

中国电子学会电路与系统学会

第七届年会论文集

China
Seventh Conference
on
Circuits and Systems
Proceedings

(二)



1987. 中国深圳

二次击穿型脉冲放大电路的应用

蒋 益 兴

江苏化工学院

二次击穿型脉冲放电器,对脉冲前沿具有高速放大的作用。实测脉冲前沿延时 $\leq 50\text{ns}$,脉冲幅度 ≥ 700 伏。给出了电路图,进行了分析。

一 问题的提出

近年来,雷达中采用所谓前沿切割技术,这种体制的雷达反干扰能力强,对其进行欺骗式干扰,首先条件为干扰机的整机延时要小于雷达的前沿切割时间。目前干扰机中功放管广泛采用行波管,而行波管的工作状态是通过栅控脉冲控制的,这就要求研制一个高速脉冲放大器,国外采用电子轰击半导体来解决延时问题,国内尚无这种器件。本人采用国产器件,利用二次击穿的特点研制成功满足要求的脉冲放大电路。

二 二次击穿的特点及利用

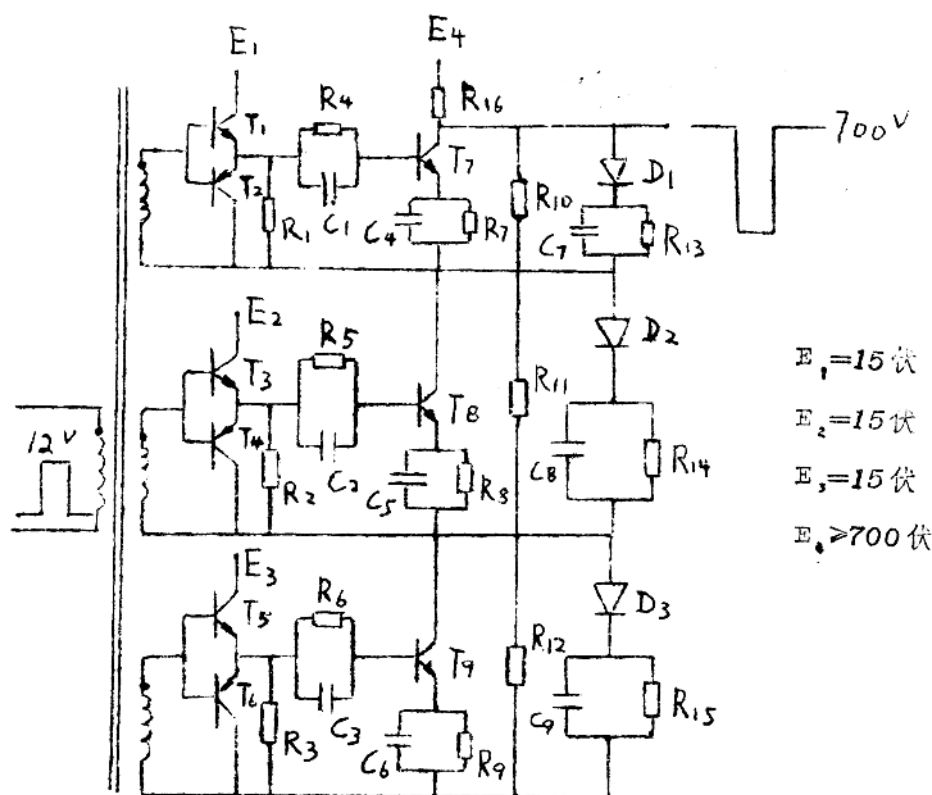
晶体管在工作过程中,若满足一定的条件将产生二次击穿,若不加限制集电极电流,会造成管子的损坏。通常在使用中,总是设法避免其发生。但是晶体管在二次击穿过程中有一个很大的特点,会出现负阻效应,反映为集电极电流的急剧上升、集电极电压的急剧下降。其速度为毫微妙量级。在设计脉冲放大电路时,只要创造适当的条件,使晶体管工作在截止和二次击穿饱和导通二个状态。那么二次击穿过程中的快速性特点就可以被利用,达到高速放大脉冲前沿的目的。当然在电路设计时应保证二次击穿的可逆性。

