

高度奇異位势和一类非定域 位势的 Regge 行为

· 中 国 ·

中国科学院数学研究所 戴元本

一、引 言

自从 Regge 开始的工作^[1]以来, 散射振幅对角动量的解析性日益受到人们的注意, Regge 极点决定低能振幅在动量转换趋于 ∞ 时的渐近性质。由于 Chew 等的建议, 人们猜测通过交叉对称 Regge 极点也决定散射振幅在能量趋于 ∞ 时的渐近性质。最近有一些工作企图由双色散关系出发证明 Regge 行为在场论中也成立, 这些工作虽然也获得了一些有趣的结果, 但是还远没有达到所要求的目标。看来, 要想研究场论中散射振幅的渐近行为必须从更具体的理论出发。研究微扰论振幅的渐近性质是一个途径。另一方面, 由于很大一类场论中的相互作用可以用一个等效的位势来代替, 对位势散射的情形作更仔细的研究对于了解场论的情形具有一定的意义。一般来说, 等效位势是非定域而且与能量有关的。例如在 Tamm-Dancoff 型近似理论中就出现这类位势。在文献^[1]中只对在原点处 $V(x) \sim -2+c$, $c > 0$ 的定域位势给出了详细证明, 非定域位势除可分离的情形外还很少被研究。

在本文中我们考察了在原点处有高于两阶的极点的定域位势和一类非定域位势, 对于前者我们证明了 S 矩阵元 $S(\lambda, k)$ 在 λ 的全平面半纯, 且当 $k > 0$, 而 λ 在 $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$ 内趋于 ∞ 时 $S(\lambda, k) - 1 = O\left(\frac{\log \lambda}{\lambda}\right)$, 这里 $\lambda = l + \frac{1}{2}$, l 是角动量, k 是动量。在文献^[2]中已将所得的结果作了简单的报道。关于 $S(\lambda, k)$ 的半纯

性的結果，文献^{[3][4]}也得到了。在虛軸的小角邻域內可能有无穷多极点。作为一个特例我們考察了 z^{-1} 排斥位势。对这类位势，虽然极点的幅角趋于 $\frac{\pi}{2}$ ，它們的实部和虛部却同时趋于 ∞ ，故普通的双色散关系对 z^{-1} 排斥势不成立。

对于我們所研究的非定域位势証明了 $S(\lambda, k)$ 在 λ 的右半平面半純。对于 $S(\lambda, k)$ 在 $\lambda \rightarrow \infty$ 时的漸近性質，对变量 k 的解析性及极点的位置也得到一些結果。对这类位势，Regge 极点似乎有可能处于第四象限內。

二、位势在原点有高于二阶的极点时散射振幅的 Regge 行为

(一) 解在原点附近的行为

我們假設位势 $V(z)$ 满足下面的条件

A. $z \sim 0$ 时， $V(z) \sim z^{-n}$ ， n 为大于 2 的整数。

B. $V(z)$ 在 $\text{Re } z > 0$ 处解析。

C. $\int_a^\infty |zV(z)|d|z| < \infty$ ，积分路綫在 $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ 內。 $a \neq 0$ 。

分波径向波函数服从如下的方程：

$$\ddot{\psi} = \left(V(z) + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - k^2 \right) \psi. \quad (1)$$

我們首先考虑在原点附近位势为吸引的情形。此时在 $z \sim 0$ 时(1)式与下面的方程接近

$$\ddot{\psi} = -z^{-n}\psi. \quad (2)$$

与常系数方程

$$\ddot{\psi} = -z_0^{-n}\psi \quad (3)$$

比較，并利用熟知的比較定理^[6]可知(1)的任何一个解在原点的邻域內都有无穷多个零点。此时没有一个合理的边界条件可以挑选出散射問題的解。所以下面我們將只考虑位势在中心附近为排斥的情形。假設 A、B、C 中包含位势有一个湯川尾和排斥心的情形，这种类型的位势曾由 Levy 等^[5]在場論的計算中得到过，所以在物理上是有兴趣的。

令

$$V = V_s + V',$$

其中 V' 无高于二阶的极点,

$$V_s = z^{-n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right). \quad (4)$$

当 n 为偶数时, 作如下的变换:

$$\psi = \exp \left(\mp \int_{z_0}^z \sqrt{V_s} dz \right) f,$$

则方程

$$\ddot{\psi} = V_s \cdot \psi \quad (5)$$

变为

$$\ddot{f} \mp 2\sqrt{V_s} \dot{f} \mp \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V_s}} \frac{dV_s}{dz} f = 0.$$

当 n 为偶数时上式形式上有一个级数解

$$f \sim z^{\frac{n}{4}} (1 + \sum b_k z^k),$$

故方程(5)有两个形式解:

$$\psi \sim z^{\frac{n}{4}} \exp \left(\mp \int_{z_0}^z \sqrt{V_s} dz \right) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right]. \quad (6)$$

当 n 为奇数时, 先作变换 $z = y^2$, 则(5)式变为:

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d\psi}{dy} = 4V_s y^2 \psi. \quad (5)'$$

再作变换

$$\psi = \exp \left(\mp \int_{y_0}^y \sqrt{4V_s y^2} dy \right) f,$$

则 f 满足方程

$$\ddot{f} \mp \left(4\sqrt{V_s y^2} - \frac{1}{y} \right) \dot{f} \mp \left(2 \frac{d\sqrt{V_s y^2}}{dy} - 2\sqrt{V_s y^2} \frac{1}{y} \right) f = 0.$$

