

## МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ КРИВИЗНАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗУБЧАТОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

Ф. Л. ЛИТВИН, ЧЖАН ЦЫ-СЯНЬ

(Ленинград)

В механизме, составленном из зубчатых колес, поверхности зубцов огибают одна другую в относительном движении.

Рассматривается способ определения кривизны в нормальном сечении огибающей поверхности  $\Sigma_2$  через кривизну соответствующего нормального сечения огибаемой поверхности  $\Sigma_1$ . Для этого находятся уравнения для скорости и ускорения контактной точки при перемещении ее по огибающей поверхности, выраженные через скорость и ускорение этой же контактной точки при перемещении ее по огибаемой поверхности. Изложенный способ позволяет найти кривизну огибающей поверхности, не определяя уравнения самой поверхности.

1. Постановка задачи. Предполагается, что в системе декартовых координат  $s_1 (x_1, y_1, z_1)$  задано уравнение огибающей поверхности  $\Sigma_1$ , жестко связанной с звеном 1 зубчатого механизма. Система  $s_1$  совершает заданное движение относительно неподвижной системы декартовых координат  $s_h (x_h, y_h, z_h)$ , жестко связанной с неподвижным звеном (стойкой) механизма. С системой  $s_2 (x_2, y_2, z_2)$ , движение которой относительно  $s_h$  также задано, жестко связана поверхность  $\Sigma_2$ , огибающая семейство  $\Sigma_1$  в относительном движении. Система  $s_2$  жестко связана с звеном 2 зубчатого механизма. Обычно уравнения поверхности  $\Sigma_2$  более сложные, чем уравнения  $\Sigma_1$ . Поэтому определение кривизны поверхности в ее нормальном сечении обычными методами, применяемыми в дифференциальной геометрии, требует громоздких выкладок и вычислений. Можно, однако, эти вычисления сильно упростить, если, не прибегая к составлению уравнений поверхности  $\Sigma_2$ , кривизну поверхности  $\Sigma_2$  выразить через кривизну поверхности  $\Sigma_1$ .

Положим, что поверхность  $\Sigma_1$  задана в системе  $s_h$  уравнением

$$\mathbf{r}_h^{(1)} = \mathbf{r}_h^{(1)}(u, \vartheta, \sigma_1) \quad (1.1)$$

где  $u$  и  $\vartheta$  — параметры поверхности,  $\sigma_1$  — параметр, определяющий движение системы координат  $s_1$  относительно  $s_h$ . Пусть при фиксированном значении параметра  $\sigma_1$  точка движется на поверхности  $\Sigma_1$  по линии  $F_1$ , для которой  $u = u(t)$ ,  $\vartheta = \vartheta(t)$ . Радиус-вектор кривой, по которой движется точка

$$\mathbf{r}_h^{(1)} = \mathbf{r}_h^{(1)}[u(t), \vartheta(t), \sigma_1] \quad (1.2)$$

Обозначим через

$$\mathbf{c}_h^{(1)} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_h^{(1)})_{\sigma_1 = \text{const}}$$

$$\mathbf{a}_h^{(1)} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_h^{(1)})_{\sigma_1 = \text{const}}$$

скорость и ускорение точки при движении по линии  $F_1$ .

Под нормальным сечением поверхности  $\Sigma_1$  подразумевается сечение плоскостью, проведенной через орт нормали  $\mathbf{e}_h^{(1)}$  к поверхности и вектор скорости  $\mathbf{c}_h^{(1)}$ .

Кривизна  $\kappa_1$  в таком нормальном сечении [6]

$$\kappa_1 = \frac{\mathbf{a}_h^{(1)} \mathbf{e}_h^{(1)}}{(\mathbf{c}_h^{(1)})^2} \quad (1.3)$$

Взаимооггибаемые поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  касаются одна другой по линии, в текущей точке которой поверхности имеют общий орт нормали. Кривизна  $\kappa_2$  поверхности  $\Sigma_2$ :

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{a}_h^{(2)} \cdot \mathbf{e}_h^{(1)}}{(\mathbf{c}_h^{(2)})^2} \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{c}_h^{(2)}$  и  $\mathbf{a}_h^{(2)}$  — скорость и ускорение точки, перемещающейся на поверхности  $\Sigma_2$  по линии  $F_2$ . Для определения кривизны  $\kappa_2$  необходимо скорость  $\mathbf{c}_h^{(2)}$  и ускорение  $\mathbf{a}_h^{(2)}$  выразить через скорость  $\mathbf{c}_h^{(1)}$  и ускорение  $\mathbf{a}_h^{(1)}$ .

