《高等数学习题集》

习题解答

（上册）

北京邮电学院数学教研室

一九七九年

编印说明

编印本习题解答是为了供本院学生学习参考之用，题目取自同济大学数学教研组所编“高等数学习题集”（1965年修订本）。大部分解答采用了上海科技大学的油印稿，由本教研室集体校阅。由于时间仓促，题解中会有不少错误，请参考者及时指出，以便更正。

数学教研组

一九七九年五月

上册目录

第一编　解析几何

第二编　数学分析

下册目录

注意：本书在题目号码右上角加记号“*”时，表示较难之题；在题目号码右上角加记号“△”时，表示超出大纲之题。

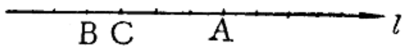
Z012147

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.1 设有轴上三点 A，B，C，它们的排列次序如图，A 和 B 间距离为 4，C 和 B 间距离为 1。



1.1 图

(a) 求轴上有向线段 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 的值。

(b) 若以点 A 为原点，那么点 A，B，C 的坐标如何？

解　(a) $\overline{AB}=-4$；$\overline{AC}=-3$；$\overline{BC}=1$

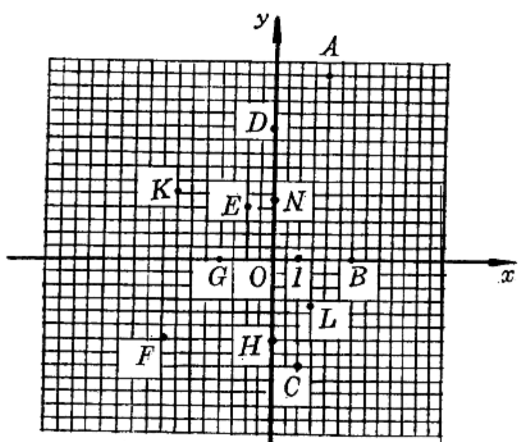
(b) $A(0)$；$B(-4)$；$C(-3)$。

1.2 已知数轴上点 A，B，C 的坐标依次为 -6，0，8，求轴上有向线段 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，的值。

解　$\overline{AB}=0-(-6)=6$；$\overline{BC}=8-0=8$；$\overline{CA}=-6-8=-14$。

1.3 作下列各点：$A(2,7)$，$B(3,0)$，$C(1,-4)$，$D(0,5)$，$E(-1,2)$，$F(-4,-3)$，$G(-2,0)$，$H(0,-3)$，$K\left(-3\frac{1}{2},2\frac{1}{3}\right)$，$L(\sqrt{2},-\sqrt{3})$，$N(0,\sqrt{5})$。

