

《数学竞赛试题汇编》

目 录

国内部分

- 一、1956年上海市数学竞赛试题及解答……………(1)
- 二、1956年北京市数学竞赛试题及解答……………(11)
- 三、1956年武汉市数学竞赛试题及提示……………(20)
- 四、1957年天津市数学竞赛试题及解答……………(23)
- 五、1957年武汉市数学竞赛试题及解答……………(27)
- 六、1957年南京市数学竞赛试题及解答……………(32)
- 七、1957年上海市数学竞赛试题及解答……………(36)
- 八、1957年北京市数学竞赛试题及解答……………(53)
- 九、1958年上海市数学竞赛试题及提示……………(67)
- 十、1958年武汉市数学竞赛试题及解答……………(71)
- 十一、1959年上海市数学竞赛试题……………(81)
- 十二、1962年北京市数学竞赛试题及解答……………(89)
- 十三、1963年北京市数学竞赛试题及解答……………(99)
- 十四、1963年南京市数学竞赛试题及解答……………(114)
- 十五、1964年北京市数学竞赛试题及解答……………(119)
- 十六、1964年江苏省数学竞赛试题及解答……………(136)
- 十七、1978年全国八省、市数学竞赛试题及解答
 - (1) 上海市……………(142)
 - (2) 北京市 第一试……………(147)

	第二试.....	(150)
(3) 安徽省	第一试.....	(155)
	第二试.....	(161)
(4) 天津市		(165)
(5) 陕西省	第一试.....	(175)
	第二试.....	(180)
(6) 广东省	预赛第一试.....	(189)
	预赛第二试.....	(195)
	决赛第一试.....	(200)
	决赛第二试.....	(205)
(7) 四川省(重庆市)	初试题.....	(210)
(8) 辽宁省	第一试.....	(218)
	第二试.....	(225)
(9) 全国	第一试.....	(232)
	第二试.....	(240)

2 国外部分

一、第一届(1959年)国际数学竞赛试题.....	(250)
二、第二届(1960年)国际数学竞赛试题.....	(251)
三、第三届(1961年)国际数学竞赛试题及解答.....	(253)
四、第四届(1962年)国际数学竞赛试题.....	(261)
五、第五届(1963年)国际数学竞赛试题.....	(262)
六、第六届(1964年)国际数学竞赛试题.....	(263)
七、第七届(1965年)国际数学竞赛试题.....	(264)
八、第十八届(1976年)国际数学竞赛试题.....	(265)
九、第十九届(1977年)国际数学竞赛试题及解答...	(266)

- 十、第二十届(1978年)国际数学竞赛试题及解答…(273)
- 十一、美国中学数学奥林匹克竞赛试题及解答
- 第一届(1972年)……………(283)
 - 第二届(1973年)……………(290)
 - 第三届(1974年)……………(297)
 - 第四届(1975年)……………(304)
 - 第五届(1976年)……………(311)
- 十二、第十七届莫斯科中等学校数学竞赛试题……………(317)
- 十三、苏联奥尔德荣尼基茨市第三次数学竞赛试题…(324)
- 十四、波兰第六届数学竞赛试题……………(327)
- 十五、苏联威特比斯克市数学竞赛试题……………(329)
- 十六、苏联西伯利亚科学分院数学竞赛试题……………(331)
-

1. 国内部分

一、1956年上海市数学竞赛试题及解答

[复赛]

$$169^n - 1$$

1.(a) 设 n 为正整数, 证明 $13^{2n} - 1$ 是 168 的倍数.

解: $\because a^n - 1$ 能被 $a - 1$ 整除 又 $\because 13^{2n} - 1 = (13^2)^n - 1, 13^2 - 1 = 168$ 而 $(13^2)^n - 1$ 能被 $13^2 - 1$ 整除, 故 $13^{2n} - 1$ 能被 168 整除

$\therefore 13^{2n} - 1$ 是 168 的倍数.

