定在A、B、C、D、E各点时电压$u(t)$的表示式。

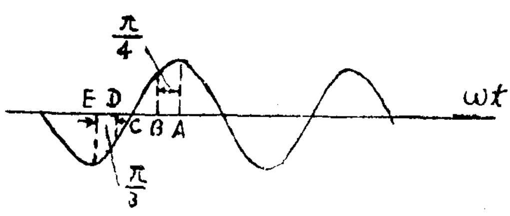


图 8—3

解： 时间起点定在A点时，电压的表示式为

$u(t)=\cos\omega t\ (V)$

时间起点定在B、C、D、E各点时，电压的表示式分别为 $\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\cos\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$-\cos\omega t(V)$。

8—4　　RL串联电路，$R=2\Omega$、$L=1H$，外施电压$u_S=10\cos t\cdot U(t)V$，求$t\geqslant0$时$i(t)$。已知$i(0)=0$又电路进入稳态后，电流与外施电压的相位关系如何？

解：电路如图8—4所示，据KVL有$u_L+u_R=u_s$

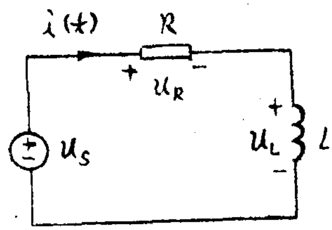


图 8—4

即　　$$L\frac{dt}{di}+Ri=10\cos t\cdot U(t)$$

代入数据得　$$\frac{di}{dt}+2i=10\cos t\qquad t\geqslant0\qquad(1)$$

其对应的齐次方程的解为$i_h=Ke^{-2t}$

特解　　$i_p=I_m\cos(t+\phi_i)$　　　　(2)

将式(2)代入(1)，以确定常数I_m及ϕ_i，

$$-I_m\sin(t+\phi_i)+2I_m\cos(t+\phi_i)=10\cos t$$

即　$$\sqrt{5}I_m\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(t+\phi_i)-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t+\phi_i)\right]$$

$$=10\cos t$$

$$\sqrt{5}I_m\cos(t+\phi_i+26.5^\circ)=10\cos t$$

上式对所有的t都应成立，故得

$\sqrt{5}I_m=10$及$\phi_i+26.5^\circ=0$

即　　$I_m=2\sqrt{5}$，$\phi_i=-26.5^\circ$

微分方程式(1)的解为

$$i(t)=i_h+i_p=Ke^{-2t}+2\sqrt{5}\cos(t-26.5)\qquad(A)$$

$$t \geqslant 0 \qquad (3)$$

据初始条件$t=0$时，$i(o)=0$。代入上式，以确定常数K，

$$i(o)=K+2\sqrt{5}\cos(-26.5^\circ)=0$$

$$\therefore \quad K=-2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-4$$

将$K=-4$ 代入式（3），得

$$i(t)=-4e^{-2t}+2\sqrt{5}\cos(t-26.5^\circ)\ (A)$$

$$t \geqslant 0$$

电路进入稳态后，电流i滞后外施电压u_s角26.5° #

8—5 把下列复数化为直角坐标形式。

$5\angle 30^\circ$、$5\angle 150^\circ$、$5\angle -150^\circ$、$5\angle -30^\circ$、$10\angle 240^\circ$、$2\angle 90^\circ$、$2\angle -90^\circ$、及$2\angle 180^\circ$。

解：（1）$5\angle 30^\circ=5e^{j30^\circ}=5(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)$

