

材料力学

(下 册)

2

华东化工学院

工 程 力 学

材料力学部分目录

第六章	直梁的平直弯曲——剪力和弯矩	6-1
§ 6-1	弯曲的一般概念	6-1
§ 6-2	梁的支座和它的反力	6-2
§ 6-3	梁的横截面上的内力——剪力和弯矩	6-5
§ 6-4	载荷集度、剪力和弯矩之间的关系	6-7
§ 6-5	剪力图和弯矩图	6-9
§ 6-6	用叠加法画Q图和M图	6-14
第七章	直梁的平直弯曲——应力和变形	7-1
§ 7-1	弯曲时的正应力	7-1
§ 7-2	矩形和圆形截面的惯性矩和抗弯矩	7-7
§ 7-3	中性主惯性轴的概念	7-12
§ 7-4	弯曲时的强度计算	7-15
§ 7-5	梁的合理截面形状	7-18
§ 7-6	矩形截面梁在弯曲时的剪应力	7-20
§ 7-7	直梁变形的概念	7-26
§ 7-8	梁的弹性曲线的微分方程式	7-28
§ 7-9	用叠加法求梁的变形	7-36
§ 7-10	最简单的超静定梁	7-38
第八章	复合抗力	8-1
§ 8-1	复合抗力的概念	8-1
§ 8-2	斜弯曲	8-1
§ 8-3	弯曲与拉伸或压缩的合成(大刚度杆)	8-5
§ 8-4	弯曲与扭转的合成	8-11

第九章	稳定问题	9-1
§ 9-1	稳定和不稳定平衡、压杆的稳定性	9-1
§ 9-2	临界力的计算、欧拉公式	9-2
§ 9-3	欧拉公式的应用范围、决定临界应力的经验公式	9-4
§ 9-4	按照许用应力折减系数的方法来计算压杆的许用应力	9-6
§ 9-5	平板的稳定概念	9-11
§ 9-6	壳的稳定概念	9-17
§ 9-7	薄壁圆筒的稳定概念	9-19

第十章	动载荷	10-1
§ 10-1	惯性力	10-1
§ 10-2	起重用的钢丝绳的应力	10-2
§ 10-3	等速回转圆环的计算	10-3
§ 10-4	冲击载荷	10-5
§ 10-5	冲击拉伸时的应力和变形	10-6

第十一章	交变载荷	11-1
§ 11-1	交变载荷的概念	11-1
§ 11-2	交变载荷下的强度、关于金属疲劳的概念	11-1
§ 11-3	金属的疲劳极限、疲劳试验	11-3
§ 11-4	影响疲劳极限的因素	11-6
§ 11-5	在对称循环下许用应力的决定	11-9

附录	按照 GOST 10004-39-10017-39 三根钢规范	11-11
----	---------------------------------	-------

第六章 直梁的平面弯曲——剪力和弯矩

§6-1 弯曲的一般概念

如果一根直杆的外力，是一个作用在杆轴平面内的平衡力偶系，或者是一个作用在杆轴平面内且各力和杆轴相垂直的平衡力系，那么这种外力都会引起杆的弯曲变形。凡是以这种变形为主要变形的直杆，就叫做梁。梁是机器和结构中常遇到的一种杆件。

梁的弯曲变形，主要是由作用在梁上的外力偶矩，或者由作用在梁上和梁轴成垂直的外力被梁传递时所产生的力偶矩所引起的。（例如在图 6-1 中，梁要把它的支承反力传递到主动力 P 的地方，使它们相互平衡，这时就产生力偶矩），这种外力偶矩称为外弯矩，用 M_B 来表示。如果一个力偶矩作为梁的内力，即称为内弯矩或弯矩，用 M 来表示。作用在梁上和梁轴成垂直的外力，称为横力。梁在横力或力偶矩的作用下所发生的弯曲称为横弯曲。