Покажем, что в общем случае векторы  $\mathbf{c}_h^{(1)}$  и  $\mathbf{c}_h^{(2)}$  не коллинеарны и поэтому нормальные сечения поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не совпадают.

На фиг. 1 линия  $KL$  представляет собой линию контакта (характеристику) поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Этой характеристике соответствуют параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , определяющие соответственно положения систем координат  $s_1$  и  $s_2$  относительно неподвижной системы  $s_h$ . При бесконечно малом изменении параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  поверхности вступают в касание новыми линиями  $K_1'L_1'$  и  $K_2'L_2'$ .

Перемещение точки касания в неподвижном пространстве представляет геометрическую сумму перемещений: а) в переносном движении вместе с поверхностью, в) в относительном движении по поверхности. При этом (фиг. 2)

$$ds_h = MM' = ds_{eh}^{(1)} + ds_{rh}^{(1)} = ds_{eh}^{(2)} + ds_{rh}^{(2)} \quad (1.5)$$

$$(ds_{eh}^{(1)} = MM_1, ds_{rh}^{(1)} = M_1M', ds_{eh}^{(2)} = MM_2, ds_{rh}^{(2)} = M_2M')$$

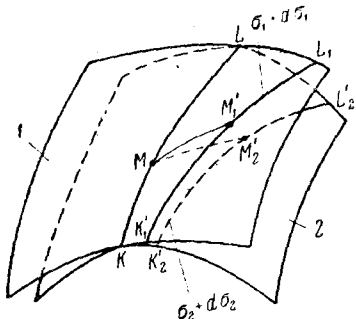
Выражение (1.5) можно представить и в такой форме:

$$\mathbf{v}_h^{(12)} = \mathbf{v}_{eh}^{(1)} - \mathbf{v}_{eh}^{(2)} = \mathbf{c}_h^{(2)} - \mathbf{c}_h^{(1)} \quad (1.6)$$

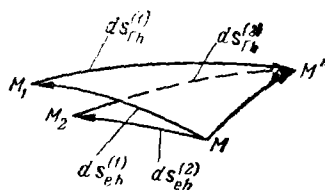
$$\mathbf{v}_{eh}^{(i)} = ds_{eh}^{(i)} / dt, \quad \mathbf{c}_h^{(i)} = ds_{rh}^{(i)} / dt \quad (i = 1, 2)$$

Здесь  $\mathbf{v}_h^{(12)}$  — скорость относительного движения точки  $M_1$ , жестко связанной с поверхностью  $\Sigma_1$ , относительно точки  $M_2$ , жестко связанной с поверхностью  $\Sigma_2$ .

Нормальные сечения поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  совпадут лишь в том случае, когда векторы  $\mathbf{c}_h^{(1)}$  и  $\mathbf{c}_h^{(2)}$  будут коллинеарны. Согласно зависимости (1.6), это станет возможным, если выбрать вектор  $\mathbf{c}_h^{(1)}$  коллинеарным  $\mathbf{v}_h^{(12)}$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Обобщенные формулы связи координат, скоростей и ускорений в трехзвенном механизме с высшей кинематической парой. Для того чтобы охватить общий случай передачи движений, примем расположение систем координат, изображенное на фиг. 3.

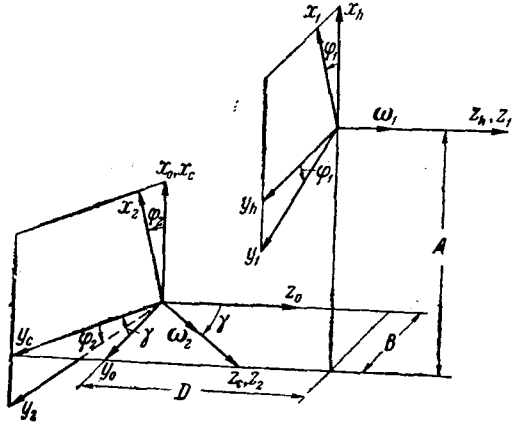
С подвижными звеньями 1 и 2 механизма связаны соответственно поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ ; третье звено — стойка — является неподвижным.