解



1.3 图

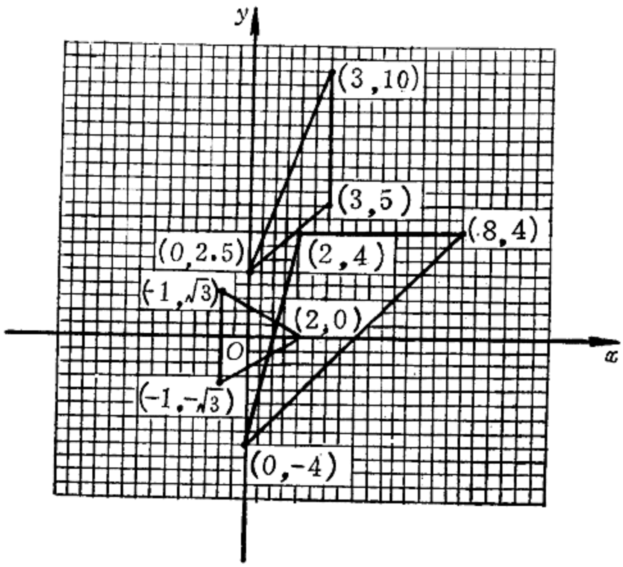
1.4 三角形的三个顶点的位置如下：

(a) (8, 4), (0, -4), (2, 4)；

(b) (3, 5), (3, 10), (0, 2.5)；

(c) (2, 0), $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$。求作这些三角形。

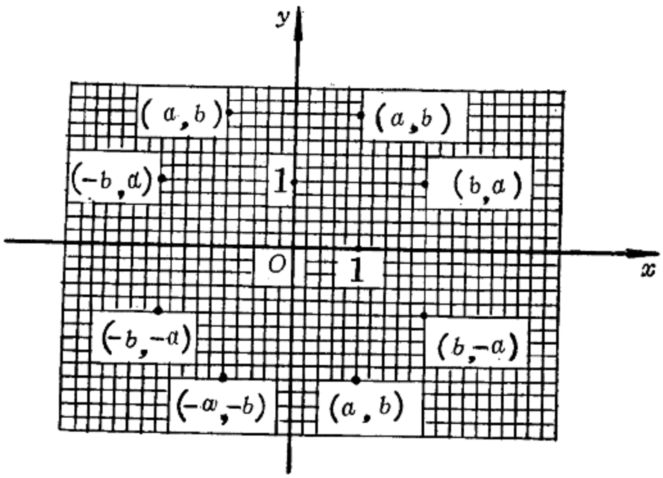
解



1.4 图

1.5 设 $a=1$，$b=2$，求作点 (a, b)，(b, a)，$(-a, b)$，$(b, -a)$，$(-b, a)$，$(a, -b)$，$(-a, -b)$ 和 $(-b, -a)$。

解



(注)
第二象限中的 (a, b) 应改为 $(-a, b)$
第四象限中的 (a, b) 应改为 $(a, -b)$

1.5 图

1.6 一正方形的边长为 2 单位长度，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标将如何？

解　i)　(0,0)，(0,2)，(2,2)，(2,0)

ii)　(0,0)，(2,0)，(2,-2)，(0,-2)

iii)　(0,0)，(-2,0)，(-2,2)，(0,2)

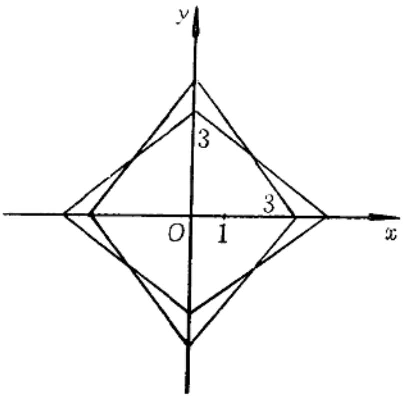
iv)　(0,0)，(0,-2)，(-2,-2)，(-2,0)。

1.7 菱形每边长为5，它有一对角线长6，如果把菱形的二对角线放在二坐标轴上。求它的各个顶点的坐标。

解　菱形的另一对角线长 $2\sqrt{5^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=8$，把菱形中心置于原点，则有二种情况：

i)　(3,0)，(0,4)，(-3,0)，(0,-4)；

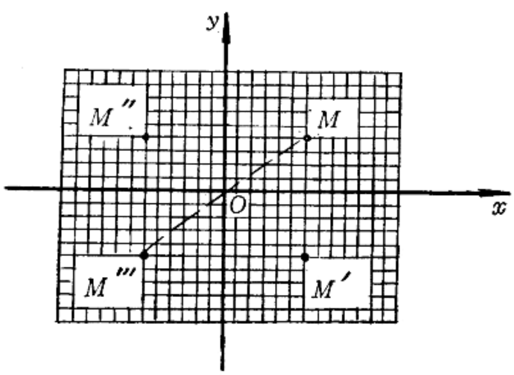
ii)　(4,0)，(0,3)，(-4,0)，(0,-3)。



1.7 图

1.8 已知点M(3,2)。作它关于横轴，纵轴，原点的对称点。求这些点的坐标。

解　横轴对称点 M'(3,-2)；



1.8 图

纵轴对称点 $M''(-3,2)$；

原点对称点 $M'''(-3,-2)$。

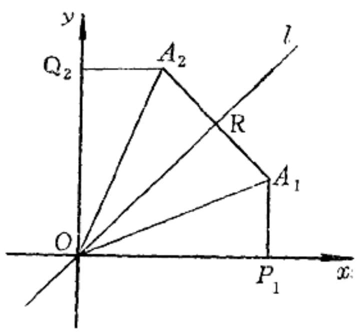
1.9 证明点 $A_1(a,b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点 A_2 必有坐标(b,a)。