如果梁有一个通过它的轴线的对称面，并且它的各外力

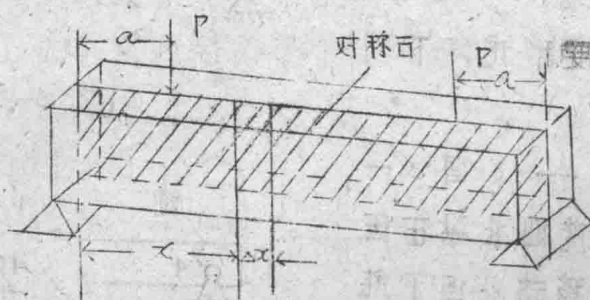


图 6-1

都作用在这个对称面内，则因梁的弯曲变形完全可以用这个平面的变形情况来表达，故这种弯曲，叫做平面弯曲，它也是

一般所讲的弯曲。图 6-1 表示一根承受平面弯曲的梁。

§6-2 梁的支座和它的反力

梁一般都是放置在支座上的。我们称它为支承。作用在梁上的载荷（主动力）引起支座对梁的约束反作用力（简称反力）。这些力，即载荷和反力，都是梁的外力，详情已在应用力学部分讲过了。如要研究梁的应力和变形，首先必须确定梁所受到的全部外力。

作用在梁上的载荷通常是已知的。它可分为集中力、力偶及分佈载荷三种。（图 6-3），集中力 P 的单位为公斤或吨。力偶（用它的矩来表示） M_B 的单位为（公斤—公分）或（吨公尺）。分佈载荷都用它的沿着梁轴的密集程度 q （即作用在单位长度上的力）来表示。单位为（公斤/公尺）或（公吨/公尺）。集度不均匀的分佈载荷，用 $q(x)$ 来表示。它说明载荷集度是 x 的函数。

支座的反力通常是未知的。要决定反力，必须了解支座的形式。

支座的主要形式有下列三种：

1. 铰链支座——（图 6-4），它能阻止梁在任何方向的移动，但不能阻止梁绕着铰链中心 A 作转动。所以这种支座的反力必须通过铰链的中

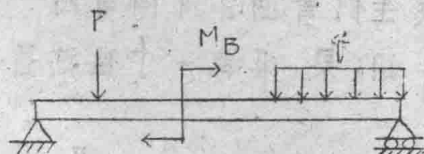


图 6-3

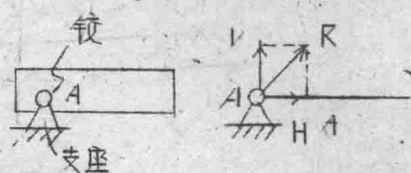


图 6-4

心，它的大小和方向均为未知，但可以用两个分力来表示。

一个是水平分力 H ，另一个是垂直分力 V ，故未知的反力数有二个。

② 光滑铰支座 —— 将铰链支座放在辊轴上，就成为光滑铰的支座，（参 6-5）这种支座的约束只能阻止梁在垂直于支座方向的移动，

所以它的约束反作用力应通过铰的中心，并且垂直于支座面。设在此只有一个未知反力 V 。

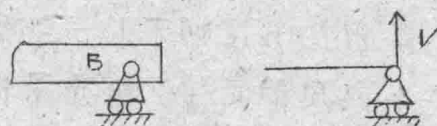


图 6-5

③ 固定端支座 —— 以梁的一端插入绝对刚硬的墙内，成为一个固定端支座，如参 6-6（甲）这种支座的约束能阻止梁作任何方向的移动和转动，所以固定端有三个未知反力，即垂直方向和水平方向的反力 V 和 H ，以及反力偶 M 。