Система координат  $s_1(x_1, y_1, z_1)$  связана со звеном 1 механизма, совершающим вращательное движение вокруг оси  $z_1$ . Система координат  $s_2(x_2, y_2, z_2)$  связана с звеном 2, совершающим вращательное движение вокруг оси  $z_2$  и поступательные движения в направлениях осей  $x_h, y_h, z_h$ . Система координат  $s_h(x_h, y_h, z_h)$  связана со стойкой механизма. Системы координат  $s_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $s_c(x_c, y_c, z_c)$  — вспомогательные.

Переход от  $s_1$  к  $s_h$  выражается матричным уравнением

$$r_h^{(1)} = L_{h1} r_1$$

$$L_{h1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$



Фиг. 3

В обозначении матрицы  $L_{h1}$  здесь и ниже индекс  $h1$  указывает, что переход совершается от системы  $s_1$  к системе  $s_h$ . Через  $r_1$  и  $r_h^{(1)}$  обозначены столбцовые матрицы радиусов-векторов  $r_1$  и  $r_h^{(1)}$  одной и той же точки в системах  $s_1$  и  $s_h$ .

Переход от  $s_2$  к  $s_0$  выражается уравнением

$$r_0^{(2)} = L_{0c} L_{c2} r_2 \quad (2.2)$$

где

$$L_{c2} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad L_{0c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Произведение матриц

$$L_{02} = L_{0c} L_{c2} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \cos \gamma \sin \varphi_2 & \cos \gamma \cos \varphi_2 & \sin \gamma \\ -\sin \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & \cos \gamma \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Переход от  $s_2$  к  $s_h$  выражается матричным уравнением

$$r_h^{(2)} = L_{h2} r_2 + R_h^{(2)}, \quad L_{h2} = L_{0c}, \quad R_h^{(2)} = \begin{vmatrix} -A \\ -B \\ -D \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

В точке  $M$  касания поверхностей звеньев 1 и 2 имеем

$$r_h^{(1)} = r_h^{(2)} \quad L_{h1} r_1 = L_{h2} r_2 + R_h^{(2)} \quad (2.6)$$

В абсолютном движении (по отношению к системе  $s_h$ ) скорости и ускорения точки  $M$  обеих поверхностей одинаковы. Следовательно,  $\dot{r}_h^{(1)} = \dot{r}_h^{(2)}$  и  $\ddot{r}_h^{(1)} = \ddot{r}_h^{(2)}$ .

Дифференцируя (2.6), получим

$$\frac{dL_{h1}}{dt} r_1 + L_{h1} \dot{r}_1 = \frac{dL_{h2}}{dt} r_2 + L_{h2} \dot{r}_2 + \dot{R}_h^{(2)} \quad (2.7)$$

Пусть  $c_h^{(1)} = L_{h1} \dot{r}_1$ ,  $c_h^{(2)} = L_{h2} \dot{r}_2$  — столбцовые матрицы вектора скорости перемещения точки  $M$  по поверхностям  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , записанные в системе  $s_h$ .

Заметим также, что

$$\frac{dL_{h1}}{dt} r_1 = \frac{dL_{h1}}{dt} L_{1h} r_h = L_h^{(\omega_1)} r_h \quad (2.8)$$

$$\frac{dL_{h2}}{dt} r_2 = \frac{dL_{h2}}{dt} L_{2h} (r_h - R_h^{(2)}) = L_h^{(\omega_2)} (r_h - R_h^{(2)}) \quad (2.9)$$

Здесь

$$L_h^{(\omega_1)} = \omega_1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L_h^{(\omega_2)} = \omega_2 \begin{vmatrix} 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ \cos \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

На основании (2.7) — (2.10) получим

$$c_h^{(2)} = c_h^{(1)} + (L_h^{(\omega_1)} - L_h^{(\omega_2)}) r_h + L_h^{(\omega_2)} R_h^{(2)} - \dot{R}_h^{(2)} \quad (2.11)$$

Это уравнение можно представить в другой форме.