上式也有一个形式的级数解, 由此得到(5)式有两个形式解

$$\begin{aligned} \psi &\sim y^{\frac{n}{2}} \exp \left(\mp \int_{y_0}^y \sqrt{4V_s y^2} dy \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k \right) = \\ &= z^{\frac{n}{4}} \exp \left(\mp \int_{z_0}^z \sqrt{V_s} dz \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{\frac{k}{2}} \right). \end{aligned} \quad (6)'$$

解(6)(6)'中的级数自然一般都是发散的, 但是作变换

$$z = \frac{1}{W},$$

$$F_1 = \psi, \quad F_2 = W^{-(\frac{n}{2}-1)} \psi,$$

可以将方程(5)化为标准的联立一次方程的形式

$$\dot{F} = W^{\frac{n-3}{2}} AF, \quad (7)$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1 + \sum a_k W^{-k}, & -\frac{n}{2} W^{-\frac{n}{2}+1} \end{pmatrix}.$$

A 在 $W = \infty$ 处解析。当 $n = \text{偶数}$ 时,由熟知的数学定理^[6]知(7)式有两个独立的形式解,且对应于方程(7)的每个形式解存在一个方程(7)的解,它以此形式解为渐近展开式。在 n 为奇数时,作变换

$$W = \frac{1}{y},$$

$$F_1 = \phi, \quad F_2 = W^{-n+3} \dot{\psi},$$

则(5)式可写为

$$\dot{F} = W^{n-3} AF, \quad (7')$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \sum a_k W^{-2k} & -nW^{-n+2} \end{pmatrix}.$$

所以也得到和上面 n 为偶数时相似的结论。由这些讨论知道方程(5)有两个独立解 ψ_I, ψ_{II} , 它们在原点附近趋于

$$\psi_{I,II} \sim z^{\frac{n}{4}} \exp\left(\pm \int_{z_0}^z \sqrt{V_s} dz\right) \quad z \sim 0. \quad (8)$$

$$\therefore \psi_I \psi_{II} \sim z^{\frac{n}{2}}, \quad z \sim 0. \quad (9)$$

当 z 沿实轴趋于原点时, $\psi_I \rightarrow 0$ 而 $\psi_{II} \rightarrow \infty$ 。

(二) $S(\lambda, k)$ 对 λ 的解析性

方程(1)的 Jost 解 $f(\lambda, k, z)$, 满足的积分方程与 $V(z)$ 在 $z = 0$ 点的性质无关, 故 $V(z)$ 在原点的奇异性不影响 $f(\lambda, k, z)$ 对 λ 的解析性的证明, 因此 $f(\lambda, k, z)$ 是 λ 的全纯函数, 且在 k 的下半平面解析。

对方程(1)的散射解 $\varphi(\lambda, k, z)$ 要求它满足在原点有限的边界条件, 由上节的结果知 φ 满足如下的积分方程

$$\varphi(k, \lambda, z) = \psi_1(z) + \frac{1}{2} \int_0^z [\psi_1(z')\psi_{II}(z) - \psi_{II}(z')\psi_1(z)] \times \\ \times \left(k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right) \cdot \varphi(\lambda, k, z') dz'. \quad (10)$$

按照 Titchmarsh 引理^[7]知 z 足够小时(10)式的迭代解

$$\varphi(\lambda, k, z) = \sum \varphi_n(\lambda, k, z) \leq \psi_1(z) \exp \left[\int_0^z |K(\lambda, k, z')| \cdot |dz'| \right], \quad (11)$$

$$K = \psi_1(z')\psi_{II}(z') \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right].$$

由上节的第(9)式知 $\psi_1(z')\psi_{II}(z')z'^{-2}$ 在原点可积,故迭代解对任意有限的 λ, k 一致收敛,由此知 $\varphi(\lambda, k, z)$ 为 λ 及 k 的全纯函数。

Jost 函数 $f(\lambda, k)$ 由下式定义

$$\varphi(\lambda, k, z) = \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k)f(\lambda, -k, z) - f(\lambda, -k)f(\lambda, k, z)]. \quad (12)$$

由此知 $f(\lambda, k)$ 和 $f(\lambda, -k)$ 也是 λ 的全纯函数。

S 矩阵元 $S(\lambda, k)$ 为

$$S(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} \exp \left[i\pi \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (13)$$

所以 $S(\lambda, k)$ 为 λ 的半纯函数。

(三) $S(\lambda, k)$ 在 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时的渐近性质

在本节中我们限于 k 为正数的情形,考虑函数

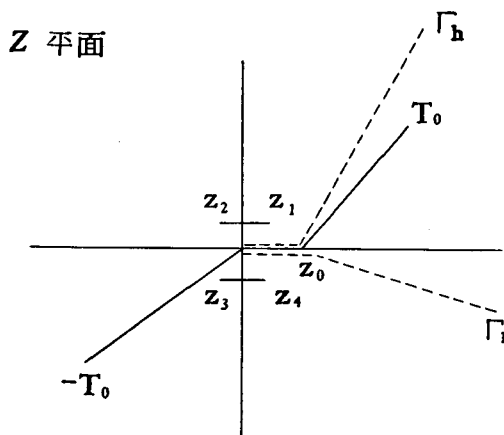
$$p(z) = \sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - V(z)}, \quad p_s = \sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - V_s(z)}. \quad (14)$$

除原点外 $p(z)$ 在右半 z 平面上的奇点都在 $k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - V(z) = 0$ 处,当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时 p 的支点或 $\rightarrow \infty$ 或 $\rightarrow$ 有限数。在后者的情形,支点发生在

$$\frac{\lambda^2}{z^2} + \frac{1}{z^n} \approx 0 \quad \text{即} \quad z \approx (-\lambda^2)^{-\frac{1}{n-2}} \quad (15)$$