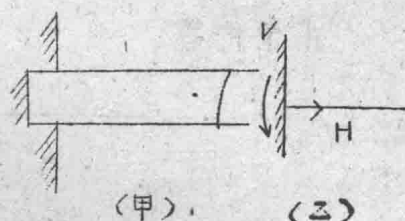


图 6-6

以上的三种支承形式，形成了一种想象的约束，在实际上，梁和支座的连接，

并非一定是真的连接，或者梁的一端并非插在真正是刚硬的墙内，不过经过适当的简化或假定后，仍旧可以采用上述的支承形式来求约束反力的。

例如，计标椅在二轴承上的轴的反力时，如参 6-7（甲）

可把它的支承形式简化为如

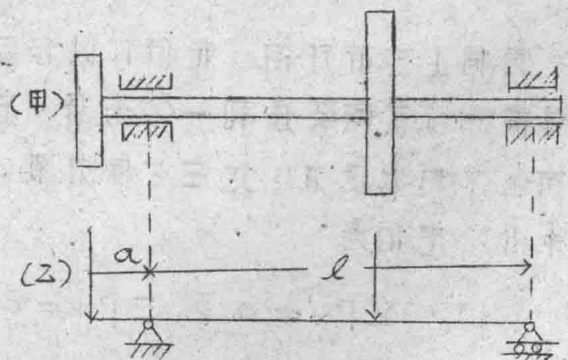


图 6-7

图 6-7 (乙) 所示的情况，即它的一个支座作为铰链支座，
 (因水平位移受限制) 另一个作为光滑面支座，跨度 \$L\$ 即为二
 轴承中心的距离。

根据梁的支承情况，梁可分为静定和超静定梁二种类型。
 凡梁的反力按既了力学平衡条件能完全确定的，均为静定梁。
 反之，为超静定梁。静定梁的基本型式可分为以下三种：

1. 简支梁：如图 6-8 (甲)，梁的一端用一铰链支座，另一
 端则用一光滑面支座。
2. 外伸梁：如图 6-8 (乙)，梁的支座情况与简支梁相同，但
 梁的一端（或二端）均向支座外伸出。
3. 悬臂梁：如图 6-8 (丙)，梁的一端是一个固定端支座，另
 一端是自由的。这种支承方式可用图 6-8 (丁) 所示的方
 式来代替。

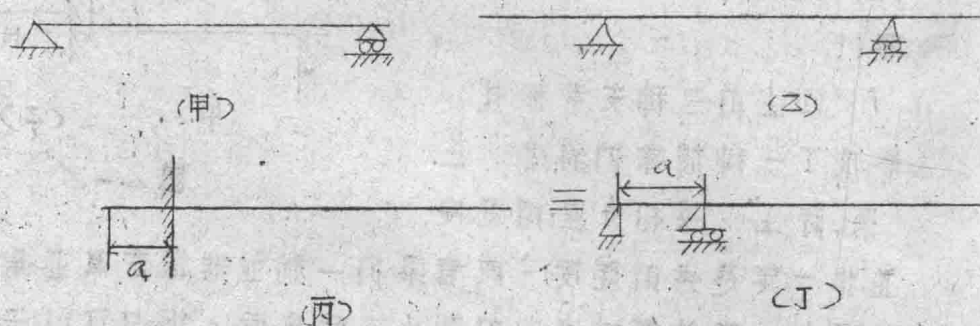


图 6-8

根据上面所述的，我们可以作出这样的一个小结：静定梁
 总是被一个铰链支座和一个光滑面支座来约束的。因此，它
 只有三个约束反力，这三个反力就可以用力系的三个平衡等式
 来求介，它们是

$$\sum P_x = 0; \quad \sum P_y = 0; \quad \sum M = 0$$

§ 6-3 梁的横截面上的内力——剪力和弯矩

图 6-9 (甲) 所示的高支梁 AB ，在它的对称面内作用着二个横向力 P_1 和 P_2 ，把梁的反力 A 和 B 求出后，则全部外力均为已知。于是即可用截面法求出梁的任一横截面上的内力。为此，在离梁的左端 x 地方，假想沿横截面 $m-n$ 把梁切开，分成左右二段，去掉右段而左段为自由体，如图 6-9 (乙) 所示，为了要保持该段梁的平衡状态，必须加上作用在横截面上的各个内力，来代替梁的右段对左段的作用。