Скорость точки  $M_1$ , жестко связанной с огибаемой поверхностью

$$v_{eh}^{(1)} = \frac{dL_{h1}}{dt} r_1 = L_h^{(\omega_1)} r_h \quad (2.12)$$

Скорость точки  $M_2$ , жестко связанной с огибающей поверхностью,

$$v_{eh}^{(2)} = \frac{dL_{h2}}{dt} r_2 + \dot{R}_h^{(2)} = L_h^{(\omega_2)} (r_h - R_h^{(2)}) + \dot{R}_h^{(2)} \quad (2.13)$$

Столбцовая матрица  $v_h^{(12)}$  вектора скорости движения точки  $M_1$  относительно точки  $M_2$

$$v_h^{(12)} = v_{eh}^{(1)} - v_{eh}^{(2)} = (L_h^{(\omega_1)} - L_h^{(\omega_2)}) r_h + L_h^{(\omega_2)} R_h^{(2)} - \dot{R}_h^{(2)} \quad (2.14)$$

На основании (2.11) и (2.14) имеем также

$$c_h^{(2)} = c_h^{(1)} + v_h^{(12)}$$

Дифференцируя (2.7), получим

$$\frac{d^2 L_{h1}}{dt^2} r_1 + 2 \frac{dL_{h1}}{dt} \dot{r}_1 + L_{h1} \ddot{r}_1 = \frac{d^2 L_{h2}}{dt^2} r_2 + 2 \frac{dL_{h2}}{dt} \dot{r}_2 + L_{h2} \ddot{r}_2 + \ddot{R}_h^{(2)}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L_{h1}}{dt^2} L_{1h} r_h + 2 \frac{dL_{h1}}{dt} L_{1h} \dot{r}_h^{(1)} + a_h^{(1)} &= \frac{d^2 L_{h2}}{dt^2} L_{2h} (r_h - R_h^{(2)}) + \\ + 2 \frac{dL_{h2}}{dt} L_{2h} \dot{r}_h^{(2)} + a_h^{(2)} + \ddot{R}_h^{(2)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь  $a_h^{(1)} = L_{h1} \ddot{r}_1$ ,  $a_h^{(2)} = L_{h2} \ddot{r}_2$  — столбцовые матрицы векторов ускорений в системе  $s_h$ . Решим (2.15) относительно  $a_h^{(2)}$  и используем при преобразованиях следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{dL_{h1}}{dt} L_{1h} &= L_h^{(\omega_1)}, & \frac{d^2 L_{h1}}{dt^2} L_{1h} &= (L_h^{(\omega_1)})^2 + L_h^{(\varepsilon_1)} \\ \frac{dL_{h2}}{dt} L_{2h} &= L_h^{(\omega_2)}, & \frac{d^2 L_{h2}}{dt^2} L_{2h} &= (L_h^{(\omega_2)})^2 + L_h^{(\varepsilon_2)} \end{aligned}$$

где матрица

$$L_h^{(\varepsilon_i)} = dL_h^{(\omega_i)} / dt \quad (i = 1, 2).$$

В результате, с учетом выражения (2.11) получим

$$\begin{aligned} a_h^{(2)} &= a_h^{(1)} + 2 (L_h^{(\omega_1)} - L_h^{(\omega_2)}) c_h^{(1)} + [(L_h^{(\omega_1)})^2 - 2L_h^{(\omega_2)} L_h^{(\omega_1)} + \\ + (L_h^{(\omega_2)})^2 + L_h^{(\varepsilon_1)} - L_h^{(\varepsilon_2)}] r_h - [(L_h^{(\omega_2)})^2 - L_h^{(\varepsilon_2)}] R_h^{(2)} + 2L_h^{(\omega_2)} \dot{R}_h^{(2)} - \ddot{R}_h^{(2)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