处,(15)包含 $n-2$ 个支点 $z_1, z_2, \dots, z_{n-2}$ 。当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时它们都 $\rightarrow 0$ 。对于前者情形,在支点处 $V(z) \rightarrow 0$ 。

$$k^2 - \frac{\lambda^2}{z^2} \approx 0, \quad \therefore z \approx \pm \frac{\lambda}{k} = \pm T_{00} \quad (16)$$



图

所以在 $|\lambda|$ 很大时对函数 p 可取如图中所示的割线, 当 λ 很大时 p_s 的支点与 p 的支点趋于重合。引入函数

$$\xi_{s,l} = kz + \int_{z,\Gamma_l}^{\infty} (k - p_s) dz, \quad \xi_{s,h} = kz + \int_{z,\Gamma_h}^{\infty} (s - p_s) dz, \quad (17)$$

$$\xi_l = \xi_{s,l} + \int_{z,\Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz, \quad \xi_h = \xi_{s,h} + \int_{z,\Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz, \quad (18)$$

$\Gamma_l(\Gamma_h)$ 为介于割线 T_0 —— $-T_0$ 与负(正)虚轴之间的一条积分路线, 由(18)知

$$\frac{d\xi_s}{dz} = p_s, \quad \frac{d\xi}{dz} = p_0 \quad (19)$$

按照第 1 节中的讨论, 如果把那里的 V_s 以 $V_s - k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2}$ 代替。由(8),(17)式可知除一常数外

$$\varphi \sim p^{-\frac{1}{2}} \exp(i\xi_{s,l}) e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z \sim 0_0$$

利用(18)式及

$$\xi_{s,l} = -\xi_{s,h} + 2 \int_0^{T_0} k dz + 2 \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz$$

可知

$$\varphi(\lambda, k, z) \sim \exp(i\xi_l) e^{i\frac{\pi}{4}} p^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-i \int_{0,\Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz\right], \quad z \sim 0_0$$

$$\varphi(\lambda, k, z) \sim \exp(-i\xi_h) e^{i\frac{\pi}{4}} p^{-\frac{1}{2}} \exp\left[i \int_{0,\Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz + \right.$$

$$+ 2i \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz + 2i \int_0^{T_0} k dz \Big], \quad z \sim 0. \quad (20)$$

作变换

$$\begin{aligned} Y_l(\xi) &= e^{i\frac{\pi}{4}} p^{\frac{1}{2}} \exp \left[i \int_{0, \Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz \right] \exp(-i\xi_l) \varphi(\lambda, k, z), \\ Y_h(\xi) &= e^{-i\frac{\pi}{4}} p^{\frac{1}{2}} \exp \left[-i \int_{0, \Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz - 2i \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz - \right. \\ &\quad \left. - 2i \int_0^{T_0} k dz \right] \exp(i\xi_h) \varphi(\lambda, k, z). \end{aligned} \quad (21)$$

由(20)可証当 $z \sim 0$ 时, $Y_l(\xi) \sim Y_h(\xi) \sim 1$, 而且它們滿足积分方程:

$$\begin{aligned} Y_l[\xi(z)] &= 1 + \int_{\xi(0), \Gamma_l}^{\xi(z)} \frac{1}{2i} \{1 - \exp[2i(\xi' - \xi_l)]\} I(\xi') Y_l(\xi') d\xi', \\ Y_h[\xi(z)] &= 1 - \int_{\xi(0), \Gamma_h}^{\xi(z)} \frac{1}{2i} \{1 - \exp[-2i(\xi' - \xi_h)]\} I(\xi') Y_h(\xi') d\xi'. \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 - p \frac{d^2 p}{dz^2} \right] p^{-4}. \quad (23)$$

在原点附近 $|z| < z_0$ 处使割綫及 Γ_l, Γ_h 都沿实軸。取 $z_0 > |z_i(\lambda_0)|$, 并限制 λ 于 $|\lambda| > |\lambda_0|$, 这样可以避免 Γ_l, Γ_h 与支点 z_i 相遇。

(7), (8)可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \xi_l &= \xi_{0,l} + \int_{z, \Gamma_l}^{\infty} (p_0 - p) dz, \\ \xi_h &= \xi_{0,h} + \int_{z, \Gamma_h}^{\infty} (p_0 - p) dz, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{0,l} &= kz + \int_{z, \Gamma_l}^{\infty} (k - p_0) dz, \\ \xi_{0,h} &= kz + \int_{z, \Gamma_h}^{\infty} (k - p_0) dz. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$p_0 = \sqrt{k^2 - \frac{1}{z^2}}. \quad (26)$$

当 $|z| > z_0$ 时, 可以将^[1]中相应的証明稍加改变搬过来得到:

$$|\xi - \xi_0| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

在^[1]中还指出了在 $|\arg T_0| < \frac{\pi}{2}$ 时可以选取 Γ_l, Γ_h 使

$$\operatorname{Im}(\xi'_{0,l} - \xi_{0,l}) > 0, \quad \operatorname{Im}(\xi'_{0,h} - \xi_{0,h}) < 0, \quad |z'| < |z|.$$

这只要 Γ_l, Γ_h 大致沿着直綫 $\arg z = c_h$ 及 $\arg z = -c_l$, $0 < c_h, c_l < \frac{\pi}{2}$ 即可。所以

$$\begin{aligned}
|\exp[2i(\xi'_l - \xi_l)]| &< 1 + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \\
|\exp[-2i(\xi'_h - \xi_h)]| &< 1 + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |z'| > z_{00}
\end{aligned} \quad (27)$$