三 电路构成和工作原理

电路原理图如图1它有相同的三路串联而成,下面分析单元电路的组成和工作原理。

1. 隔离变换电路

由一个脉冲变压器构成,把处于低压端的脉冲信号耦合到电位为二万伏的高压端,把一路输入信号变换成三路对称输出。



图一

2 电流放大电路

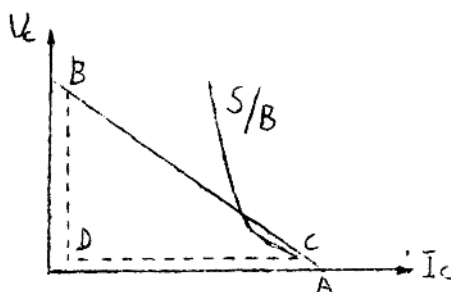
由 T_1 至 T_2 构成三路对称的复合式跟随器，把变换电路送来的信号进行电流放大，保证有足够的电流来驱动下级放大电路。

3. 二次击穿型放大电路

由 R_1 至 R_2 ， C_1 至 C_2 ， T_7 至 T_9 ， R_{13} 构成三路相串联的二次击穿型脉冲放大电路，要求管子的 f_t 高， BV_{CEO} 合适的管子，现以一路为例进行分析。把负载线和 S/B 曲线画在一起如图2。

没有激励信号时，管子截止，输出高电平，当有激励信号时，管子由截止转向

导通，工作点由A点沿负载线向B点移动，当移动到C点时与 S/B 曲线相交，达到了二次击穿临界值，这时工作点将不再沿负载线移动，而是由C点起经D点到达B点，管子二次击穿饱和导通，输出低电平，这个过程极快，与一般放大电路截然不同，从而达到脉冲前沿的高速放大。



图三

4. 静态动态分压电路

R_{11} 至 R_{12} 构成静态分压电路，解决三个管子因特性不一致带来的静态 U_{ce} 不均匀性， $R_{10}=R_{11}=R_{12}$ 。

D_1 至 D_2 、 C_1 至 C_2 、 R_{13} 至 R_{14} 构成动态分压电路，解决因管子开关参数不一致所带来的管子在开关瞬间出现的动态 U_{ce} 不一致，平时 $U_{c1}=U_{c2}=U_{c3}=1/3 E_c$ ，当某一瞬间出现 U_{ce} 大于 $1/3 E_c$ 时二极管导通，对C进行充电，达到动态复位的作用。

四 实测指标

1. 输入输出延时 $\leq 50ns$ ，脉冲前沿 $\leq 25ns$ 。
2. 输出脉冲幅度 ≥ 700 伏，输入为12伏。
3. 输出脉冲宽度0.2至 $50\mu s$ 内任意。
4. 可以放大双脉冲，其脉冲间隔可任意小。

以上电路是根据海军×××型干扰机的指标要求研制的，做过8小时55℃的温度试验，脉冲延时没有改变。实际电路保存在原工作单位七二三研究所。

主要参考资料

蒋益兴，二次击穿型脉冲放大电路的分析，武汉理论电工学会第四届年会宣读论文，一九八六年八月。

非线性网络的代数近似综合

王柏勇* 杨山**

* 云南工学院电气系

** 天津大学自动化系

〔提要〕 本文在非线性网络的有限Volterra级数表示的基础上,提出了非线性网络的一种代数近似综合方法。文中给出了非线性网络Volterra级数辅助代数表示的编制算法。根据该算法综合出由线性动态系统、加法器、乘法器组成的非线性系统。

1. 引言

网络综合是网络理论的一个重要分支。目前,已有有效的方法解决线性网络的综合问题⁽¹⁾。然而,对于非线性网络则尚未形成一种完善的综合方法。本文在非线性网络Volterra级数表示的基础上,提出了非线性网络的代数近似综合法。给出了由非线性网络拓扑求取网络Volterra级数辅助代数表示的编制算法,并综合出由线性动态系统、加法器和乘法器组成的非线性系统。

实际电路和系统的输出信号与输入信号关系可用算子 $Nu(t)$ 来表示。文献(2)(3)对时不变算子的讨论表明,如果时不变算子 $Nu(t)$ 具有衰减记忆性,那么可用有限Volterra级数算子来近似表征算子 $Nu(t)$ 。根据非线性网络的有限Volterra算子模型,由非线性网络的代数近似综合法可方便地得到非线性网络的近似综合系统。综合系统由线性动态系统、加法器和乘法器组成,因而便于进行集成化。便于采用模拟—数字混合系统对复杂非线性系统进行混合仿真。有利于非线性器件模型的有效性验证。

II. 非线性网络模型

非线性网络模型是实际非线性系统和器件的一种重要模型。对于图1所示的非线性网络NL,可用算子模型 $y(t) = Nu(t)$ 表征网络变量 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的关系。