证 联 A_1，A_2 交 l 于 R，联 OA_1 及 OA_2 作 $A_1P_1\perp x$ 轴，$A_2Q_2\perp y$ 轴，分别交于 P_1 及 Q_2 点。由对称性

∴ $\mathrm{Rt}\Delta OA_1R\cong\mathrm{Rt}\Delta OA_2R$，从而

$|OA_1|=|OA_2|$，又$\angle A_1OR=\angle A_2OR$

∴ $\angle A_1OP_1=\angle A_2OQ_2$， 故 $\mathrm{Rt}\Delta OA_1P_1\cong\mathrm{Rt}\Delta OA_2Q_2$，于是就得 $|OP_1|=|OQ_2|$，$|P_1A_1|=|Q_2A_2|$，即$|x|=|b|$，$|y|=|a|$。注意到正负值的关系，即知$x=b$，$y=a$，故 A_2 的坐标为 (b,a)。



1.9 图

1.10 点 B 与点 $A(2,4)$ 对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，求点 B 的坐标。

解 由1.9题，则 $B(4,2)$。

1.11 一点在某一坐标系下的坐标为 $x=2$，$y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点：(*a*) $(4,5)$；(*b*) $(4,-5)$；(*c*) $(-4,5)$；(*d*) $(-4,-5)$。该点在新系下的坐标等于什么？

解 (*a*) $x=2-4=-2$， $y=-1-5=-6$；

(*b*) $x=2-4=-2$， $y=-1-(-5)=4$；

(*c*) $x=2-(-4)=6$， $y=-1-5=-6$；

(*d*) $x=2-(-4)=6$， $y=-1-(-5)=4$。

1.12 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为$(12,-7)$和$(0,15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解 $O_{1x}=0-12=-12$，$O_{1y}=15-(-7)=22$。

$O_{2x}=12-0=12$，$O_{2y}=-7-15=-22$。

1.13 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 $60°$，点 $M(1,\sqrt{3})$在新系下的坐标等于什么？

解 因为有

$$\left.\begin{aligned}1&=M_x\cos60°-M_y\sin60°\\ \sqrt{3}&=M_x\sin60°+M_y\cos60°\end{aligned}\right\}$$

即　　　$2 = M_x - M_y\sqrt{3}$，$2\sqrt{3} = M_x\sqrt{3} + M_y$

∴　　　$4M_x = 8$，∴　$M_x = 2$，　$M_y = 0$。

1.14　如果将坐标轴旋转45°，点$M(1,\sqrt{3})$的坐标将如何？

解　∵

$$\left.\begin{aligned} 1 &= M_x\cos 45° - M_y\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}M_x - \frac{\sqrt{2}}{2}M_y \\ \sqrt{3} &= M_x\sin 45° + M_y\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}M_x + \frac{\sqrt{2}}{2}M_y \end{aligned}\right\}$$

∴　　$\sqrt{2}M_x = 1 + \sqrt{3}$，　∴　$M_x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$。

故而　$M_y = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

1.15　坐标轴应该旋转多少角度，方能使点$M(2,0)$的横坐标和纵坐标变成相等？$\left(我们设 -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$。

解：由假设，在假定变换后坐标为(a, a)的情况下，有下列关系

$$\begin{cases} 2 = a\cos\alpha - a\sin\alpha \\ 0 = a\cos\alpha + a\sin\alpha \end{cases}$$

由第二式，则 $\cos\alpha = -\sin\alpha$，即 $\operatorname{tg}\alpha = -1$，　∴　$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

两点间的距离，线段的定比分点

1.16　求下列各题两点间的距离：

(*a*)　(5, 2)和(1, −1)；　(*b*)　(−6, 3)和(0, −5)；　(*c*)　(0, 0)和(−3, 4)；

(*d*)　(9, −7)和(4, 5)

解：(*a*)　$d = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$；

(*b*)　$d = \sqrt{(-6-0)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$；

(*c*)　$d = \sqrt{3^2+4^2} = 5$；

(*d*)　$d = \sqrt{(9-4)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

1.17　已知三角形的顶点　$A(3,2)$；$B(-1,-1)$和$C(11,-6)$，求三角形的周长。

解　　$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$，$BC = \sqrt{12^2+5^2} = 13$，

$AC = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$；故　$S = 5 + 13 + 8\sqrt{2} = 2(9 + 4\sqrt{2})$。