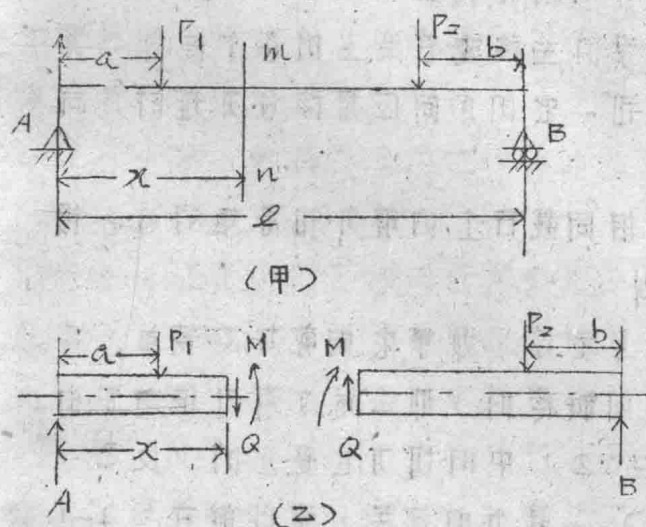


图 6-9

根据平面平行力系的平衡条件， A 和 P_1 二个力还需要一个平衡力，按理它就应该作用在横截面 $m-n$ 上的内力了。但是，在实际上这个平衡力不一定作用在横截面上，因此，我们必须把它平移到横截面上去，这样就引出了一个力偶矩。由此可知，横截面 $m-n$ 可能受到二个内力的作用，一个是和横截面同面的横向力，叫做剪力或切力，用 Q 来表示，另一个是力偶矩，它就是弯矩 M ，它的作用面和横截面成垂直。这二个内力的数值可根据平面平行力系的平衡条件来决定，若取横截面的形心为力矩中心，则得

$$\sum F_y = 0 \quad \text{即} \quad Q = A - P_1 \quad \text{--- (6-1)}$$

$$\sum M = 0 \quad \text{即} \quad M = Ax - P_1(x-a) \quad \text{--- (6-2)}$$

如果取梁的右段作为自由体，则作用在横截面 $m-m$ 上的剪力 Q 和弯矩 M 是

$$Q = P_2 - B, \quad M = B(l - x), \quad P_2 = (l - l - x)$$

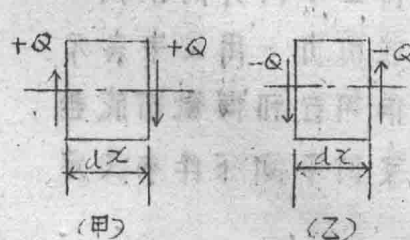
它的数值，应和由公式 (6-1) 和 (6-2) 所给出的完全相同，但方向相反。

由上可知，剪力 Q 的数值，就等于作用在梁的左段或右段上的各个横向外力所合力，剪力的方向应和该合力的方向相反。弯矩 M 的数值就等于作用在梁的左段或右段上的各个横向外力对横截面形心的力矩的代数和，它的方向应和该合力矩的方向相反。

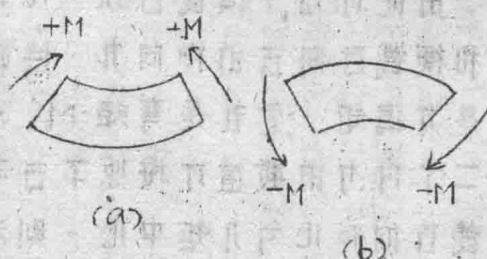
为了使作用在二梁段的相同截面上的剪力和弯矩符号各相等，我们是出了如下的规则。

从梁中截面长为 dx 的单元体，如果它的剪力 Q 使单元体内任意一点的矩是顺时针方向旋转的，那么这个剪力作为正的，如参 6-10 (甲) (在参 6-9 (乙) 中的剪力也是正的)。反之，作为负的，如参 6-10 (乙)。剪力的符号，和以前在 § 4-1 中讲过的是完全一致的。

如果由弯矩 M 所引起的梁的弯曲变形是向下凸出的，则这个弯矩是正的，如参 6-11 (甲)。反之，若梁的变形是向上凸出的，这个弯矩是负的，如参 6-11 (乙)。



参 6-10



参 6-11

因为剪力 Q 就是由作用在横截面上的剪应力 τ 所合成的合

力，弯矩 M 就是由横截面上的正应力 σ 所合成的力偶矩，所以，知道了 Q 和 M 后，我可以求出 τ 和 σ 的数值，由弯矩引起的正应力 σ 又称为弯应力。

§ 6-4 载荷集度、剪力和弯矩之间的关系

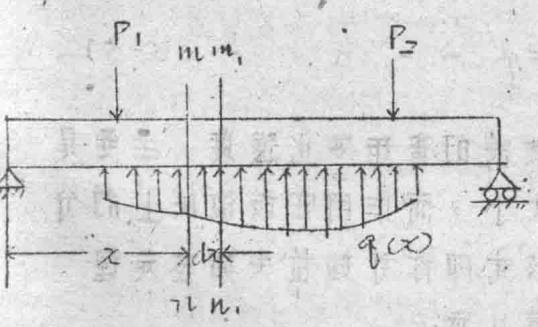
作用在梁的各截面上的剪力和弯矩，通常是随着横截面的位置而变化的，因此，它们和集度不均匀分布的载荷一样，都是为截面的坐标位置 x 的函数，因此在这三者之间一定存在着某种关系。现在我们就加以讨论。