在 $z < z_0$ 处, $V(z) \sim z^{-n}$. 由作图法易见, 当 $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$ 时

$$\left| \arg \left(V + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[i(\xi'_l - \xi_l)] &= -\operatorname{Re} \int_{z', \Gamma_l}^z ip(z'') dz'' = -\operatorname{Re} \int_{z', \Gamma_l}^z \sqrt{V + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - k^2} dz'' < 0, \\
z' &< z \leq z_{00}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore |\exp[2i(\xi'_l - \xi_l)]| &< B, \\
|\exp[-2i(\xi'_h - \xi_h)]| &< B, \quad z' < z < z_{00}
\end{aligned} \quad (28)$$

对于足够小的 z_0 显然有 $B < 1$, 由 Titchmarsh 引理得到

$$\begin{aligned}
|Y_l(\xi)| &\leq \exp(Hv_l), \\
|Y_h(\xi)| &\leq \exp(Hv_h), \quad H = 1 + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).
\end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$v_h = \int_{\xi(0), \Gamma_h}^{\infty} |I(\xi) d\xi|. \quad (30)$$

在附录中证明了

$$v_h = o\left(\frac{\log |\lambda|}{|\lambda|}\right)$$

这样就可由(21), (22)式得到

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda, k, z) &= e^{-i\frac{\pi}{4}} p^{-\frac{1}{2}} \left\{ [1 + \exp(Hv_l)O(v_l)] \exp\left[-i \int_{0, \Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz\right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \exp(i\xi_l) - \frac{1}{2i} \int_{\xi(0), \Gamma_l}^{\xi(z)} \exp(2i\xi') I(\xi') Y_l(\xi') d\xi' \exp\left[-i \int_{0, \Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz\right] \cdot \\
&\quad \cdot \exp(-i\xi_l) \Big\}_0 \\
\varphi(\lambda, k, z) &= e^{i\frac{\pi}{4}} p^{-\frac{1}{2}} \left\{ [1 - \exp(Hv_h)O(v_h)] \exp\left[i \int_{0, \Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2i \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz + 2i \int_0^{T_0} k dz\right] \exp(-i\xi_h) + \frac{1}{2i} \int_{\xi(0), \Gamma_h}^{\xi(z)} \exp(-2i\xi') \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times I(\xi') Y_h(\xi') d\xi' \exp \left[i \int_{0, \Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz + 2i \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz + \right. \\ & \left. + 2i \int_0^{T_0} k dz \right] \Big\} \circ \end{aligned} \quad (31)$$

令 $|z| \rightarrow \infty$, 则 $\xi_l \rightarrow \xi_h \rightarrow kz$, 由(12)式得到

$$\begin{aligned} f(\lambda, k) &= 2i[1 + \exp(Hv_l)O(v_l)] \exp \left[-i \int_{0, \Gamma_l}^{\infty} (p_s - p) dz \right] e^{-i\frac{\pi}{4}}, \\ f(\lambda, -k) &= -2i[1 - \exp(Hv_h)O(v_h)] \exp \left[i \int_{0, \Gamma_h}^{\infty} (p_s - p) dz + \right. \\ & \quad \left. + 2i \int_{T_0}^{\infty} (k - p_s) dz + 2i \int_0^{T_0} k dz \right] e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\therefore S(\lambda, k) = \exp \left[2i \int_{\frac{\lambda}{k}}^{\infty} (p - k) dz - 2i\lambda + i\pi\lambda \right] [1 + O(v)]. \quad (33)$$

即

$$|S(\lambda, k) - 1| \leq C \left(\frac{\log |\lambda|}{|\lambda|} \right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}. \quad (34)$$

附 录

当 $|z| > z_0$ 时, 选取 Γ_l, Γ_h 使其上的 z 点满足

$$\frac{\pi}{2} > \left| \arg \frac{\lambda}{z} \right| > \epsilon.$$

$$\begin{aligned} \therefore |k^2 z^2 - \lambda^2| &= |kz + \lambda| \cdot |kz - \lambda| \geq |\lambda| \sin \epsilon |kz + \lambda| \geq \\ &\geq \frac{|kz| \cdot |\lambda| \sin \epsilon}{|\lambda|^2 \sin \epsilon} \end{aligned}$$

$$\therefore p = \sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{z^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \right).$$

$$\therefore |p| \geq \left| \frac{\lambda}{z} \right| \sin^{\frac{1}{2}} \epsilon \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \right), \quad \text{当 } |z| < \frac{|\lambda|}{k}.$$

$$|p| \geq \left| \frac{k\lambda}{z} \right|^{\frac{1}{2}} \sin \epsilon, \quad \text{当 } |z| > \frac{|\lambda|}{k}.$$

由(23)得

$$\begin{aligned} |IP| &\leq \frac{c}{|\lambda z| \sin^{5/2} \epsilon}, \quad z_0 < |z| < \frac{|\lambda|}{k}. \\ |IP| &\leq \frac{c |\lambda|^{\frac{3}{2}}}{k^{5/2} |z|^{7/2} \sin^{5/2} \epsilon}, \quad |z| > \frac{|\lambda|}{k}. \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\therefore \int_{\xi(z_0), \Gamma_h}^{\infty} |I(\xi') d\xi'| = \int_{z_0, \Gamma_h}^{\infty} |IP(z') dz'| = O\left(\frac{1}{|\lambda|} \log |\lambda|\right). \quad (\text{A.2})$$