$$=4.33+j2.5$$

（2）$5\angle 150^\circ=-4.33+j2.5$

（3）$5\angle -150^\circ=-4.33-j2.5$

（4）$5\angle -30^\circ=4.33-j2.5$

（5）$10\angle 240^\circ=-5-j8.66$

（6）$2\angle 90^\circ=j2$

（7）$2\angle -90^\circ=-j2$

（8）$2\angle 180^\circ=-2$ #

8—6 把下列复数化为极坐标形式

$1+j1$ $\quad 1+j10$ $\quad 1-j1$ $\quad -1-j1$

$-1+j1$ $\quad j4$ $\quad -j4$ $\quad 3$及-3。

解：（1）模$a=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

幅角 $\theta=arctg\frac{1}{1}=45^\circ$

因此 $1+j1=1.41\angle 45^\circ$

(2) $1+j10=10.05\underline{/84°17'}$

(3) $1-j1=1.41\underline{/-45°}$

(4) $-1-j1=1.41\underline{/-135°}$

(5) $-1+j1=1.41\underline{/135°}$

(1) $j4=4\underline{/90°}$

(7) $-j4=4\underline{/-90°}$

(8) $3=3\underline{/0°}$

(9) $-3=3\underline{/180°}$ #

8—7 设$A=3+j4$、$B=10\underline{/60°}$试计算$A+B$、$A\cdot B$及A/B。

解：$A=3+j4=5\underline{/53.1°}$

$B=10\underline{/60°}=5+j8.66$

则 $A+B=3+j4+5+j8.66=8+j12.66$

$A\cdot B=5\underline{/53.1°}\times 10\underline{/60°}=50\underline{/113.1°}$

$A/B=5\underline{/53.1°}/10\underline{/60°}=0.5\underline{/-6.9°}$ #

8—8 若K为复数，且 $ReK=17$

及 $Re[(-3+j6)K]=4$，试求K。

解： 设$K=a_1+ja_2$，则 $ReK=a_1$

由题设 $ReK=17$，便知 $a_1=17$，

又 $Re[(-3+j6)K]=Re[(-3+j6)\times(17+ja_2)]$

$=-51-6a_2$

由题设 $Re[(-3+j6)K]=4$，

于是有 $-51-6a_2=4$

∴ $a_2=-\dfrac{55}{6}=-9.17$

故 $K=17-j9.17$ #

8—9 求代表下列正弦波的相量(以$1\underline{/0°}$代表

$cos\omega t$)，并作相量图。$5\,sin(\omega t+30°)$；$-8\,cos(\omega t-45°)$；$-6\,sin(\omega t-120°)$。

解：（1）$5\,sin(\omega t+30°)=5\,cos(\omega t-60°)$

代表该正弦波的相量为 $5\underline{/-60°}$

（2）$-8\,cos(\omega t-45°)=8\,cos(\omega t-45°+180°)$

代表该正弦波的相量为 $8\underline{/135°}$

（3）$-6\,sin(\omega t-120°)=6\,cos(\omega t-120°+90°)$

代表该正弦波的相量为 $6\underline{/-30°}$

它们的相量图如图8—5所示。 #

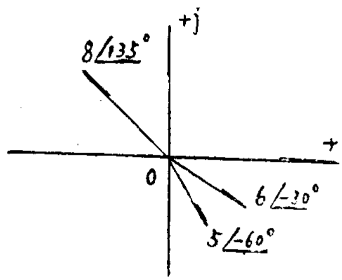


图8—5

8—10 重复上题，但用 $1\underline{/0°}$ 代表 $sin\omega t$。这两题所绘相量图有什么不同？

解： （1）$5\,sin(\omega t+30°)$

对应的相量为 $5\underline{/30°}$

（2）$-8\,cos(\omega t-45°)=8\,sin(\omega t-135°)$

相量为 $8\underline{/-135°}$

（3）$-6sin(\omega t-120°)=6sin(\omega t+60°)$

相量为 $6\underline{/60°}$

相量图如图8—6所示，其中各相量与图8—5中相应相量相比，均导前90°。 #

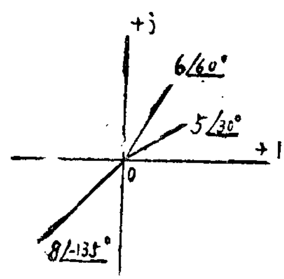


图8—6

8—11 试用相量以及本节所述的有关定理，求两个同频率的正弦波 $A_m cos\omega t$ 及 $B_m sin\omega t$ 之和。

解：将正弦波用旋转相量在实轴上的投影来表示，于是有

$$A_m\cos\omega t = Re(\dot{A}e^{j\omega t}),$$

其中相量 $\dot{A} = A_m\angle 0°$

$B_m\sin\omega t = B_m\cos(\omega t - 90°) = Re(\dot{B}e^{j\omega t})$

其中相量 $\dot{B} = B_m\angle -90° = -jB_m$

则 $A_m\cos\omega t + B_m\sin\omega t$

$= Re(\dot{A}e^{j\omega t}) + Re(\dot{B}e^{j\omega t})$

$= Re[(\dot{A}+\dot{B})e^{j\omega t}]$ (1)