设有一梁，它的外力为二个集中力 P_1 和 P_2 及分布载荷 $q(x)$ ，如参 6-12 (甲)。

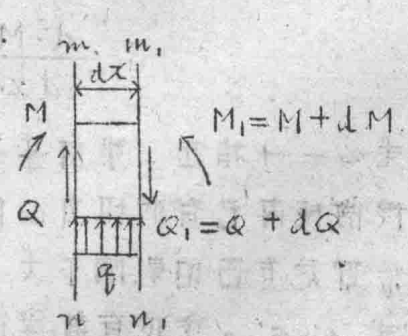
今在分布载荷的区域内任意截取一段长为 dx 的单元体，如参 6-12 (乙)，并假定作用在这微段上的载荷是均匀分布的，它的集度为 q ，若以 Q 和 M 来表示作用在截面 $m-n$ 上的剪力和弯矩，以 Q_1 和 M_1 表示作用在截面 m_1-n_1 上的剪力和弯矩，则因作用在这一微段上没有其它的外力，所以作用在这二个截面上的内力，只相差一个微量 dQ 和 dM ，即

$$Q_1 = Q + dQ$$

$$M_1 = M + dM$$



(甲)



(乙)

参 6-12

由于这一微段应保持平衡，所以根据平衡条件应：

$$\sum F_y = 0$$

即

$$Q + q dx - (Q + dQ) = 0$$

简化后得

$$dQ = q dx$$

或

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (6-3)$$

该式说明：在梁的某一微段内，剪力 Q 的变化速度是决定于作用在该微段上的载荷集度 q （向上为正）；

现以截面 m_1-n_1 的形心为力矩中心，即

$$\sum M = 0$$

即

$$M + Q dx + q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

简化后得：

$$dM = Q dx + q \frac{(dx)^2}{2}$$

略去式中的高阶微量后得

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (6-4)$$

或

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (6-5)$$

公式 6-4 指出：梁的某一微段的弯矩变化速度，主要是决定于该微段内已有的剪力 Q 的大小，而作用在该微段上的分布载荷 q 对这方面的影响不大。该式即称为拉夫斯基定理。至于公式 6-5，它仅有数学的意义而已。

§ 4-5 剪力图和弯矩图

梁的各横截面上所受到的切应力和正应力的数值，分别和作用在各横截面上的剪力 Q 和弯矩 M 的大小有关系。而剪力 Q 与弯矩 M 都是沿着梁轴而变化的，即它们都是横截面的位置 x 的函数。如要找而梁的最危险的截面，即受到最大切应力或最大正应力的截面，则首先要知道各截面的位置以及作用在截面上的内力情况。因此就有必要把剪力 Q 和弯矩 M 的变化规律用图形表示出来。作用在各横截面上的内力，可按 § 4-3 所述的方法来求。

作图时一般将坐标原点放在梁的左端，用横坐标表示横截面的位置，纵坐标表示作用在各横截面上的剪力 Q 和弯矩 M 的数值。这些数值应该按照了一定的比例尺画在相应横截面的坐标位置上。通常把正的剪力和弯矩画在横坐标轴的上边，负的画在下边。最后我们就得到二条曲线，它们指出了 Q 和 M 沿位置 x 的变化情况，从此即可求出最大剪力和最大弯矩的数值和作用的位置。

例 1：设有一悬臂梁在它的自由端 B 上作用着一个集中力 P ，如图 4-13 (甲)，求支座反力，并作而梁的 Q 和 M 图。
解：先令梁和支座脱离，再

1. 求反力：

由力系平衡条件得

$$\sum F_y = 0 \quad A - P = 0 \quad \therefore A = P$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A + Pl = 0 \quad \therefore M_A = Pl$$