(b) 问: 具有那种性质的自然数 n , 能使 $1 + 2 + \dots + n$ 整除 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$?

$$\frac{n(1+n)}{2} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1+n}$$

解: 由等差数列求和公式得 $1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$= \frac{n(1+n)}{2}, \text{ 而 } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$$

$$\frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)} \text{ 是否整数, 可以从下列情况讨论:}$$

(1) 当 n 是奇数 即 $n = 2k + 1$ 时 (k 为正整数) 则

$$\frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)} = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{1+n}{2}\right)} = \frac{(2k)!}{(k+1)}$$

$\therefore 2k \geq k + 1$ 故 $k + 1$ 必可整除 $(2k)!$ 如 $k = 0$, 即 $n = 1$, 只要假定 $0! = 1$, 亦不例外.

(2) 当 n 是偶数, 即 $n = 2k$ 时 (k 为正整数), 分两种情况讨论:

① 当 $n = 2k$, $1 + n = 2k + 1$, 而 $2k + 1$ 为合数时.

设 $2k + 1 = a \cdot b$, $a \neq b$, 则 a, b 必为奇数, 均不大于

$$\frac{2k+1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)} &= \frac{2(n-1)!}{1+n} = \frac{2(2k-1)!}{2k+1} = \frac{2(2k-1)}{a \cdot b} \\ &= \frac{2[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2k-4)(2k-3)(2k-2)(2k-1)]}{a \cdot b} \\ &= 2 \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)(2k-1)}{a} \right] \cdot \\ &\quad 2 \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)(k-1)}{b} \right] \end{aligned}$$

$$\text{但 } 2k-1 \geq \frac{2k+1}{3} \text{ 和 } k-1 \geq \frac{2k+1}{3} (k \geq 4)$$

$\because k < 4$ 就不适合所设的条件. 在 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)(2k-1)$ 中, 必能找到一个与 a 相同的奇数; 同理, 在 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-2)(k-1)$ 中, 也能找到一个与 b 相同的奇数. 故在原式中,

$$\frac{2(2k-1)}{a \cdot b} \text{ 必为整数.}$$

同理当 $a = b$, 或 a, b 再可分解时, 所得的结论一样.

② 当 $n = 2k$ 而 $1 + n = 2k + 1$, 而 $2k + 1$ 为质数时.

因 $n+1$ 大于 $(n-1)!$ 中有一个数, 因此 $2(n-1)!$ 不可能被 $1+n$ 整除.

∴ 本题结论： n 为一个自然数，当 $n+1$ 不是质数时（但是 2 除外），则 $1+2+3+\cdots+n$ 能整除 $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ 。

2. 解不等式 $10^{2\lg x} + 4x - \log_2 32 > 0$

解：∵ $10^{2\lg x} = 10^{\lg x^2} = x^2$ ，及 $\log_2 32 = 5$

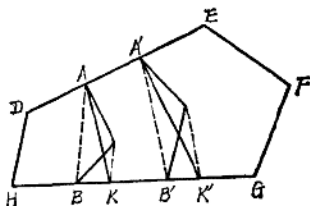
∴ $x^2 + 4x - 5 > 0$ ，得 $x > 1$ 或 $x < -5$ 。

∵ $x < -5$ 时， $\lg x$ 无意义。∴ 本题的解为 $x > 1$ 。

3. 两块水田之间有一条曲折的水沟（如图），今要把水沟的两岸变成直线而每块水田的面积不变，

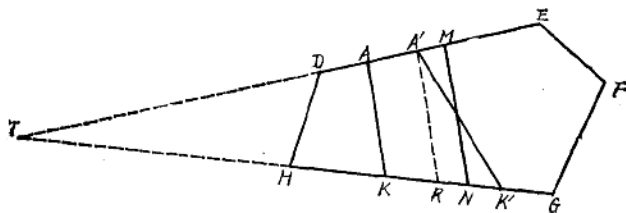
(a) 如 A, A' 两点不变，则水沟应如何配置？

(b) 如 A 点不变，而要求水沟两岸平行，则水沟又应如何配置？各说明其方法。



解：(a) 它的要求是把多边形变成边数少 2 的等积多边形，且 A, A' 两点不变。作法：联 AB ，作 $CK \parallel AB$ ，联 AK ，仿此作出 $A'K'$ 。