而相量 $\dot{A}+\dot{B} = A_m - jB_m = C_m\angle -\phi$

式中 $C_m = \sqrt{A^2{}_m + B^2{}_m}$, $\phi = tg^{-1}\dfrac{B_m}{A_m}$

令 $\dot{C} = C_m\angle -\phi$，将 $\dot{A}+\dot{B} = \dot{C}$ 代入式(1)，得

$$A_m\cos\omega t + B_m\sin\omega t = Re(\dot{C}e^{j\omega t})$$

上式等号右端表示一个新的正弦波 $C_m\cos(\omega t - \phi)$

故 $A_m\cos\omega t + B_m\sin\omega t = C_m\cos(\omega t - \phi)$

式中 $C_m = \sqrt{A^2{}_m + B^2{}_m}$，$\phi = tg^{-1}\dfrac{B_m}{A_m}$ #

8—12，试用本节所述的有关定理说明：若干同频率正弦波之和仍为一同频率的正弦波。

证：设有 n 个同频率的正弦波 $A_1\cos(\omega t+\phi_1)$、$A_2\cos(\omega t+\phi_2)$、…、$A_n\cos(\omega t+\phi_n)$，则

$A_1\cos(\omega t+\phi_1) + A_2\cos(\omega t+\phi_2) + \cdots + A_n\cos(\omega t + \phi_n) = Re(\dot{A}_1e^{j\omega t}) + Re(\dot{A}_2e^{j\omega t}) + \cdots + Re(\dot{A}_ne^{j\omega t}) = Re[(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \cdots + \dot{A}_n)e^{j\omega t}]$

式中$\dot{A}_1 = A_1\angle\phi_1$，$\dot{A}_2 = A_2\angle\phi_2$ …，$\dot{A}_n = A_n\angle\phi_n$；

令n个相量之和　$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \cdots + \dot{A}_n = \dot{B} = B\angle\phi$，代入上式则得

$$A_1\cos(\omega t+\phi_1) + A_2\cos(\omega t+\phi_2) + \cdots$$
$$+ A_n\cos(\omega t+\phi_n) = Re(\dot{B}e^{j\omega t}) = B\cos(\omega t+\phi)$$

由此可知，若干同频率的正弦波之和仍为同一频率的正弦波。#

8—13　接续例8—11，试根据已求得的u_c稳态响应，求出i_L、u_L及u_R的稳态响应。例8—11电路如图8—7，$C=1F$、$R=\frac{3}{2}\Omega$、$L=\frac{1}{2}H$、$u_S(t)=\cos 2t\cdot U(t)V$，

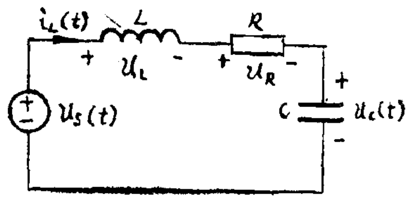


图8—7

求得稳态响应为　$u_c(t) = 0.316\cos(2t-108.4°)V$

解：（1）$i_L = C\dfrac{du_c}{dt} = 1\dfrac{d}{dt}Re(0.316\angle-108.4°e^{j2t})$

$$= Re(0.632\angle-18.4°e^{j2t})$$
$$= 0.632\cos(2t-18.4°)\ (A)$$

（2）$u_L = L\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}Re(0.632\angle-18.4°e^{j2t})$