На основании (2.14) и (2.16) для проекций векторов  $c_h^{(2)}$  и  $a_h^{(2)}$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_{xh}^{(2)} &= c_{xh}^{(1)} - y_h (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - z_h \omega_2 \sin \gamma + B\omega_2 \cos \gamma - D\omega_2 \sin \gamma + \dot{A} \\ c_{yh}^{(2)} &= c_{yh}^{(1)} + x_h (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - A\omega_2 \cos \gamma + \dot{B} \\ c_{zh}^{(2)} &= c_{zh}^{(1)} + (x_h + A) \omega_2 \sin \gamma + \dot{D} \\ a_{xh}^{(2)} &= a_{xh}^{(1)} - 2c_{yh}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - 2c_{zh}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma - x_h (\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma + \omega_2^2) - \\ &\quad - y_h (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cos \gamma) - z_h \varepsilon_2 \sin \gamma - A\omega_2^2 + B\varepsilon_2 \cos \gamma - D\varepsilon_2 \sin \gamma + \\ &\quad + 2\dot{B}\omega_2 \cos \gamma - 2\dot{D}\omega_2 \sin \gamma + \ddot{A} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} a_{yh}^{(2)} &= a_{yh}^{(1)} + 2c_{xh}^{(1)} (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) + x_h (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cos \gamma) - \\ &\quad - y_h (\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma)^2 + z_h \omega_2^2 \cos \gamma \sin \gamma - A\varepsilon_2 \cos \gamma - B\omega_2^2 \cos^2 \gamma + \\ &\quad + D\omega_2^2 \cos \gamma \sin \gamma - 2\dot{A}\omega_2 \cos \gamma + \ddot{B} \\ a_{zh}^{(2)} &= a_{zh}^{(1)} + 2c_{xh}^{(1)} \omega_2 \sin \gamma + x_h \varepsilon_2 \sin \gamma - y_h \omega_2 \sin \gamma \\ &\quad (2\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma) - z_h \omega_2^2 \sin^2 \gamma + A\varepsilon_2 \sin \gamma + B\omega_2^2 \sin \gamma \cos \gamma - \\ &\quad - D\omega_2^2 \sin^2 \gamma + 2\dot{A}\omega_2 \sin \gamma + \ddot{D} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для упрощения вычислений  $c_h^{(2)}$  и  $a_h^{(2)}$  целесообразно принять  $\omega_1 = 1 \text{ рад/сек}$ ,  $\omega_2 = i_{21} \text{ рад/сек}$ , где  $i_{21}$  — передаточное число.

3. Формулы для вычисления кривизны. Предполагается, что в системе  $s_h$  поверхность  $\Sigma_1$  задана уравнением

$$r_h^{(1)} = r_h^{(1)}(u, \vartheta, \varphi_1) \quad (3.1)$$

где  $u$  и  $\vartheta$  — параметры поверхности,  $\varphi_1$  — фиксированный угол поворота звена 1.

Единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma_1$

$$e_h^{(1)} = k \left( \frac{\partial r_h^{(1)}}{\partial u} \times \frac{\partial r_h^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) \quad (3.2)$$

где  $k$  — нормирующий множитель.

Для определения характеристики на поверхности  $\Sigma_1$  к уравнению (3.1) нужно присоединить уравнение [3]

$$n_h \cdot v_h^{(12)} = e_h^{(1)} \cdot v_h^{(12)} = 0 \quad (n_h^{(1)} \text{ — вектор нормали}) \quad (3.3)$$

На основании уравнений (3.1) и (3.3) связь между параметрами  $u$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi_1$  для точек характеристики определится

$$F(u, \vartheta, \varphi_1) = 0 \quad (3.4)$$

Производные  $du/d\varphi_1$  и  $d\vartheta/d\varphi_1$  связаны зависимостью

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{d\varphi_1} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (3.5)$$

В целях упрощения формул для скорости  $c_h^{(1)}$  и ускорения  $a_h^{(1)}$  контактной точки прием, что  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 1 \text{ рад/сек}$ . Тогда

$$du/dt = du/d\varphi_1, \quad d\vartheta/dt = d\vartheta/d\varphi_1$$

В выражении для  $a_h^{(1)}$  можно не учитывать члены

$$(\partial r_h^{(1)}/\partial u) (d^2u/dt^2), \quad (\partial r_h^{(1)}/\partial \vartheta) (d^2\vartheta/dt^2)$$

что не изменит скалярного произведения  $a_h^{(1)} \cdot e_h^{(1)}$ . Это следует из того, что вектор  $e_h^{(1)}$  перпендикулярен векторам  $\partial r_h^{(1)}/\partial u$  и  $\partial r_h^{(1)}/\partial \vartheta$ .