(b) 它的要求可从 (a) 所得的四边形 $AA'K'K$ 变成一等积的梯形 $AKNM$ 使 $NM \parallel AK$ 。



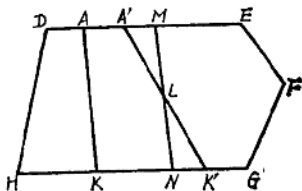
分析：令 MN 为所求作的线

(1) 如 DA' 不平行于 HK' ，则延长 $A'D$ 及 $K'H$ 使相交于 T ，作 $A'R \parallel AK$ ， $\triangle TA'R \sim \triangle TMN$ ， $\therefore \triangle TA'R$ 的面积： $\triangle TMN$ 的面积 $= TR^2 : TN^2$ 但 $\triangle TMN = \triangle TA'K'$ ， $\therefore \triangle TA'R$ 的面积： $\triangle TA'K'$ 的面积 $= TR^2 : TN^2$ ，又 $\triangle TA'R$ 与 $\triangle TA'K'$ 若分别以 TR 与 TK' 为底时，则为等高的三角形， $\therefore \triangle TA'R$ 的面积： $\triangle TA'K'$ 的面积 $= TR : TK'$

因此得 $TR^2 : TN^2 = TR : TK'$ $\therefore TN = \sqrt{TR \cdot TK'}$

作法：延长 $A'D$ 与 $K'H$ 相交于 T ，作 $A'R \parallel AK$ ，交 TK' 于 R ，作 TR 及 TK' 的比例中项，并在 TK' 上截 TN 等于这个比例中项，作 $NM \parallel RA'$ ，则 NM 即为所求水沟的一边。

(2) 如 $DA' \parallel HK'$ ，则只须求 $A'K'$ 的中点 L ，过 L 作 AK 的平行线 MN ，则 $\triangle LMA' \cong \triangle LNK'$ $\therefore MN$ 即所求水沟的一边。



4. 设有六位数 $1abcde$ 乘以 3 后，变为 $abcde1$ ，求这数。

解：令五位数 $abcde$ 为 x ，则 $1abcde = 100000 + x$ ，

$abcde1 = 10x + 1$ ，得方程 $(100000 + x) \cdot 3 = 10x + 1$ ， $\therefore 7x = 299999$ ， $x = 42857$ 。 $\therefore$ 这六位数为 142857。

5. 作一圆周，要求只用圆规（不许用直尺），把这圆周四等分。

解：令圆心为 O ，半径为 R ，在圆周上任取一点 A 为圆心，以 R 为半径连续作弧可以得 B, C, D 等点，则 $AB = R$ ， $AC = \sqrt{3}R$ ， $AD = 2R$ ，（因 AC 是圆内接等边三角形的一边，

$$BQ \cdot \cos 135^\circ$$

$$\text{即 } 266^2 = x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 22\frac{1}{2}^\circ + 2x^2 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{解之得, } x^2 = 266^2 \cdot \frac{1 + \cos 45^\circ}{3},$$

$$\text{即 } x = 266 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{6}} \approx 201 (\text{公尺})$$

因测点离地 1 公尺, 故 $201 + 1 = 202$ (公尺), 答: 气球离地约 202 公尺。

〔决 赛〕

1. 从 1 到 100 的自然数中, 每次取两个数, 要它们的和大于 100, 有多少种取法?

解: 把 1 到 100 分为 1 到 50 和 51 到 100 两部分。

当 n 是 1、2、3、……、50 时, 则取法各为 1、2、3、……、50 种。

当 n 是 51、52、……100 时, 则取法各为 50、51、……、99 种。

但两种取法是重复的所以必须以 2 除之。

$$\text{共有取法 } \frac{1}{2} \left[(1 + 2 + 3 + \dots + 50) + (50 + 51 + 52 + \dots + 99) \right] = 2500 (\text{种})$$

2. 设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ 成等差数列, 求证

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$$

又设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ 成等比数列, 求证

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{2^n \sqrt{a_1 a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_{n+1}}} (a_1 - a_{n+1}). \end{aligned}$$