$$= 0.632\cos(2t+71.6°)(V)$$

（3）$u_R = Ri_L = \dfrac{3}{2}\times 0.632\cos(2t-18.4°)$

$$= 0.948\cos(2t-18.4°)(V)\ \#$$

8—14　用相量法求解练习题8—4。

解：电路如图8—4，电路的微分方程为

$$L\frac{di}{dt}+Ri=10\cos t \qquad t\geqslant 0$$

用相量法求该电路微分方程的特解，设特解为

$$i_p=I_m\cos(t+\phi_i)$$

特解为与正弦激励u_S同频率的正弦波，分别以相量

$\dot{I}=I_m\underline{/\phi_i}$及$\dot{U}_S=10\underline{/0^\circ}$表示，则相应的复数方程为

$$L(j\omega)\dot{I}+R\dot{I}=10\underline{/0^\circ}$$

则 $$\dot{I}=\frac{10\underline{/0^\circ}}{R+j\omega L}$$

将$R=2$，$\omega=1$，$L=1$代入上式，得

$$\dot{I}=\frac{10\underline{/0^\circ}}{2+j}=2\sqrt{5}\underline{/-26.5^\circ}$$

于是 $I_m=2\sqrt{5}$， $\phi_i=-26.5^\circ$

故特解为 $i_p=2\sqrt{5}\cos(t-26.5^\circ)$ （A）

暂态响应的求法见练习题8—4的解答。

完全响应为

$$i(t)=i_h+i_p$$

$$=-4e^{-2t}2\sqrt{5}\cos(t-26.5^\circ)(A)\quad t\geqslant 0$$

电路进入稳态后，电流i滞后u_S角26.5°。 #

8—15 RLC串联电路在$t=0$时与正弦电压$2\cos 2t$接通。已知：$R=5\,\Omega$、$L=1\,H$、$C=1/4\,F$；$u_c(o)=1\,V$，$i(o)=1\,A$。试求电流的完全响应。

解： 电路 如图8—7所示，$u_S(t)=2\cos 2t$，各元件上电压、电流的关系为

$$u_L=L\frac{di_L}{dt},\qquad u_R=Ri_L,$$

$$i_L=C\frac{du_c}{dt} \quad 或 \quad \frac{du_c}{dt}=\frac{i_L}{C} \qquad (1)$$

由基尔霍夫电压定律得

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L+u_c=u_S(t) \tag{2}$$

式(2)对t求导数，并利用式(1)，得

$$L\frac{d^2i_L}{dt^2}+R\frac{di_L}{dt}+\frac{i_L}{C}=\frac{du_S(t)}{dt}$$

代入数据得 $\frac{d^2i_L}{dt^2}+5\frac{di_L}{dt}+4i_L=-4sin2t$

$$=4cos(2t+90°) \tag{3}$$

其相应的特征方程为

$$S^2+5S+4=0$$

故得固有频率 $S_1=-4$ 及$S_2=-1$。因此，齐次方程解的形式为 $i_{Lh}=K_1e^{-4t}+K_2e^{-t}$

下面用相量法求微分方程式(3)的特解，设特解为

$i_{Lp}=I_{Lm}cos(2t+\phi_i)$

特解及正弦波$4cos(2t+90°)$的频率相同，分别以相量$\dot{I}_L=I_{Lm}\underline{/\phi_{iL}}$及$4\underline{/90°}$表示，则相应的复数方程为