在 $z < z_0$ 的实轴上, 如

$$-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} - \epsilon,$$

$$\text{则 } V + \frac{\lambda^2}{z^2} \geq \sqrt{V^2 + \frac{|\lambda|^4}{z^4} - 2V \frac{|\lambda|^2}{z^2} \cos \epsilon} \geq \left| \frac{\lambda}{z} \right|^2 \sqrt{1 - \cos \epsilon}, \quad \therefore$$

$$P = \sqrt{V + \frac{\lambda^2}{z^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right)},$$

$$|P| \geq \sqrt[4]{V^2 + \frac{|\lambda|^4}{z^4} - 2V \frac{|\lambda|^2}{z^2} \cos \epsilon}.$$

$$\therefore |P| \geq \frac{1}{z} \sqrt[4]{|\lambda|^4 (1 - \cos \epsilon)} = \left| \frac{\lambda}{z} \right| \sqrt[4]{1 - \cos \epsilon}, \text{ 当 } z_0 > z > z_{a0}$$

$$|P| \geq \sqrt{V} \sqrt[4]{1 - \cos \epsilon_0} \quad \text{当 } z < z_{a0} \quad (\text{A.3})$$

其中

$$V(z_a) z_a^2 = |\lambda|^2.$$

当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时, $z_a \sim |\lambda|^{-\frac{2}{n-2}}$, 由此可得 $z < z_a$ 时 $V(z) = z^{-n} (1 + O(|\lambda|^{-\frac{2}{n-2}}))$,

$$\int_{\xi(0), \Gamma_h}^{\xi(z_0)} |I(\xi') d\xi'| = \int_{0, \Gamma_h}^{z_a} |IP| dz + \int_{z_a, \Gamma_h}^{z_0} |IP| dz = O\left(\frac{\log |\lambda|}{|\lambda|}\right). \quad (\text{A.4})$$

由 (A.2) (A.4) 得到

$$v_h \leq C \left(\frac{\log |\lambda|}{|\lambda|} \right). \quad (\text{A.5})$$

三、 z^{-4} 排斥位势的 Regge 极点

在第二部分中考察了位势在原点有高度奇异时散射矩阵元 $S(\lambda, k)$ 对角动量变数 λ 的解析性和渐近性质、在对位势 $V(z)$ 的一些假设下证明了 $S(\lambda, k)$ 在全 λ 平面半纯, 且当 λ 在 $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ 的区域内趋于 ∞ 时 $S(\lambda, k) \rightarrow 1 + O\left(\frac{\log \lambda}{\lambda}\right)$. Eden 等也用相似的方法证明了 $S(\lambda, k)$ 的半纯性^[4]. 他们没有一般地研究 $S(\lambda, k)$ 的渐近性质, 但考察了 z^{-4} 排斥位势的具体例子. 他们认为在动量 k 为实数时 $S(\lambda, k)$ 有极点在 $\arg \lambda < \frac{\pi}{4}$ 的区域内趋于 ∞ . 在本工作中我们重新考察了这个问

題, 所得的結果与第二部分的一般結論一致。同时发现在 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时有无穷多个极点存在于虛軸附近的小角邻域內。

(一) 散射方程的解

設位势为:

$$V(z) = \frac{g^2}{z^4}。$$

散射方程为:

$$\psi''(z) + k^2\psi(z) - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2}\psi(z) - V(z)\psi(z) = 0。 \quad (1)$$

作变换

$$\psi(z) = z^{\frac{1}{2}}\phi(x), \quad x = i \ln \frac{z}{z_0}, \quad z_0^2 = i \frac{g}{k},$$

則 $\phi(x)$ 滿足 Mathieu 方程

$$\phi''(x) + (\lambda^2 - 2igk \cos 2x)\phi(x) = 0。 \quad (2)$$

方程(2)有两个独立解 $he^{(3)}(x)$ 、 $he^{(4)}(x)$ ^[8], 它們在 $z \sim 0$ 点的漸近行为如下式:

$$\left. \begin{aligned} he^{(3)}(x) &\sim \frac{\exp\left[-2i\sqrt{igk}\cos x - i\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sqrt{igk}\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \left(\frac{z}{ig}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{g}{Z} - \frac{i}{4}\pi\right), \\ he^{(4)}(x) &\sim \frac{\exp\left[2i\sqrt{igk}\cos x + i\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sqrt{igk}\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \left(\frac{z}{ig}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{g}{z} + \frac{i}{4}\pi\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

因此(1)的散射解可取为

$$\psi(z) = (gz)^{\frac{1}{2}}he^{(4)}\left(i \ln \frac{z}{z_0}\right)。 \quad (4)$$

(2) 的另外两个独立解 $he^{(1)}(x)$ 、 $he^{(2)}(x)$, 它們在 $z \rightarrow \infty$ 时的漸近行为如下式^[8]

$$\left. \begin{aligned} he^{(1)}(x) &\sim \frac{\exp\left[-2i\sqrt{igk}\cos x - i\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sqrt{igk}\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{\exp\left[-ikz - i\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{kz}}, \\ he^{(2)}(x) &\sim \frac{\exp\left[2i\sqrt{igk}\cos x + i\frac{\pi}{4}\right]}{(2\sqrt{igk}\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{\exp\left[+ikz + i\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{kz}}。 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

用文献^[8]中的符号, $he^{(1)}$, $he^{(2)}$ 和 $he^{(4)}$ 之間滿足下面的聯結關係:

$$he^{(1)}(x) = (ie^{\phi} \cos \pi \beta - \cos \pi \gamma) he^{(1)}(x) - ie^{\phi} he^{(2)}(x). \quad (6)$$

由(5)(6)式得到

$$S(\lambda, k) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\cos \pi \beta + i(e^{-2\phi} + \sin^2 \pi \beta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

其中

$$\cos \pi \beta = 1 - 2\Delta(0) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi \lambda \right), \quad (8)$$