2. 作 Q 图

和固定端相距 x 处 ($0 \leq x \leq l$)，取任一横截面 $m-m$ ，取截面的右段作自由体，来计算作用在这一截面上的剪

力，它应是

$$Q(x) = P \quad (\text{正值})$$

因为 Q 值与 x 无关，即它是一常数，而各截面上的剪力不变，于是 Q 图是一条平行于横坐标轴的直线，并画在轴线的上方如图 6-13 (乙)。

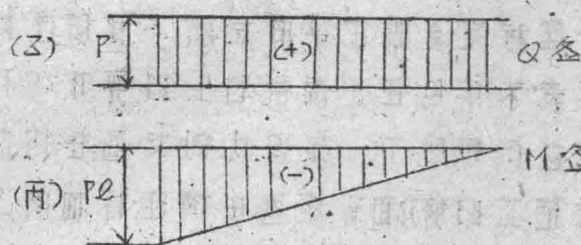
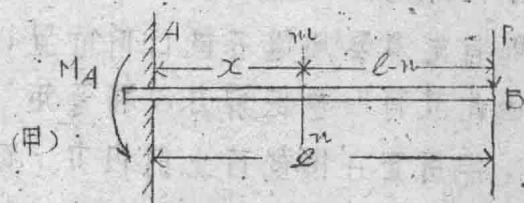


图 6-13

3. 作 M 图

计算横截面 $m-n$ 的弯矩时，可取截面的右段来进行计算，但也可取截面的左段来进行计算，但在这里取截面的右段来进行计算，较为简单，因为作用在右段上的外力仅是一个 P 力。该截面所得到的弯矩是

$$M(x) = -P(l-x)$$

这公式于是一次方程式，所以 M 图是一条倾斜的直线。作图时只需求出梁内任意两截面上的弯矩。

$$\text{在 } x=0 \text{ 时} \quad M(0) = -Pl$$

$$\text{在 } x=l \text{ 时} \quad M(l) = 0$$

将所得的两个弯矩数值按一定比例尺作力纵坐标距离

画在轴线的下方（因 $M(0)$ 为负值）用直线连接这两点，就得到 M 图，如图 6-13（丙）。

危险截面就是固定端截面，绝对值最大的弯矩是

$$|M_{\max}| = Pl$$

例二：设有一个简支梁，长为 l ，它的载荷如图 6-14（甲）所示，求 Q 和 M 图。

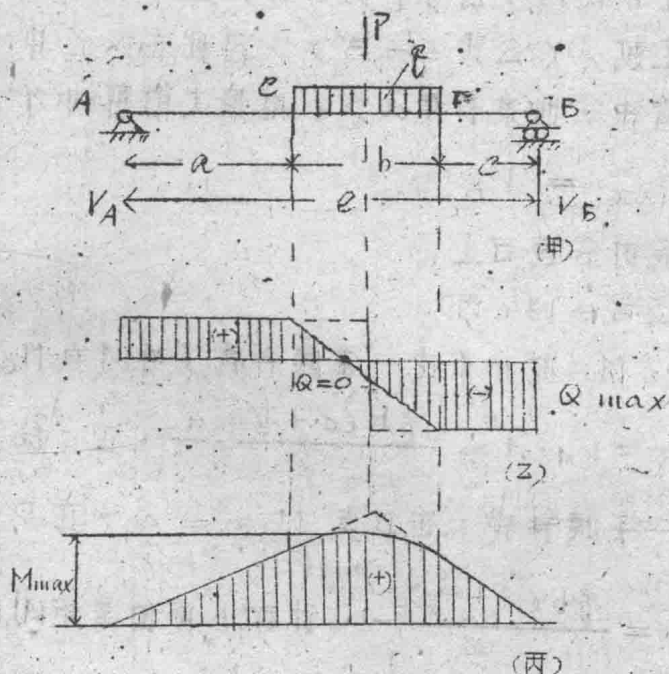


图 6-14

解：先解除梁的约束，再

求反力 V_A 和 V_B

把分布力合成一个集中力 P ，它作用在 b 段的中点，

以 A 点为力矩中心，由 $\sum M_A = 0$ 得

$$V_B = \frac{q b (a + \frac{b}{2})}{l}$$

以 B 点为力矩中心，得 $\sum M_B = 0$ ，由

$$V_A = \frac{qb(c + \frac{b}{2})}{l}$$

2. 作 Q 图。参阅图 6-14 (乙)。

在 a 段内， Q 力的数值不变它应等于 V_A ， Q 力的分布为一条平行于轴线的直线。在 c 段内， Q 力的数值也不变，它应等于 V_B ，所以 Q 力的分布也是一条平行于轴线的直线。在 b 段内，因为 q 是一个定数，所以 Q 的变化速度是一个定数，（公式 6-3），因此在 Q 图中，得到一条倾斜的直线，如果长度 $a > c$ 时最大的剪力为