1.18　试证顶点为　$A(0,0)$，$B(3,1)$及$C(1,7)$的三角形是直角三角形。

证　有　$AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$，$BC = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$，

$AC = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$。

现在因为$\overline{AC}^2 = 50 = 40 + 10 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$，故$\Delta ABC$为直角三角形（其中$AC$为斜边）

1.19　一点从点$A(-3,-2)$作直线运动移至点$B(4,5)$，求该点所经过的距离。

解　　　$S = \sqrt{(4+3)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{7^2+7^2} = 7\sqrt{2}$

1.20　证明点(7,2)和点(1,−6)在以(4,−2)为圆心的圆周上，并求这个圆的半径。

解 ∵ (7,2)到(4,−2)的距离 $d_1=\sqrt{3^2+4^2}=5$；(1,−6)到(4,−2)的距离 $d_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$，故 $d_1=d_2$，∴ (7,2)和(1,−6)同在以(4,−2)为圆心，且半径 $R=5$ 的圆上。

1.21 在 x 轴上求与 $A(5,12)$ 的距离为13单位的点的坐标。

解 设 x 轴的点坐标为 $B(x,0)$，则由假设有方程式：

$$13=\sqrt{(x-5)^2+(0-12)^2},$$

即 $169=(x-5)^2+144$，∴ $(x-5)^2=25$

故 $x-5=\pm 5$，∴ $x_1=0$，$x_2=+10$

所以所求点有二个：$B_1(0,0)$；$B_2(10,0)$。

1.22 在第Ⅰ象限角的平分线上求一点，使它与点 $A(0,2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 单位。

解 因为所求点在第Ⅰ象限角的平分线上，故可假定为 $B(a,a)$

由假设，则 $\sqrt{2}=\sqrt{(a-0)^2+(a-2)^2}$，即是

$$2=a^2+a^2-4a+4$$

∴ $2a^2-4a+2=0$，$a^2-2a+1=0$，∴ $a=1$。

因此所求点为 $B(1,1)$

1.23 已知点 M 的横坐标等于7，而到点 $N(-1,5)$ 的距离等于10单位。求点 M 的纵坐标。

解 设所求点为 $B(7,y)$，由设有：$10=\sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}$，即

$$100=64+(y-5)^2,\ \therefore\ (y-5)^2=36,\ y-5=\pm 6。$$

因而 $y_1=-1$，$y_2=11$，因此所求点有二个(7,−1)和(7,11)

1.24 已知点 M 到两坐标轴和点(3,6)都有相等的距离，求点 M 的坐标。

解 设所求点为 (x,y)，则由假设 $|x|=|y|=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$

故 $x^2=(x-3)^2+(x-6)^2$，即 $x^2=x^2-6x+9+x^2-12x+36$ 或 $x^2-18x+45=0$，

∴ $x_1=3$，$x_2=15$，故本题所求之点有二个(3,3)和(15,15)

1.25 求与已知三点 $A(2,2)$，$B(-5,1)$ 和 $C(3,-5)$ 等距离的点。

解 设此点为 $M(x,y)$，由假设，即有下列关系式：

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(x+5)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+5)^2$$

或
$$\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+8=x^2+y^2+10x-2y+26\\x^2+y^2-4x-4y+8=x^2+y^2-6x+10y+34\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}14x+2y+18=0\\2x-14y-26=0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}7x+y+9=0\ \cdots ①\\x-7y-13=0\cdots ②\end{cases}$$

①×7+②得 $50x+50=0$，∴ $x=-1$，故 $y=-2$。

∴ 所求点是 $M(-1,-2)$

1.26 试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半。

证 设三角形之三顶点为 $A(x_a,y_a)$，$B(x_b,y_b)$，$C(x_c,y_c)$

则 AB 之中点 $E(x_e,y_e)=E\left(\frac{x_a+x_b}{2},\ \frac{y_a+y_b}{2}\right)$

AC 之中点 $F(x_f,y_f)=F\left(\frac{x_a+x_c}{2},\ \frac{y_a+y_c}{2}\right)$，

$$\therefore \qquad EF=\sqrt{\left(\frac{x_a+x_c}{2}-\frac{x_a+x_b}{2}\right)^2+\left(\frac{y_a+y_c}{2}-\frac{y_a+y_b}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_c-x_b)^2+(y_c-y_b)^2}=\frac{1}{2}BC\text{。}$$