$\Delta(0)$ 为 Hill 无穷行列式:

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{ikg}{4^2 - \lambda^2} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{ikg}{2^2 - \lambda^2} & 1 & \frac{ikg}{2^2 - \lambda^2} & 0 & \\ 0 & \frac{ikg}{\lambda^2} & 1 & \frac{ikg}{\lambda^2} & 0 \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}. \quad (9)$$

(二) $S(k, \lambda)$ 的漸近性質

在 W.K.B. 近似下^[8]

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, k) &\sim \phi_0(\lambda, k) = 2 \frac{\lambda^2 - 2igk}{(\lambda^2 + 2igk)^{\frac{1}{2}}} D \left[\left(\frac{\lambda^2 - 2igk}{\lambda^2 + 2igk} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{\pi(\lambda^2 - 2igk)}{2(\lambda^2 + 2igk)^{\frac{1}{2}}} F \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{\lambda^2 - 2igk}{\lambda^2 + 2igk} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 D 为完全椭圆积分。近似(10)实际上是相对于 1 忽略了:

$$\frac{4(igk)^2 - 2\lambda^2(igk) \sin(2x) + (igk)^2 [\sin(2x)]^2}{[\lambda^2 - 2igk \cos 2x]^3}. \quad (11)$$

易見当 $\left| \arg \left(\frac{\lambda^2}{ik} \right) \pm \left(\arg k - \frac{\pi}{2} \right) \right| > 2\epsilon$, 即 $\left| \arg \lambda - \frac{\pi}{2} \right| > \epsilon$, $\left| \arg \frac{\lambda}{k} \right| > \epsilon$ 而 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时, (11)式对所有的 z 都远比 1 小, 此时近似(10)是正确的(当 $z \rightarrow 0$ 或 ∞ 时 $\cos 2x$ 相应地 $\rightarrow \left| \frac{z_0}{z} \right|^2 e^{2i(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg k)}$, $\left| \frac{z}{z_0} \right|^2 e^{-2i(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg k)}$ 。当 $\cos 2x$ 有限时(11)总是很小的)。因为文献^[8]中的函数 key 是 λ 的整函数, 因此与之相联系的 $\phi(\lambda, k)$ 也是 λ 的整函数。由(6)可以証明 $\phi(\lambda, k)$ 的阶数有限。而超比級数 $F \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; \right.$

$\frac{\lambda^2 - 2ikg}{\lambda^2 + 2ikg}$ 在 $|\lambda| \rightarrow \infty, |\arg k| < \frac{\pi}{2}, \left| \arg \lambda - \frac{\pi}{2} \right| < \epsilon$ 或 $\left| \arg \frac{\lambda}{k} \right| < \epsilon$ 时无零点。利用 Phragmén-Lindelöf 定理于函数 $\frac{\phi(\lambda, k)(\lambda^2 + 2ikg)^{\frac{1}{2}}}{F \cdot (\lambda^2 - 2ikg)}$ 可知当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时, (10) 式对任何 λ 的幅角都成立。因此, 利用 $F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; W\right)$ 在 $W = 1$ 附近的渐近形式得到

$$e^{-2\phi} \sim e^{-i\lambda \ln \lambda - \ln(2\sqrt{igk}) - \gamma - 1}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \\ -\pi < \arg\left(\frac{ik}{\lambda^2}\right) < \pi. \quad (12)$$

由于有 S 矩阵元的广义么正性 $S(\lambda k)S^*(\lambda^* k^*) = 1$, 只须要考虑 $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ 的情形就够了。 λ 在此区域内时, 如果 $|\arg k| < \frac{\pi}{2}$, (12) 式恒成立。显然在 $|\arg \lambda| > \epsilon$ 时 $\Delta(0) \rightarrow 1$

$$\therefore \beta \rightarrow \lambda, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (13)$$

由 Phragmén-Lindelöf 定理, 上式对所有的 λ 幅角都成立。利用 (12) 及 (13) 得到当 $\frac{\pi}{2} - \epsilon > |\arg \lambda| > 0$ 时

$$S(\lambda, k) \rightarrow 1, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

这与第二部分中的结论一致, 而与 Eden 等^[4]的结论不一致。

现在再考察虚轴的小角邻域内的情形。 $S(\lambda, k)$ 的极点发生在 $e^{-2\phi} = -1$ 时, 由 (12) 知当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时极点位置由下式决定:

$$-\lambda_1 \left(\ln \left| \frac{\lambda}{\sqrt{gk}} \right| \right) + \lambda_2 \left(\tan^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{2} \arg k - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \\ -\lambda_1 \left(\tan^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{2} \arg k - \frac{\pi}{4} \right) - \lambda_2 \left(\ln \left| \frac{\lambda}{\sqrt{gk}} \right| \right) = \mp \frac{\pi}{4} (2m + 1). \quad (15)$$

由 (15) 式中第一式知 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow 0, \quad \tan^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

由此得:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg k \right) \frac{(2m+1)\pi}{4 \left(\ln \frac{\lambda_2}{\sqrt{g|k|}} \right)^2}, \\ \lambda_2 &\rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg k \right) \frac{2m+1}{\ln \frac{\lambda_2}{\sqrt{g|k|}}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由(16)可見有无穷多个 Regge 极点存在于虚軸的小角邻域內。当 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 时,虽然极点的幅角 $\rightarrow \frac{\pi}{2}$,但其实部和虚部却都同时 $\rightarrow \infty$ 。因此对 Z^{-1} 排斥位势,通常的双色散关系不能成立。