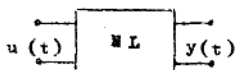


图 1

设 $C(R)$ 是 $R \rightarrow R$ 的连续有界函数空间,对 $u \in C(R)$,

$\|u\| \triangleq \sup_{t \in R} |u(t)|$,把由 $C(R)$ 到 $C(R)$ 的函数映射称作算子,记为 $Nu(t)$ 。如非线性网络NL是解析因果系统,则它的输入/输出关系可表示成Volterra级数算子

$$y(t) = Nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (1)$$

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t h_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) d\tau_i$$

$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 是网络NL的n阶Volterra核。对于解析因果网络NL,其 $h_n(\tau_1,$

— — —

..., $\tau_n) = 0$, 当 $\tau_i \leq 0, i \in \{1, \dots, n\}$. $y_n(t)$ 是非线性网络的 n 阶输出.

<定义1> 对应于Volterra级数算子 $W u(t)$ 算子 $\hat{W} u(t): C(R) \rightarrow C(R)$ 具有下列形式:

$$\hat{W} u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t h_n(t-\sigma_1, \dots, t-\sigma_n) \prod_{i=1}^n U(\sigma_i) d\sigma_i \quad (2)$$

其中 $h_n(\cdot) \in L^1(R_+^n)$ 即

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n < \infty$$

则算子 $\hat{W} u(t)$ 是有限Volterra级数算子.

如果级数(1)收敛, 则(1)式便是非线性网络 $W L$ 的Volterra级数模型. 而(2)式是非线性网络 $W L$ 的有限Volterra级数模型.

三、非线性网络Volterra级数辅助代数表示的编列算法

分别采用变量 X^{-1}, X_0 和 X_1 代表算子 $\int_0^t U(\tau) d\tau, \int_0^t d\tau$ 和 $\int_0^t U(\tau) d\tau$. 将变量 X^{-1}, X_0, X_1 称作形式变量. 用集合 $X = \{X^{-1}, X_0, X_1\}$ 中的元素构成的有限序列 $X_{j_1} \dots X_{j_0}$ 表示重积分 $\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau$

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau &= \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau \int_0^{\tau} d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau & j_0 = 0 \\ \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \dots \int_0^{\tau} U_1(\tau) d\tau & j_0 = -1, 1 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $U^{-1}(\tau) \in U(\tau)$. 设集合 X^* 由有限序列 $X_{j_1} \dots X_{j_0}$ 和元素 1 组成. 集合 $R\langle X \rangle$ 是关于变量 W 的实系数幂级数的集合. 即对 $S \in R\langle X \rangle$

$$S = \sum \{ (S, W) W \mid W \in X^* \}$$

其中 $(S, W) \in R$. 若在集合 $R\langle X \rangle$ 上定义普通加法运算 $+$ 和洗乘积运算 $\otimes$, 则代数系统 $(R\langle X \rangle, +, \otimes)$ 构成半群. 洗乘积 $\otimes$ 定义如下: 对于

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \{ (S_1, W_1) W_1 \mid W_1 \in X^* \} \\ S_2 &= \sum \{ (S_2, W_2) W_2 \mid W_2 \in X^* \} \\ S_1 \otimes S_2 &= \sum \{ (S_1, W_1) \cdot (S_2, W_2) W_1 \otimes W_2 \mid W_1, W_2 \in X^* \} \quad (4) \end{aligned}$$

设 $W_1 = X_{j_1} W, W_2 = X_{j_2} W', X_{j_1}, X_{j_2} \in X, W, W' \in X^*$

$$\begin{aligned} \text{则: } W_1 \otimes W_2 &= X_{j_1} (W \otimes (X_{j_2} W')) + X_{j_2} (X_{j_1} W) \otimes W' \\ W \otimes 1 &= 1 \otimes W = W \quad (5) \end{aligned}$$

由下面讨论可知, 对于非线性集中参数网络 $W L$, 它的Volterra级数表示(1)式, 可用代数系统 $(R\langle X \rangle, +, \otimes)$ 中的元素对应. 有

$$Y^*(X^{-1}, X_0, X_1) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^*(X^{-1}, X_0, X_1) \quad (6)$$

其中 $Y_n^0(x-1, x_0, x_1) \in R\langle X \rangle$, 是非线性网络 n 阶输出 $Y_n(t)$ 的辅助代数表示。(6)式称作非线性网络 Volterra 级数的辅助代数表示。