证明: (1) 令公差为 d , 则 $a_1 - a_2 = -d, a_2 - a_3 = -d, \dots$

$a_n - a_{n+1} = -d$, 将以上式子两边各相加得 $a_1 - a_{n+1}$

$$= -nd.$$

$$\therefore -d = \frac{a_1 - a_{n+1}}{n}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{n+1}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{n+1}}}{\frac{a_1 - a_{n+1}}{n}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}. \end{aligned}$$

(2) 令公比为 q , 则 $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,

将以上式子两边各相乘得 $\frac{a_{n+1}}{a_1} = q^n, \therefore q = \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sqrt{a_1^2 q} + \sqrt{a_1^2 q} + \dots \\ & \dots + \sqrt{a_n^2 q} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \sqrt{q} \\ &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}} = \frac{a_1 \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_1}\right)}{1 - \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}} \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_1 - a_{n+1})}{\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_{n+1}}} \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}} \\
&= \frac{\sqrt[n]{a_1 a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_{n+1}}} (a_1 - a_{n+1}).
\end{aligned}$$

3. 设多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 的系数都是整数, 并且有一个奇数 α 及一个偶数 β , 使得 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 都是奇数, 求证方程 $f(x) = 0$ 没有整数根.

证明: (1) 因 β 是偶数, 则 $f(\beta) = a_0 \beta^n + a_1 \beta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \beta + a_n = \beta(a_0 \beta^{n-1} + a_1 \beta^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + a_n$.

由于 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 都是整数, β 为偶数, 故知第一个加数必为偶数, 但 $f(\beta)$ 是奇数, 故 a_n 一定是奇数.

若 β' 为一偶数, 则 $f(\beta') = \text{偶数} + a_n = \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0$.
 $\therefore$ 方程 $f(x) = 0$, 决无偶数根.

(2) 因 α 是奇数, 则 α^k (k 为正整数) 也是奇数, 而 $a_k \alpha^k$ 是奇数或是偶数, 完全由 a_k 是奇数或偶数而定.

则 $f(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha) + \text{奇数}$.

但 $f(\alpha)$ 是奇数故 $a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha$ 一定是偶数亦即 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ 必为偶数.

若 α' 为一奇数, 则 $f(\alpha') = (a_0 \alpha'^n + a_1 \alpha'^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha') + a_n = \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0$, $\therefore$ 方程 $f(x) = 0$ 决无奇数根.

综上所述, 方程 $f(x) = 0$ 没有整数根.

4. 设 $\triangle ABC$ 为任意三角形, 求证:

$$(1) \quad \lg^2 \frac{A}{2} + \lg^2 \frac{B}{2} + \lg^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$(2) \quad \cos A + \cos B + \cos C > 1$$

证明: (1) $\because (\lg \frac{A}{2} - \lg \frac{B}{2})^2 \geq 0$.

$$\therefore \lg^2 \frac{A}{2} + \lg^2 \frac{B}{2} \geq 2 \lg \frac{A}{2} \lg \frac{B}{2}, \quad \lg^2 \frac{B}{2} + \lg^2 \frac{C}{2} \geq 2 \lg \frac{B}{2}$$

$$\cdot \lg \frac{C}{2}, \quad \lg^2 \frac{C}{2} + \lg^2 \frac{A}{2} \geq \lg \frac{C}{2} \lg \frac{A}{2} \text{ 不等式两边各}$$

$$\text{相加, 得 } \lg^2 \frac{A}{2} + \lg^2 \frac{B}{2} + \lg^2 \frac{C}{2} \geq \lg \frac{A}{2} \lg \frac{B}{2} + \lg \frac{B}{2}$$

$$\cdot \lg \frac{C}{2} + \lg \frac{C}{2} \lg \frac{A}{2}$$

$$\text{又} \because \lg \frac{A}{2} \lg \frac{B}{2} + \lg \frac{B}{2} \lg \frac{C}{2} + \lg \frac{C}{2} \lg \frac{A}{2} = 1,$$

$$\therefore \lg^2 \frac{A}{2} + \lg^2 \frac{B}{2} + \lg^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

(2) 由和差化积法很容易证明,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\because \sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2} \text{ 均为正值,}$$

$$\therefore \cos A + \cos B + \cos C > 1.$$

5. 在已知圆内求作内接等腰三角形, 使这等腰三角形的底与其底上的高的和为极大.