С учетом таких упрощений

$$c_h^{(1)} = \frac{\partial r_h^{(1)}}{\partial u} \frac{du}{d\varphi_1} + \frac{\partial r_h^{(1)}}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} \quad (3.6)$$

$$a_h^{(1)} = \frac{\partial^2 r_h^{(1)}}{\partial u^2} \left( \frac{du}{d\varphi_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 r_h^{(1)}}{\partial u \partial \vartheta} \frac{du}{d\varphi_1} \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} + \frac{\partial^2 r_h^{(1)}}{\partial \vartheta^2} \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} \right)^2, \quad (3.7)$$

Кривизна в нормальном сечении огибаемой поверхности

$$\kappa_1 = \frac{a_h^{(1)} e_h^{(1)}}{(c_h^{(1)})^2} = \frac{L_h^{(1)} \left( \frac{du}{d\varphi_1} \right)^2 + 2M_h^{(1)} \frac{du}{d\varphi_1} \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} + N_h^{(1)} \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} \right)^2}{E_h^{(1)} \left( \frac{du}{d\varphi_1} \right)^2 + 2F_h^{(1)} \frac{du}{d\varphi_1} \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} + G_h^{(1)} \left( \frac{d\vartheta}{d\varphi_1} \right)^2} \quad (3.8)$$

Здесь  $L_h^{(1)}$ ,  $M_h^{(1)}$  и  $N_h^{(1)}$ ;  $E_h^{(1)}$ ,  $F_h^{(1)}$  и  $G_h^{(1)}$  — соответственно коэффициенты первой и второй квадратичной форм Гаусса. Производные  $du/d\varphi_1$  и  $d\vartheta/d\varphi_1$  связаны зависимостью (3.5).

Кривизна в нормальном сечении огибающей поверхности определяется из формулы (1.4).

Проекции векторов  $c_h^{(2)}$  и  $a_h^{(2)}$  вычисляются из уравнений (2.17) и (2.18) после определения  $c_h^{(1)}$  и  $a_h^{(1)}$  из зависимостей (3.6) и (3.7).

Положительный знак  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2$ ) указывает, что направление радиуса кривизны совпадает с направлением орта нормали  $e_h^{(1)}$ .

Рассмотрим важнейшие частные случаи.

При передаче вращательного движения между перекрещивающимися осями с постоянным отношением скоростей в выражениях (2.17) и (2.18) нужно положить:  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $A = \text{const}$ ,  $B = D = 0$ .

В случае передачи вращательного движения с постоянным соотношением скоростей между пересекающимися осями в указанных зависимостях нужно положить  $e_1 = e_2 = 0$ ,  $A = B = D = 0$ ; величина  $\gamma$  является величиной угла между осями вращения колес. Так как вращение звена 2 (при внешнем зацеплении) совершается при этом в направлении, противоположном принятому на фиг. 3, в зависимостях (2.17) и (2.18) должен быть изменен знак перед  $\omega_2$ .

Если передача вращения производится при параллельных осях в зависимостях (2.17) и (2.18) нужно положить:  $\gamma = 0$ ,  $A = \text{const}$ ,  $B = D = 0$ . Знак перед  $\omega_2$  сохраняется при внутреннем зацеплении колес и должен быть изменен на противоположный при внешнем зацеплении. Можно показать, что связь между кривизнами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  определится в рассматриваемом случае уравнением, аналогичным уравнению Эйлера — Савари.

Изложенный в статье метод применим и для изучения связи между кривизнами поверхностей звеньев пространственного кулачкового механизма. Для случая, когда пространственный кулачок совершает вращательное движение, а ведомое звено (толкатель) совершает поступательное движение в направлении, параллельном оси  $z_h$ , примем: звено 2 — кулачок, звено 1 — толкатель,  $x_h$  — ось конического или цилиндрического ролика, которым снабжается толкатель, угол  $\gamma = 0$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $A = \text{const}$ ,  $B = 0$ ,  $D = f(\varphi_2)$  — функция, связывающая поступательные перемещения толкателя и углы поворота кулачка.

Поступило 15 IX 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин Н. И. Аналитические основы дифференциального метода исследования зубчатых зацеплений. Тр. семинара по теории машин и механизмов, 1957, вып. 64.
2. Колчин Н. И. Кривизна сопряженных поверхностей в пространственных зацеплениях. Тр. семинара по теории машин и механизмов, 1953, вып. 49.
3. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений, Физматгиз, 1960.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
5. Павлов А. М. Определение кривизны взаимноогibaемых поверхностей в пространственных зацеплениях. Тр. ЛПИ, 1960, № 211.
6. Рашевский Г. К. Курс дифференциальной геометрии. ГОНТИ, 1939.
7. Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А. Теория матриц и ее приложения. ИЛ, 1950.