或非线性网络 N_L 由二端和二端口元件组成。网络 N_L 中非线性元件的成份关系在网络工作点附近可用近似表示为

$$I = a_1 d + a_2 d^2 + \dots + a_m d^m \quad (7)$$

其中 $I = \{i, 1\}$, $d = \{d, 1, 2, q\}$, $i, 1, 2$ 和 q 分别代表元件上的电压、电流、磁链和电荷量。 a_i 为常数, $i \leq 1 \leq m$

按照(7)式, 每个非线性元件可分解成线性元件 $Y_1 = a_1 d$ 和严格非线性元件 $I_N(\cdot) = I(\cdot) - I_1(\cdot)$

把网络 N_L 的严格非线性元件抽出, 得到 N_L 的等效网络 $\hat{N}_L$ (图 2(a)所示), 将 $\hat{N}_L$ 中严格非线性元件用非线性源 $I_N(\cdot)$ 来代替, 得到网络 N_L' (如图 2(b)所示)。如网络 $\hat{N}_L$ 有唯一解, 则网络 N_L' 一定同网络 $\hat{N}_L$ 等效, 设 $I_N^0(\cdot)$ 与 $d_n^0(\cdot)$ 的 Volterra 级数辅助代数表示为

$$I_N^0(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{N_n}^0(\cdot), \quad d_n^0(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^0(\cdot) \quad (8)$$

其中向量 $I_{N_n}^0(\cdot)$, $d_n^0(\cdot)$ 代表所有非线性源支路 n 阶响应与 n 阶激励的辅助代数表示。

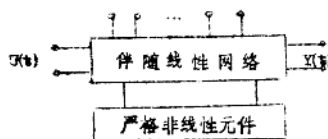


图 2(a)

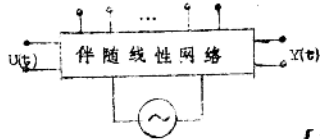


图 2(b)

<命题 1> 网络 N_L' 中没有一阶非线性源, 即 $I_{N_1}^0 = 0$ 。对 $n > 1$, 每个 n 阶非线性源 $I_{N_n}^0(\cdot)$ 由 $d_n^0(\cdot)$ ($n < n$) 按下面递归公式确定

$$I_{N_n}^0(\cdot) = \sum_{k=2}^n a_R d_n^0, \pi(\cdot) \\ d_{L, n}^0(\cdot) = \sum_{j=1}^{L-m+1} d_j^0(\cdot) \otimes d_{L-j}^0, m=1(\cdot) \quad d_{L, 1}^0(\cdot) = d_{L, 1}^0(\cdot) \quad (9)$$

<命题 2> 在网络 N_L' 中 $\{Y_1^0, d_1^0(\cdot)\}$ 只取决于网络输入 $U(\cdot)$, 它同网络 N_L' 的所有各阶非线性源无关。而对 $n > 1$, $\{Y_n^0(\cdot), d_n^0(\cdot)\}$ 只由 n 阶非线性源 $I_{N_n}^0(\cdot)$ 来确定, 即

$$\begin{bmatrix} Y_1^0(\cdot) \\ d_1^0(\cdot) \end{bmatrix} = L T \begin{bmatrix} U^0(\cdot) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y_n^0(\cdot) \\ d_n^0(\cdot) \end{bmatrix} = L T \begin{bmatrix} 0 \\ I_{N_n}^0(\cdot) \end{bmatrix}$$

其中 $L T$ 与 $\hat{L} T$ 均为线性算子。

由命题 1 和命题 2, 可得到求取非线性网络 Volterra 级数辅助代数表示的递归算法。

1) 将网络 N_L 中的非线性元解成线性元件和严格非线性元件。

2) 列写伴随线性网络的状态——输出方程

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B}_1 U(t) + \underline{B}_2 \cdot \underline{I}_N(t) \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}(t) \\ \underline{d}(t) \end{bmatrix} = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D}_1 U(t) + \underline{D}_2 \cdot \underline{I}_N(t)$$

$$3) \quad n=1, \quad \begin{bmatrix} \underline{Y}_1^0(s) \\ \underline{d}_1^0(s) \end{bmatrix} = \underline{C} (\underline{I} - \underline{A} \underline{X}_0)^{-1} \underline{B}_1 \underline{X}_1 + \underline{D}_1 \underline{X}_1 \quad (11)$$