已知: 圆O, 半径为r. 求作: 于圆O内作内接等腰三角形, 使其底和底上的高的和为极大.

分析: 令圆内接等腰 $\triangle ABC$ 高是AE, 则AE过圆心O.

令 $\angle OCE = \alpha$, 则 $CE = \gamma \sin \alpha$,

$$EC = \gamma \cdot \cos \alpha.$$

$$BC + AE = 2\gamma \cos \alpha + (\gamma + \gamma \sin \alpha)$$

$$= \gamma + \sqrt{5} \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \alpha + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha \right)$$

$$= \gamma + \sqrt{5} \gamma (\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi)$$

$$= \gamma + \sqrt{5} \gamma \sin(\alpha + \phi) \quad (\phi = \arctan 2)$$

当 $\alpha + \phi = 90^\circ$, 即 $\alpha = 90^\circ - \phi$ 时, $\sin(\alpha + \phi) = 1$ 为最大.

即底和底边上的高有极大值 $\gamma(1 + \sqrt{5})$

$$\text{这时 } \tan \alpha = \tan(90^\circ - \phi) = \cot \phi = \frac{1}{2}$$

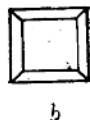
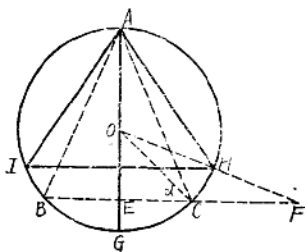
作法: 在直径 AOG 上取任意长 OE , 作 $EF \perp OE$, 且令 $EF = 2OE$. 联 OF 交圆于 H , 联 AH , 并在圆上截取 AI , 使 $AI = AH$, 联 IH , 则 $\triangle AIH$ 为所求的三角形. (证明从略)

6. 下图是一个立体的展开图, 那就是说, 适当拼合起来就成一个立体.

问(1)那些线段在拼合时分别与线段1, 2, 3相重合? 请在它们上面用同样数码注出.

(2)这是什么图形? 为什么?

解: (1)拼合时 $1'$ 与 1 重合, $2'$ 与 2 重合, $3'$ 与 3 重合, (如图) (2)这是一个正四棱台 (图b)



因这个多面体共有六个面，上下两底都是正方形、而四个侧面则都是等腰梯形，且互相全等。

二、1956年北京市数学竞赛试题及解答

第一试试题和解答

1. 证明 $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ 对任何正整数 n 都是整数，并且用 3 除时余 2.

$$\begin{aligned} \text{证明: } n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}(2n+1) - 1 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

对任何整数 n ， $\frac{n(n+1)}{2}$ 为整数，故原式为整数。(1)式末端

又可以写作 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8} - 1$ ，而 $2n$ ， $2n+1$ ， $2n+2$ 中

至少有一个是 3 的倍数，又 3 与 8 互质，所以 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$

是能被 3 整除的整数。于是原式等于 3 的整数倍减去 1，因而用 3 除它时必余 2。

2. 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根为 r 和 s ，且它们都不等于

0。求以 $r^2 + \frac{1}{s^2}$ 和 $s^2 + \frac{1}{r^2}$ 为根的方程（不必解出原方程）。

$$\text{解: 所求方程应为 } \left[x - \left(r^2 + \frac{1}{s^2} \right) \right] \left[x - \left(s^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] = 0$$

$$\text{即 } x^2 - (r^2 + S^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{S^2})x + (r^2 S^2 + 2 + \frac{1}{r^2 S^2}) = 0 \dots$$

...(1) 但是 r, S 是 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, 由根与系数的关系, 知道 $r + S = P$, $r \cdot S = q$, 所以

$$\begin{aligned} r^2 + S^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{S^2} &= \frac{(r^2 S^2 + 1)(r^2 + S^2)}{r^2 S^2} \\ &= \frac{(q^2 + 1)(p^2 - 2q)}{q^2}, \quad r^2 S^2 + 2 + \frac{1}{r^2 S^2} \\ &= q^2 + 2 + \frac{1}{q^2} = (q + \frac{1}{q})^2. \end{aligned}$$