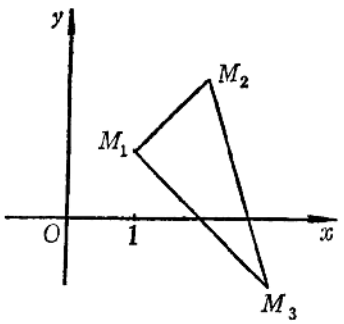
1.27 设点 $M_1(1,1)$，$M_2(2,2)$，$M_3(3,-1)$是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点。

解 设它为 $M_4(x,y)$，由条件，则有：$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}$，$\overline{M_2M_3}=\overline{M_1M_4}$

即
$$\left.\begin{aligned}\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}&=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}\\ \sqrt{(3-2)^2+(-1-2)^2}&=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned}2&=x^2+y^2-6x+2y+10\\ 10&=x^2+y^2-2x-2y+2\end{aligned}\right\} \text{或} \begin{cases}x^2+y^2-6x+2y=-8\\ x^2+y^2-2x-2y=8\end{cases}$$

相减，$\quad -4x+4y=-16$，$\therefore\ x=y=4$



1.27 图

代入第一方程得：

$$y^2+8y+16+y^2-6y-24+2y+8=0$$

即 $\quad 2y^2+4y=0$，$\therefore\ y_1=-2$，$y_2=0$

故 $x_1=2$，$x_2=4$，这样就得到第四个顶点的二个解：$(2,-2)$，$(4,0)$

又由 $\quad \overline{M_1M_3}^2=8=(x-2)^2+(y-2)^2=\overline{M_2M_4}^2$

$\quad \overline{M_2M_3}^2=10=(x-1)^2+(y-1)^2=\overline{M_4M_1}^2$

得到 $\quad x^2+y^2-4x-4y=0$ 及 $x^2+y^2-2x-2y=8$

相减 $\quad 2x+2y=8$，$\therefore\ x=-y+4$，代入第一方程：

$$y^2-8y+16+y^2+4y-16-4y=0$$

即 $\quad 2y^2-8y=0$，$\therefore\ y_2=0$，$y_3=4$，对应 $x_2=4$，$x_3=0$，

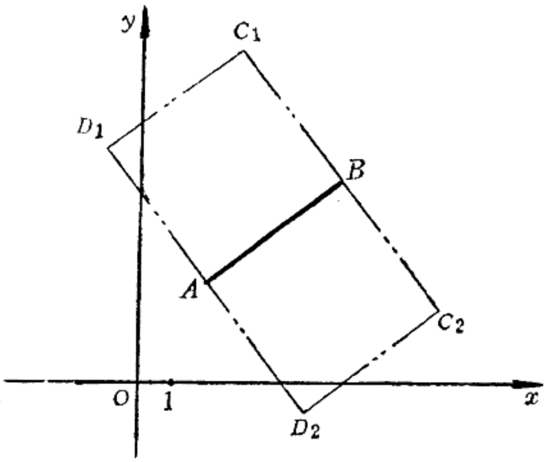
因此又得到 M_4 的另一解 $(0,4)$，由此得到三解：

$$(2,-2)，\text{或}\ (4,0)，\text{或}\ (0,4)。$$

1.28 设正方形相邻两顶点是 $A(2,3)$ 和 $B(6,6)$，求其余的顶点。

解 先求 $C(x_c,y_c)$，因为

$$\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2=2[4^2+3^2]=(x_c-2)^2+(y_c-3)^2$$
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2=[4^2+3^2]=(x_c-6)^2+(y_c-6)^2$$



1.28 图

化简成：
$$\begin{cases} x_c^2+y_c^2-4x_c-6y_c=37 \\ x_c^2+y_c^2-12x_c-12y_c=-47 \end{cases}$$

相减得 $8x_c+6y_c=84$， $\therefore\ y_c=-\dfrac{4}{3}x_c+14$，

代入化简得 $x_c^2-12x_c+27=0$， $\therefore\ x_{c1}=3$， $x_{c2}=9$，

相应地， $y_{c1}=10$， $y_{c2}=2$。

于是得到C的结果为(3,10) 及 (9,2)