4) 输出 $\underline{Y}_n^0(s)$ 。如果 n 等于所求值, STOP 否则 $n=n+1$

5) 由递归公式(9), 求得非线性源向量 $\underline{I}_{Y_n}^0(s)$

6) 求取 n 阶输出的辅助代数表示

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_n^0(s) \\ \underline{d}_n^0(s) \end{bmatrix} = (\underline{C} (\underline{I} - \underline{A} \underline{X}_0)^{-1} \underline{B}_2 \underline{X}_0 + \underline{D}_2) \underline{I}_{Y_n}^0(s) \quad (12)$$

转到 4)。

算法具体推导从略。借助于上算法, 非线性网络 n 阶输出的辅助代数表示为:

$$\underline{Y}_n^0(s) = \sum_R Q_R \cdot R_0^K(X_0) X_{11} R_1^K(X_0) X_{12} \cdots R_{n-1}^K(X_0) X_{1n} \quad (13)$$

$\sum_R$ 为有限和, $i=1, \dots, i=n \in \{-1, 1\}$

$$R_j(X_0) = (1 + C_{j1} X_0)^{-1} X_0 \cdots X_0 (1 + C_{j2} X_0)^{-1} \quad (14)$$

而 $Q_R, C_{j1}, \dots, C_{j2} \in \mathbb{C}$ 。C 为复数域, $1 \leq j \leq n-1$

<命题 3> 如果在非线性网络 n 阶输出的辅助代数表示(13)中, $-1 \in \{R_1, \dots, R_n\}$, 依如下算法可将 X_{-1} 变换成 X_1 。

$$\begin{aligned} 1) \quad & [\cdots R_j^K(X_0) X_{K(j+1)} R_{j+1}^K(X_0) X_{-1} R_{j+2}^K(X_0) X_{K(j+3)} \cdots] \\ &= [\cdots R_j^K(X_0) X_{K(j+1)} R_{j+1}^K(X_0) X_0^{-1} X_1 R_{j+2}^K(X_0) X_{K(j+3)} \cdots] \\ &= [\cdots R_j^K(X_0) X_{K(j+1)} R_{j+1}^K(X_0) X_1 X_0^{-1} R_{j+2}^K(X_0) X_{K(j+3)} \cdots] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 11) \quad & R_0^K(X_0) X_{K1} R_1^K(X_0) \cdots X_{K(n-1)} R_n^K(X_0) X_{-1} \\ &= R_0^K(X_0) X_{K1} R_1^K(X_0) \cdots X_{K(n-1)} R_n^K(X_0) X_0^{-1} X_1 \end{aligned} \quad (16)$$

证明略。命题 3 所提供的代数变换算法非常简便。只须依次将 X_{-1} 左右两边关于 X_0 的有理式分别乘以 X_0^{-1} 后再做减法即可。则非线性网络 n 阶输出的辅助代数表示应为:

$$\underline{Y}_n^0(s) = \sum_R Q_R^K(X_0) X_1 Q_1^K(X_0) X_1 \cdots Q_{n-1}^K(X_0) X_1 \quad (17)$$

$\sum_R$ 为关于 R 的有限和, $\forall_R \in \mathbb{C}$, $Q_1^K(X_0)$ 是关于形式变量 X_0 的有理式, $0 \leq i \leq n-1$ 。

N、非线性网络的近似综合

<命题4> 相应于非线性网络n阶输出的辅助代数表示00式。网络的n阶输出

$$Y_n(t) = \sum_{K=1}^n V_K \int_0^t \int_0^{z_n} \dots \int_0^{z_2} f_0^{2K}(t-z_n) \dots f_{n-1}^K(z_2-z_1) \prod_{i=1}^n U(z_i) dz_i \quad (33)$$

$$\text{其中, } f_0^K(x_0) = \frac{1}{K!} \int_0^\infty f_0^{2K}(t) \cdot \exp(-\frac{t}{x_0}) dt \quad (34)$$

<定义2> 设K是C(R)的子集。如果存在减函数W(t): R+ → (0, 1), $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$, 对每个U ∈ K和ε > 0, 存在-η > 0, 使所有V ∈ K, 当 $\sup_{t \leq 0} |U(t) - V(t)| W(-t) < \varepsilon$, 有

$$|N_U(t) - N_V(t)| < \varepsilon$$

则算子N在K上是衰减记忆的

对于用Volterra级数算子N_U(t)表示的非线性网络, 如果算子N_U(t)是衰减记忆的, 则非线性网络的输入U(t-T) (T充分大)对系统输出Y(t)的影响将充分小, 反之亦然。而用算子N_U(t)表示的网络N_L称为衰减记忆性网络。