$$(j\omega)^2\dot{I}_L+5(j\omega)\dot{I}_L+4\dot{I}_L=4\underline{/90°}$$

将$\omega=2$代入，并整理得

$$\dot{I}_L=\frac{4\underline{/90°}}{j10}=\frac{2}{5}\underline{/0°}$$

故得特解 $i_{Lp}=\frac{2}{5}cos2t$

完全解为$i(t)=i_L(t)=i_{Lh}+i_{Lp}$

$$=K_1e^{-4t}+K_2e^{-t}+\frac{2}{5}cos2t \tag{4}$$

据初始条件$i(o)=1A$，$u_c(o)=1V$确定常数K_1和K_2。

将$t=0$时，$i(o)=1A$代入式(4)，得

$$K_1+K_2+\frac{2}{5}=1 \qquad (5)$$

又在$t=0$瞬间，$u_S(0)=2\cos(2\times0)=2(V)$，

$i(0)=1A$，$u_c(0)=1V$，$u_R(0)=R\cdot i(0)=5(V)$，

各电压满足KVL，即

$$u_L(0)+u_R(0)+u_c(0)=u_S(0)$$

代入数据，并整理得

$$u_L(0)=2-5-1=-4(V)$$

将式(4)对t求导数，得

$$\frac{di(t)}{dt}=\frac{u_L(t)}{L}=-4K_1e^{-4t}-K_2e^{-t}-\frac{4}{5}\sin 2t$$

将 $t=0$时，$u_L(0)=-4V$以及$L=1H$代入上式，得

$$4K_1+K_2=4 \qquad (6)$$

联立求解式(5)、(6)，则得

$$K_1=\frac{17}{15}, \qquad K_2=-\frac{8}{15}$$

故所求完全响应为

$$i(t)=\frac{1}{15}(17e^{-4t}-8e^{-t}+6\cos 2t) \quad (A)\#$$

思 考 题

（P3）1、图8—8所示为u_{ab}的波形，问u_{ba}的波形应如何？

解：u_{ba}的波形分别如图8—9(a)、(b)、(c)、(d)、所示。

（P13）1、(1)若$i_1(t)=10\cos(100\pi t+30°)A$，

$$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15°)A,$$

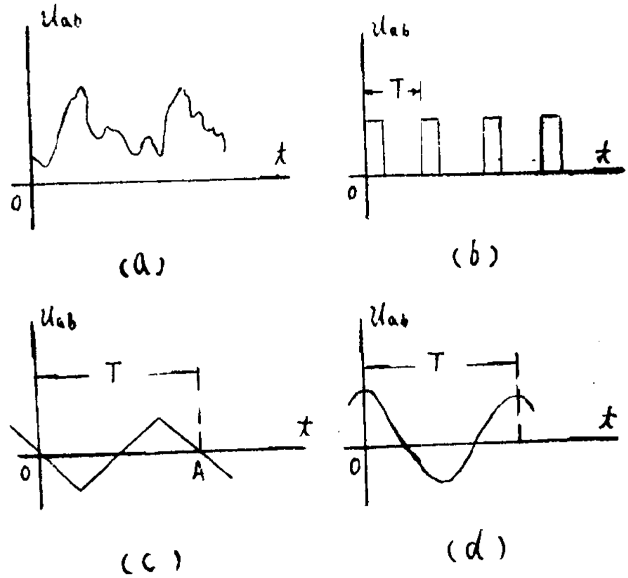

u_{ab}
t
0
(a)
u_{ab}
T
t
0
(b)
u_{ab}
T
t
0
A
(c)
u_{ab}
T
t
0
(d)

图 8—8

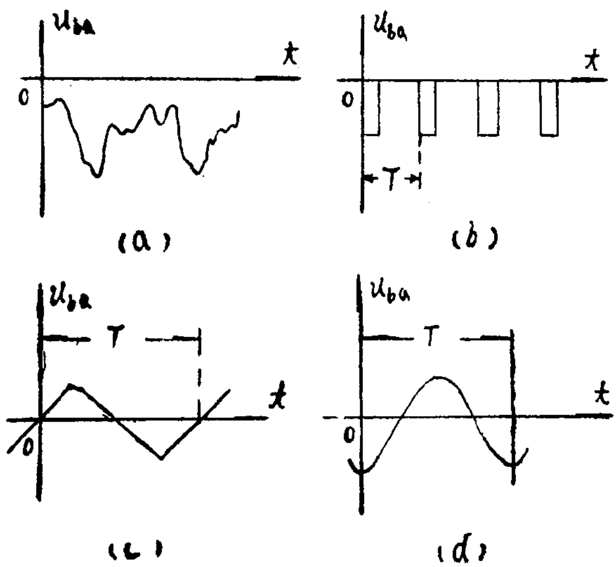

u_{ba}
t
0
(a)
u_{ba}
t
0
T
(b)
u_{ba}
T
t
0
(c)
u_{ba}
T
t
0
(d)

图 8—9

则i_1与i_2的相位差$\theta = 30° - (-15°) = 45°$，对吗？

（2）若$i_1(t) = 10\cos(100\pi t + 30°)A$，

$i_2(t) = 10\cos(200\pi t + 15°)A$，

则i_1与i_2的相位差为15°，对吗？

解：（1）因为$i_1(t)$是用cos函数表示的，$i_2(t)$是用sin函数表示的，所以i_1与i_2的相位差

$\theta \neq 30° - (-15°)$

正确的解法是，先将$i_1(t)$、$i_2(t)$均用sin函数（或cos函数）表示，如将$i_1(t)$改写成

$$i_1(t) = 10\cos(100\pi t + 30°)$$
$$= 10\sin(100\pi t + 120°)(A)$$

故 i_1与i_2的相位差$\theta = 120° - (-15°) = 135°$。

（2）所谓相位差是指两个同频率正弦波的初相角之差。这里i_1、i_2频率不同，并无相位差可言，说它们的相位差为15°，显然不对。 #

2、例8—1图8—10所示电流i，如参考方向改为由b指向a，$i(t)$的表示式应如何写？这两种参考方向下电流波形图一样吗？在同一时刻（譬如说$t = 0.5S$时）算得的电流瞬时值一样吗？如不一样，如何理解呢？

图8—10

由例8—1知，在图示参考方向下，$i(t)$的表示式为

$$i(t) = 100\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})mA \qquad (1)$$

式中 $\omega = 2\pi \quad rad/s$

解：(1)如参考方向改为由b指向a，则$i(t)$表示式为