$$Q_{max} = V_B$$

它的位置在 c 段的各截面上。

3. 作 M_B 图参阅图 6-14 (丙)。

在 a 段内， M_B 的分布成一条倾斜线；在 A 点 $M_{(A)} = 0$ ，在 C 点， $M_{(C)} = V_A \cdot a = \frac{qb(c + \frac{b}{2}) \cdot a}{l}$ ，在 c 段中， M 的分布也成一条倾斜线；在 B 点 $M_{(B)} = 0$ ，在 D 点，

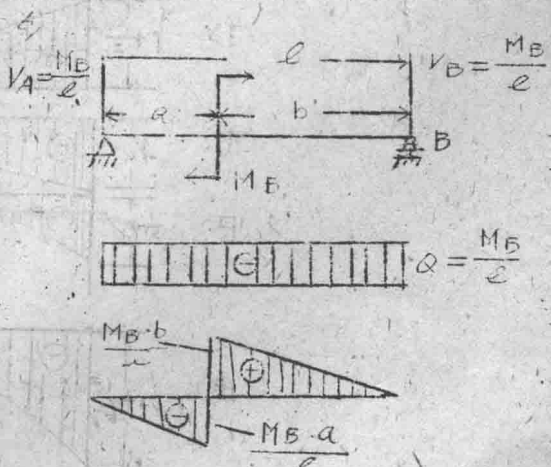
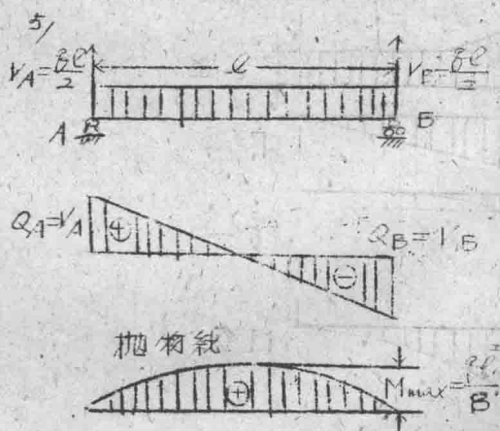
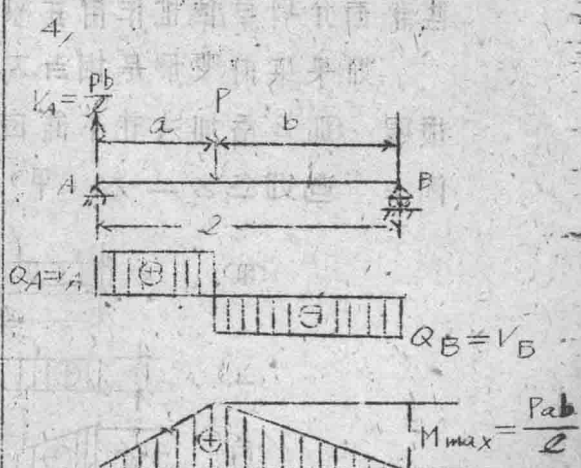
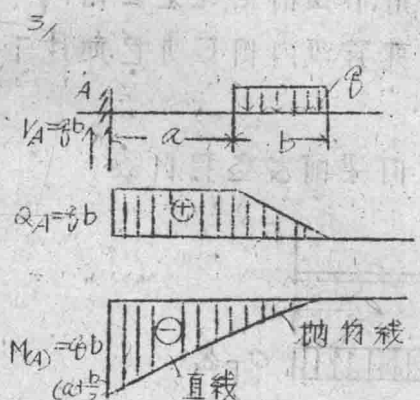
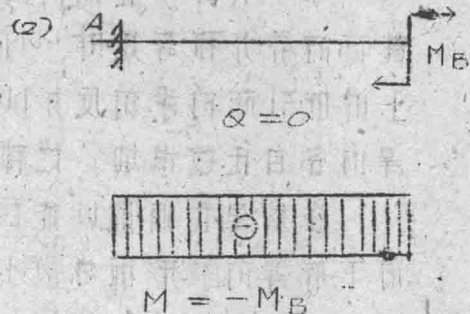
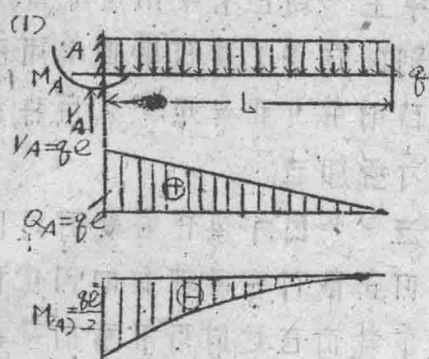
$$M_{(D)} = V_B \cdot c = \frac{qb(a + \frac{b}{2})c}{l}$$