现在再来求 D_1 及 D_2。由$\overline{D_1A}=\overline{D_1C_1}$ 及 $\overline{D_2A}=\overline{D_2C_2}$ 来建立方程：

i) $(x_{d_1}-2)^2+(y_{d_1}-3)^2=(x_{d_1}-3)^2+(y_{d_1}-10)^2=25$

ii) $(x_{d_2}-2)^2+(y_{d_2}-3)^2=(x_{d_2}-9)^2+(y_{d_2}-2)^2=25$

由 i) 解得：$x_{d_1}=-1$，$y_{d_1}=7$；由 ii) 解得：$x_{d_2}=5$，$y_{d_2}=-1$，

1.29 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的中点：

(*a*) (7,4)，(3,2)； (*b*) (6,−4)，(2,2)； (*c*) $(a,1)$，$(1,a)$；

(*d*) (0,0)，$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$； (*e*) $\left(-3\dfrac{3}{8},\ -7\dfrac{5}{8}\right)$，$\left(2\dfrac{3}{4},\ -4\dfrac{1}{2}\right)$

解 (*a*) $\left(\dfrac{7+3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(5,3)$， (*b*) $\left(\dfrac{6+2}{2},\ \dfrac{-4+2}{2}\right)=(4,-1)$；

(*c*) $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{1+a}{2}\right)$； (*d*) $\left(\dfrac{0+0}{2},\ \dfrac{0+\frac{2}{3}}{2}\right)=\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$；

(*e*) $\left(\dfrac{1}{2}\left[-3\dfrac{3}{8}+2\dfrac{3}{4}\right],\ \dfrac{1}{2}\left[-7\dfrac{5}{8}+\left(-4\dfrac{1}{2}\right)\right]\right)=\left(-\dfrac{5}{16},\ -6\dfrac{1}{16}\right)$

1.30 从点$A(2,3)$引一线段到点$B(7,-2)$，再延长同样的长度。求延长线端点的坐标。

解 设端点为$C(x,y)$，则有 $\dfrac{x-2}{7-2}=2:1=\dfrac{y-3}{-2-3}$，

∴ $x=12$，$y=-7$，故端点为$C(12,-7)$。

1.31 已知两点 $A(5,4)$和$B(6,-9)$。延长线段$\overline{AB}$至点C使$BC=\frac{1}{2}AB$，求点C的坐标。

解 依所设 $(x_c-6):(6-5)=(y_c+9):(-9-4)=\frac{1}{2}:1$。

即 $(x_c-6):1=(y_c+9):(-13)=\frac{1}{2}:1$， ∴ $x_c=6\frac{1}{2}$，$y_c=-15\frac{1}{2}$。

故所求端点为$C\left(6\frac{1}{2}，-15\frac{1}{2}\right)$。

1.32 已知两点$A(2,3)$，$B(3,5)$，求分线段$\overline{AB}$得比值$1:3$的点M的坐标。

解 应用公式，则 $x_M==\dfrac{2+3\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{4}$，$y_M=\dfrac{3+5\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{7}{2}$

∴ $M\left(\dfrac{9}{4}，\dfrac{7}{2}\right)$。

1.33 已知两点$A(2,1)$，$B(3,9)$。求 (*a*) 分线段$\overline{AB}$得比值$4:1$的点M的坐标；(*b*) 分线段$\overline{BA}$得比值$4:1$的M点的坐标。

解 (*a*) $M_x=\dfrac{2+3\times4}{1+4}=\dfrac{14}{5}$，$M_y=\dfrac{1+9\times4}{1+4}=\dfrac{37}{5}$，

(*b*) $M_x=\dfrac{3+2\times4}{1+4}=\dfrac{11}{5}$，$M_y=\dfrac{9+1\times4}{1+4}=\dfrac{13}{5}$。

1.34 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点。(*a*) $(-1,2)$，$(-10,-1)$； (*b*) $(11,6)$，$(2,3)$。

解 (*a*) $M_x^{(1)}\dfrac{-1-10\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-4$，$M_y^{(1)}=\dfrac{2-1\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$，得$M^{(1)}(-4,1)$；