看来,有无穷多个极点存在于虚軸的小角邻域內可能是高度奇异位势的一个普遍性质。我們不知道这些极点的实部趋于 ∞ 是否也是这类位势的普遍性质,若如此,則将使人們对双色散关系的合理性产生一些怀疑,因为硬排斥心的存在是物理上所期望的。当然我們可以說,势散射的概念在小距离內不能应用,但是,我們要記得对双色散关系的支持迄今只来自势散射和微扰論。如果势散射轉而不利于它,而微扰論在小距离內也不見得比势散射更可靠,則它的基础就变得非常微弱了。

四、一类非定域位势的 Regge 行为

(一) 基本方程和假設

我們將考虑如下的方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = \int U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3r'。 \quad (1)$$

非定域位势 $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 可能与动量 k 有关。假設 $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 满足下面几个条件:

(i) $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 具有轉动不变性,因此它可以看作三个变量的函数,这三个变量可选为 $r = |\mathbf{r}|$, $r' = |\mathbf{r}'|$ 和 $Z = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}$,也可以选定 r , r' 和 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。

(ii) 对任意固定的 r 和 r' , $U(r, r', R)$ 在 $\text{Re } R > 0$ 中对 R 解析,且当右半圓 c 的半径趋于 ∞ 时,

$$\int_c \frac{1}{R} U(r, r', R) dR \rightarrow 0。 \quad (2)$$

(iii) 在 R 的虚軸上,

$$|\text{Im}U(r, r', iR)| < |\tilde{U}_1(r)f(r, r', R)\tilde{U}_2(r')|, \quad (3)$$

而 $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ 和 f 满足条件

$$\int_0^\infty |\tilde{U}_1(r)|r(r^\epsilon + r^\epsilon)dr < M, \quad \int_0^\infty |\tilde{U}_2(r')|r'(r'^\epsilon + r'^{-\epsilon})dr' < M, \quad (4)$$

(在第3节中只用了較弱的条件 $\int_0^\infty |U_{1,2}(r)|r(1 + kr)^{-\frac{1}{2}}(r^\epsilon + r^{-\epsilon})dr < M$)

$$\int_a^\infty |f(r, r', R)|R^{-\epsilon}dR < M', \quad \int_0^a |f(r, r', R)|R^\epsilon dR < M'', \quad (5)$$

M' 和 M'' 与 r, r' 无关, $a > 0, \epsilon > 0$ 。

例如位势

$$U(r, r', R) = \tilde{U}_1(r) \frac{\exp[-f(r, r')R]}{R} \tilde{U}_2(r'), \quad f(r, r') > 0,$$

满足所有的条件, 如果 $\tilde{U}_1(r) \tilde{U}_2(r')$ 满足(3)式。虽然许多物理上可能有兴趣的非定域位势没有包含在我们所考虑的情形中, 但是我们感觉上面的假设不是过分严的。由下面的结果可以看到这类位势在一些方面非常象原点的奇异性比 r^{-2} 弱的定域位势。

按照假设 (i), $U(r, r', R)$ 可以展开为 Legendre 级数

$$U(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\nu} (2\nu + 1) P_{\nu}(z) U_{\nu}(r, r').$$

由此得到

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) \varphi_l(r) = \int_0^{\infty} V_l(r, r') \varphi_l(r') dr', \quad (6)$$

其中

$$V_l(r, r') = 4\pi r r' U_l(r, r') = 2\pi r r' \int_{-1}^1 U(\vec{r}, \vec{r}') P_l(z) dz. \quad (7)$$

由于当 $|Im l| \rightarrow \infty$ 时 $P_l(z)$ 的渐近性质很坏, 所以(7)式不适于推广到复数 l 。因为 $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'z}$, 由假设 (ii) 知道 $U(r, r', z)$ 在除割线 $z \geq \frac{r^2 + r'^2}{2rr'} \geq 1$ 以外的全 z 平面解析。利用(2)式得到

$$U(r, r', z) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{r^2 + r'^2}{2rr'}}^{\infty} \frac{Im U(r, r', z')}{z' - z} dz'. \quad (8)$$

由此得到

$$\begin{aligned} V_l(r, r') &= 4\pi r r' \int_{\frac{r^2 + r'^2}{2rr'}}^{\infty} Q_l(z') Im U(r, r', z') dz' = \\ &= -4 \int_0^{\infty} Q_l \left(\frac{R^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right) Im U(r, r', iR) R dR. \end{aligned} \quad (9)$$

我们利用(9)式把 V_l 的定义推广到复数 l 。由(5)式知道在 $\text{Re } l > -\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ 时 (9) 式中的积分收敛, 即使 $r \rightarrow r'$ 。

(二) S 矩阵元对 λ 的解析性质

满足物理边界条件的方程(6)的解 $\varphi(\lambda, k, r)$ 服从如下的积分方程:

$$\varphi(\lambda, k, r) = \varphi_0(\lambda, k, r) + \int_0^r dr' G_\lambda(r, r') \int_0^\infty V_l(r', r'') \varphi(\lambda, k, r'') dr'', \quad (10)$$

其中 $\lambda = l + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda, k, r) &= 2^l \Gamma(\lambda + 1) k^{-\lambda} r^{\frac{1}{2}} J_\lambda(kr), \\ G_\lambda(r, r') &= \frac{\pi}{2} \sqrt{rr'} [J_\lambda(kr) Y_\lambda(kr') - J_\lambda(kr') Y_\lambda(kr)]. \end{aligned} \quad (11)$$

方程(10)可以改写为

$$\varphi(\lambda, k, r) = \varphi_0(\lambda, k, r) + \int_0^\infty K_\lambda(r, r'') \varphi(\lambda, k, r'') dr'', \quad (12)$$