计算 b 段的弯矩 M_b 时，即将梁在该段内不同的横截面截开，每次把它分成二段，再求它的 M 数值。必须注意：求 a 段的 M 时，不能把 q 合成为一个集中力 Γ ，因为 q 对 M 的分布情况是有影响的。最后将得到 M 在 b 段的变化规律是一条向上凸出的抛物线，它的最大弯矩发生在 $Q = 0$ 的地方，因为按公式 (6-4)，在那里应 $\frac{dM}{dx} = 0$ ，即 M 停止变化了，所以它的数值或者

是最大，或者是最小，对我们的例子来讲， M 应力最大。

如果 b 段的尺寸，比 a 和 c 段的尺寸要小得多，那么我们可以把分布力 q 看成是一个集中力，于是 Q 和 M 的分布情况，如 6-14 (乙) 和 6-14 (丙) 中用虚线所示的形状。

表 6-1 最简单的静定梁的 Q 和 M 图



§ 6-6 用叠加法画 Q 图和 M 图

如果有许多载荷同时作用在梁上，则正求梁的反力以及横截面的剪力和弯矩时，可以先分别计算各个载荷单独作用在梁上时所引起的梁的反力以及横截面的剪力和弯矩，然后将所得的各自代数相加，这种求法称为叠加法。

在这里我们所以能应用叠加法，是因为梁在各载荷同时作用下所得的变形极为微小，致它的各截面在梁轴方向的位置完全可以略去不计。这样，梁的每个载荷在这时所引起的梁的反力，截面的剪力和弯矩都和相应的载荷成线性关系，它和这些载荷分别单独地作用在梁上时所引出的情况完全相同。

如果梁的变形是相当大的，或者梁内的应力已超过了比例极限，那么叠加法就不能应用了。

例一 画如图 6-15 (甲) 所示的梁的 Q 图和 M 图

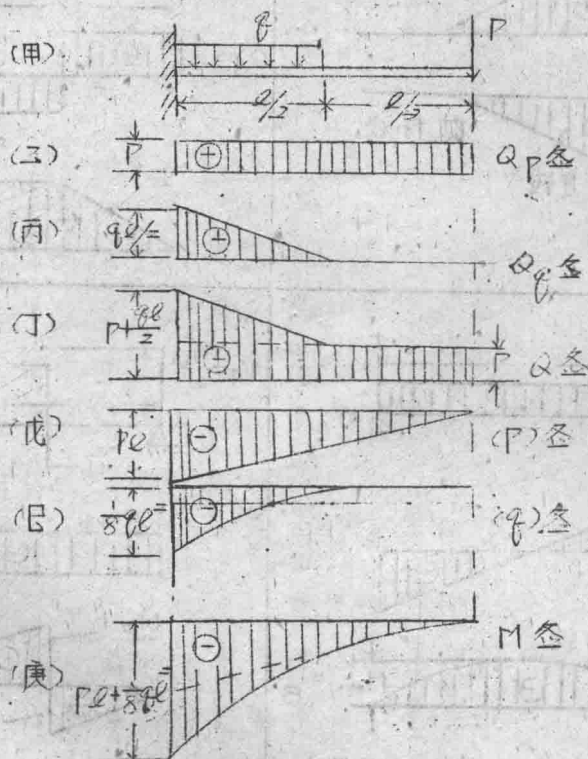


图 6-15