将以上结果代入(1), 得方程

$$x^2 - \frac{(q^2 + 1)(p^2 - 2q)}{q^2}x + (q + \frac{1}{q})^2 = 0.$$

3. 试证恒等式

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

$$\text{证: } \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos nx,$$

$$\sin(n - \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{3}{2})x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos(n - 1)x,$$

.....

$$\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos x$$

$$\sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{2}x (\frac{1}{2}),$$

将上面所有等式的两边分别相加, 则得

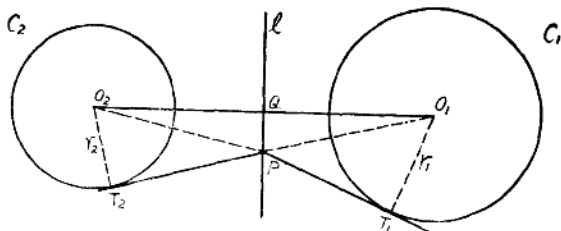
$$\sin(n + \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{1}{2}x (\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots)$$

$$+ \cos nx),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

4. 设 C_1 、 C_2 是给定的两个圆，又 C_1 、 C_2 不相交，并且一个在另一个的外部。由一点 P 作 C_1 、 C_2 的切线 PT_1 、 PT_2 ，设 $PT_1 = PT_2$ ，求 P 点的轨迹。

解：设 C_1 、 C_2 的圆心分别为 O_1 、 O_2 ，作 $PQ \perp O_1O_2$ （或其延长线）交 O_1O_2 于 Q ，



$$\text{则 } O_1P^2 = PT_1^2 + O_1T_1^2 = PT_1^2 + r_1^2,$$

$$O_2P^2 = PT_2^2 + O_2T_2^2 = PT_2^2 + r_2^2,$$

两式相减，得：

$$O_1P^2 - O_2P^2 = PT_1^2 + r_1^2 - PT_2^2 - r_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

$$\text{然而 } O_1P^2 - O_2P^2 = (O_1Q^2 + QP^2) - (O_2Q^2 + QP^2) \\ = O_1Q^2 - O_2Q^2,$$

$$\text{所以 } O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

$$\text{或者 } (O_1Q + O_2Q)(O_1Q - O_2Q) = r_1^2 - r_2^2.$$

若两圆互不包含，则 Q 在 O_1 、 O_2 之间，而

$$O_1Q + O_2Q = O_1O_2 = d.$$

$$\text{于是 } O_1Q - O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明 Q 内分 O_1O_2 之比为常数。若 C_1 包含 C_2 ，则 Q 在 O_1O_2 之延长线上，而

$$O_1Q - O_2Q = O_1O_2 = d,$$

$$\text{于是 } O_1Q + O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

这说明 Q 外分 O_1O_2 之比为常数。两种情形都表示 Q 为定点，与 P 点的选取无关。所以

对两圆相等的切线的点一定在一直线 l 上，这直线垂直两圆的连心线于一定点 Q ，而 Q 以 $(r_1^2 - r_2^2)/d$ 之比分线段 O_1O_2

..... (1)

反之，若在直线 l 上任取一点 R ，再由 P 向两圆作切线 RS_1 ， RS_2 ，则 $RS_1^2 = RO_1^2 + r_1^2 = RQ^2 + O_1Q^2 + r_1^2$ 。

$$RS_2^2 = RO_2^2 + r_2^2 = RQ^2 + O_2Q^2 + r_2^2.$$

根据 (1) 又知道 $O_1Q^2 + r_1^2 = O_2Q^2 + r_2^2$ 。所以 $RS_1^2 = RS_2^2$ ，因此知道：

从直线 l 上任意一点到两圆的切线必然长度相等。 ... (2)

总结(1)和(2)即知 P 点的轨迹是直线 l 。

第二试 试题和解答

1. 有一群儿童，他们的年龄之和50岁，其中最大的13岁，有一个是10岁；除去10岁的这个儿童之外，其余儿童的年龄恰好组成一个等差数列。问有几个儿童？每个儿童几岁？