$M_x^{(2)}=\dfrac{-1-10\times2}{1+2}=-7$，$M_y^{(2)}=\dfrac{2-1\times2}{1+2}=0$， 得$M^{(2)}(-7,0)$。

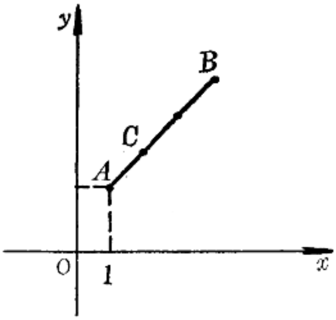
(*b*) $N_x^{(1)}=\dfrac{11+2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=8$，$N_y^{(1)}=\dfrac{6+3\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=5$，得$N^{(1)}(8,5)$，

$N_x^{(2)}=\dfrac{11+2\times2}{1+2}=5$，$N_y^{(2)}=\dfrac{6+3\times2}{1+2}=4$，得$N^{(2)}(5,4)$

1.35 点$C(2,3)$将线段$\overline{AB}$分为$1:2$。如已知点A的坐标为$(1,2)$，求点B的坐标。

解 ∵ $\dfrac{AB}{BC}=-\dfrac{3}{2}$，故 $B_x=\dfrac{1+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)}=4$，

$$B_y=\frac{2+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)}=5\quad 故\ B(4,5)$$



1.35 图

1.36 线段 $\overline{AB}$ 被点 $M_1(1,2)$ 和 $M_2(3,4)$ 分成相等的三部分。求点 A 和 B 的坐标。

解 $\lambda_1=\frac{\overline{M_1A}}{\overline{AM_2}}=\frac{1}{-2}$, $\lambda_2=\frac{\overline{M_1B}}{\overline{BM_2}}=\frac{2}{-1}$。

∴ $x_A=\frac{1+3\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1$, $y_A=\frac{2+4\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=0$。

$x_B=\frac{1+3\times(-2)}{1+(-2)}=5$, $y_B=\frac{2+4\times(-2)}{1+(-2)}=6$

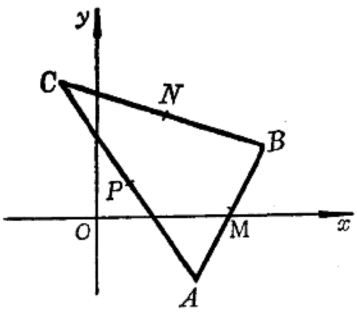
故 $A(-1,0)$, $B(5,6)$

1.37 两点 $A(x,5)$ 和 $B(-2,y)$ 间的线段被点 $M(1,1)$ 平分。求出点 A 的横坐标和点 B 的纵坐标。

解 ∵ $1=\frac{x-2}{2}$, $1=\frac{5+y}{2}$, ∴ $x=4$, $y=-3$

故 $A(4,5)$, $B(-2,-3)$。

1.38 已知三角形的顶点的坐标 $A(3,-2)$, $B(5,2)$ 和 $C(-1,4)$。求它中线的长。



1.38 图

解　设$\overline{AB}$之中点为M，则$M(x,y)=M(4,0)$

设BC之中点为N，则$N(x,y)=N(2,3)$

设AC之中点为P，则$P(x,y)=P(1,1)$

故　$\overline{AN}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}$，　$\overline{BP}=\sqrt{(5-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{17}$，

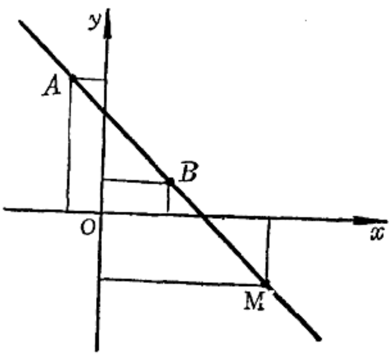
$\overline{CM}=\sqrt{(4+1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{41}$。

1.39　直线由两点$A(-1,4)$和$B(2,1)$决定，在这条直线上求横坐标等于5单位的点。

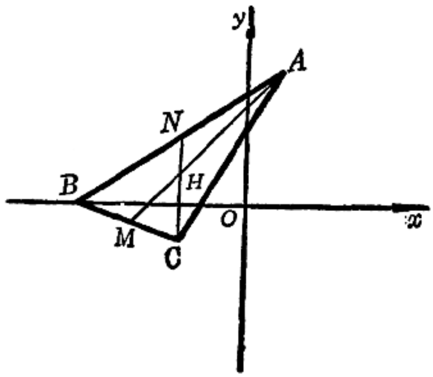
解　设这点为$M(5,y)$，则$\lambda=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\dfrac{-1-5}{5-2}=-2$