其中

$$K_\lambda(r, r'') = \int_0^r G_\lambda(r, r') V_l(r', r'') dr'. \quad (13)$$

在附录中证明了: 当 $\text{Re } l \equiv l_1 \geq -\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$, $|l| < L$, 时

$$\begin{aligned} |V_l(r', r'')| &\leq C |\tilde{U}_1(r') \tilde{U}_2(r'')| \left(1 + \ln \frac{r'' + r'}{r'' - r'}\right) \left(\frac{r'}{r''}\right)^{l_1+1} r''(r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}), \\ &\quad r'' > r', \\ &\leq C |\tilde{U}_1(r') \tilde{U}_2(r'')| \left(1 + \ln \frac{r' + r''}{r' - r''}\right) \left(\frac{r''}{r'}\right)^{l_1+1} r'(r'^\epsilon + r'^{-\epsilon}), \\ &\quad r' > r'', \end{aligned} \quad (14)$$

上式中的因子 $\left(\frac{r'}{r''}\right)^{l_1+1}$ 恰好消去 $G_\lambda(r, r')$ 在 $r' = 0$ 处的奇异因子而保证积分

(13)收敛。在 $k > 0$, $|l| < L$, $\text{Re } l > -\frac{1}{2}$ 时^[9]

$$\begin{aligned} |\sqrt{kr} J_\lambda(kr)| &\leq C'' \left(\frac{kr}{1+kr}\right)^{l_1+1}, \quad |G_\lambda(r, r')| \leq \\ &\leq C' \frac{1}{k} \left(\frac{kr}{1+kr}\right)^{l_1+1} \left(\frac{kr'}{1+kr'}\right)^{-l_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$C(r'r') = C |\tilde{U}_1(r') \tilde{U}_2(r'')| \left(\ln \frac{r' + r''}{|r' - r''|} + 1\right), \quad (16)$$

则在 $r'' > r$ 时,

$$\begin{aligned} |K_\lambda(r, r'')| &\leq C' \left(\frac{kr}{1+kr}\right)^{l_1+1} \frac{1}{k} \int_0^r \left(\frac{kr'}{1+kr'}\right)^{-l_1} \left(\frac{kr'}{kr''}\right)^{l_1} C(r', r'') r' dr' \\ &\times (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) < C' \left(\frac{kr}{1+kr}\right)^{l_1+1} \int_0^\infty \frac{C(r', r'') r'}{(1+kr')^{\frac{1}{2}}} dr' r'' \left(\frac{1+kr''}{kr''}\right)^{l_1+1} \times \\ &\times (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) \frac{1}{\sqrt{1+kr''}}. \end{aligned} \quad (17)$$

在 $r'' < r$ 时, 利用 $\frac{d}{dr} \left(\frac{kr}{1+kr} \right) > 0$ 得到

$$\begin{aligned}
 |K_\lambda(r, r'')| &\leq C' \left(\frac{kr}{1+kr} \right)^{l+1} \frac{1}{k} \left[\int_0^{r''} \left(\frac{kr'}{1+kr'} \right)^{-l} \left(\frac{kr'}{kr''} \right)^{l_1} \times \right. \\
 &\quad \times C(r'r'') r' dr' (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) + \\
 &\quad \left. + \int_{r''}^r \left(\frac{kr'}{1+kr'} \right)^{-l} \left(\frac{kr''}{kr'} \right)^{l_1} r'' C(r', r'') (r'^\epsilon + r'^{-\epsilon}) dr' \right] \leq \\
 &\leq C' \left(\frac{kr}{1+kr} \right)^{l+1} \left(\frac{1+kr''}{kr''} \right)^{l+1} \int_0^\infty \frac{C(r', r'') r'}{(1+kr')^{\frac{1}{2}}} \times \\
 &\quad \times (r'^\epsilon + r'^{-\epsilon}) dr' r'' (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) \frac{1}{\sqrt{1+kr''}}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

由(4)(7)(8)知道

$$|K_\lambda(r, r')| < B \left(\frac{kr}{1+kr} \right)^{l+1} |\tilde{U}_2(r'')| kr'' (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) \left(\frac{1+kr''}{kr''} \right)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{1+kr''}}. \quad (19)$$

令

$$\Phi(\lambda, k, r) = \varphi(\lambda, k, r) \left(\frac{kr}{1+kr} \right)^{-l-1}, \quad (20)$$

则 $\Phi(\lambda, k, r)$ 满足方程

$$\Phi(\lambda, k, r) = \Phi_0(\lambda, k, r) + \int_0^\infty \tilde{K}_\lambda(r, r'') \Phi(\lambda, k, r'') dr'', \quad (21)$$

其中

$$\tilde{K}_\lambda(r, r'') = K_\lambda(r, r'') \left(\frac{kr}{1+kr} \right)^{-l-1} \left(\frac{kr''}{1+kr''} \right)^{l+1}. \quad (22)$$

故 $\tilde{K}_\lambda$ 可写为

$$\tilde{K}_\lambda(r, r'') = N_\lambda(r, r'') \tilde{U}_2(r'') r'' (r''^\epsilon + r''^{-\epsilon}) \frac{1}{\sqrt{1+kr''}}.$$

而

$$|N_\lambda(r, r'')| < B_0. \quad (23)$$

方程(21)的 Fredholm 解核为

$$\tilde{R}(\lambda, k; r, r'') = \frac{\tilde{D}(\lambda, k; r, r'')}{\tilde{D}(\lambda, k)}. \quad (24)$$

利用 Khuri 用过的方法^[10]将 $\tilde{D}(\lambda, k; r, r'')$ 和 $\tilde{D}(\lambda, k)$ 写为