故　$$y=\frac{4+1(-2)}{1+(-2)}=\frac{2}{-1}=-2$$

即　$$M=M(5,-2)。$$



1.39 图



1.40 图

1.40　已知三角形的顶点：$A(1,4)$，$B(-5,0)$及$C(-2,-1)$。求它的中线的交点。

解　设BC之中点为M，则$M=\left(-\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$。中线交点为$H(x,y)$，则由定理，

$$\overline{AH}:\overline{HM}=2:1\text{，即 }\lambda=2$$

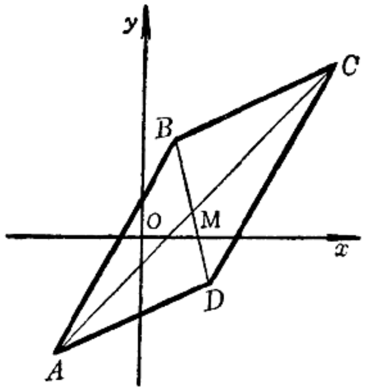
故　$$x=\frac{1-\frac{7}{2}\times 2}{1+2}=-2,\qquad y=\frac{4-\frac{1}{2}\times 2}{1+2}=1\quad\text{即}H(-2,1)$$

1.41　已知平行四边形的相邻两顶点的坐标为$A\left(-4\dfrac{1}{2},\ -7\right)$和$B(2,6)$及对角线的交点$M\left(3,\ 1\dfrac{1}{2}\right)$，求它的其余两个顶点的坐标。

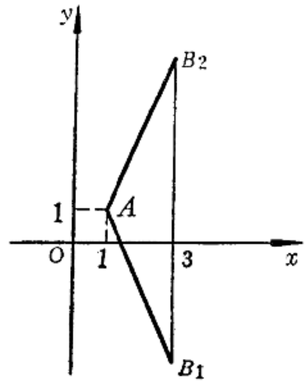
解　∵　$$\lambda=\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DM}}=-\frac{2}{1}=-2,$$

∴　$$x_c=\frac{-\frac{9}{2}+3\times(-2)}{1+(-2)}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2},\qquad x_d=\frac{2+3(-2)}{1+(-2)}=4$$

$$y_c=\frac{-7+\frac{3}{2}\times(-2)}{1+(-2)}=10,\qquad y_d=\frac{6+\frac{3}{2}\times(-2)}{1+(-2)}=-3$$



1.41 图



1.42 图

1.42　点 $A(1,1)$ 到点 B 的长为 5 单位，线段 $\overline{AB}$ 中点的横坐标为 3 单位，求 B 点的坐标。

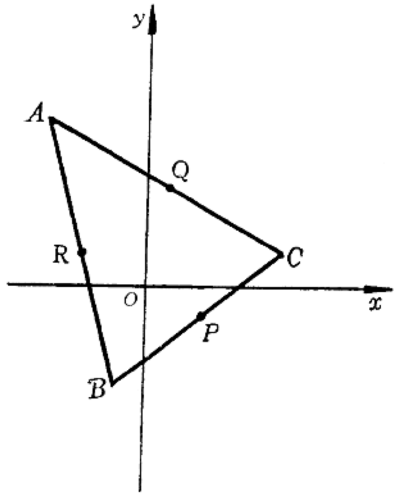
解　设 $B=B(x,y)$，由题意，则

$$\begin{cases}5^2=(x-1)^2+(y-1)^2\\3=\dfrac{x+1}{2}\end{cases}$$

则 $x=5$，$(y-1)^2=5^2-4^2=9$，$\therefore$ $y-1=\pm3$。$\therefore$ $y_1=-2$，$y_2=4$。

因此 B 点可有二个解：$(5,-2)$ 或 $(5,4)$

1.43　已知三角形各边的中点为 $P(3,-2)$，$Q(1,6)$ 和 $R(-4,2)$。求三角形的顶点。



1.43 图