<命题5> (2) 设ε > 0, 且K ⊂ {U ∈ C(R) | |U(t)| ≤ M_1, |U(s) - U(t)| ≤ M_2(s-t)}, 对t ≤ s成立 (M_1, M_2是常数), N是K上任何具有衰减记忆性的时不变算子, 那么存在有限Volterra级数算子N̂, 使对所有U ∈ K, 有

$$\|N_U - \hat{N}_U\| \leq \varepsilon$$

对于衰减记忆非线性网络N_L, 若U(t) ∈ K, 网络N_L的输入/输出关系可以用有限Volterra级数算子N̂_U(t)来近似表示, 并且这种近似在t ∈ R中均成立。因此有限Volterra级数N̂_U(t)可作为网络N_L的一种全局近似数学模型。

设网络n阶输出的有限和式00式中N̂_K共有M项, 则非线性网络N_L的n阶输出

$$Y_n(t) = \sum_{R=1}^M N_R \cdot e^R(t) \quad (35)$$

$$e^K(t) = \int_0^t \int_0^{z_n} \dots \int_0^{z_2} f_0^{2R}(t-z_n) \dots f_{n-1}^R(z_2-z_1) \prod_{i=1}^n U(z_i) dz_i$$

那么非线性网络的n阶输出由图3(a)所示的系统结构得到, 其中e^R(t)是系统T^R的输出。图3(a)所示

系统是图3(a)所示系统的等价系统。

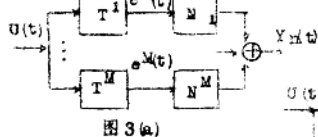


图3(a)

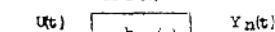


图3(b)

<命题6> 设非线性系统T^R的输入/输出关系如00式所示, 那么系统T^R可由图4所示的系统综合实现。

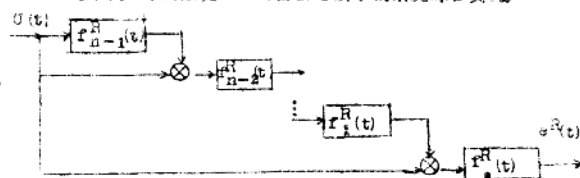


图4

由(9)式很容易推证出:

$$r_1^R(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{s} Q_1^R \left(\frac{1}{s} \right) \right)$$

而 $\frac{1}{s} Q_1 \left(\frac{1}{s} \right)$ 是变量 s 的有理分式函数, 它的 Laplace 反变换由部分分式法很容易求得。图 4 所示系统的各子系统 $r_1(t)$ 也可在 s 域表述成 $\frac{1}{s} Q_1^R \left(\frac{1}{s} \right)$ 。对这类线性动态系统的综合问题, 已有较为成熟的方法⁽¹⁾。

文献〔4〕已提出了非线性系统 Volterra 核的多音信号快速测量方法, 将测出的 Volterra 核同系统模型的 Volterra 核进行比较是进行非线性器件模型有效性验证的重要方法。非线性系统 n 阶输出的综合系统由线性动态系统、乘法器和加法器组成, 便于进行模拟仿真研究, 为非线性器件模型有效性的实时验证提供了便利条件。

如果非线性网络 N_L 具有衰减记忆性, 则可用有限 Volterra 级数算子 $\hat{N}_L u(t)$ 作为网络 N_L 的近似 I/O 模型。即 $Y(t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t)$ 。因此, 非线性网络可用图 5 所示的非线性系统 $\bar{N}_L$ 来近似综合。

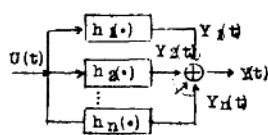


图 5

系统 $\bar{N}_L$ 仍然由线性动态系统、乘法器和加法器组成, 便于对系统进行混合仿真。便于采用 VLSI 技术, 制造出实现非线性网络 N_L 功能的集成电路。

V. 例 题

在图 6 所示的非线性网络中, $u(t)$ 是网络激励, 电容电压 V 是网络输出, 非线性电阻的成份关系:

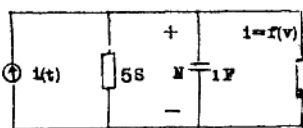


图 6

$$i = f(v) = 2 \cdot v^3$$

网络输出 $V(t)$ 的 Volterra 级数的辅助代数表

$$V^0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^0(s)$$

$$V_1^0(s) = (1 + 5X_0)^{-1} X_1$$

$$V_2^0(s) = -4(1 + 5X_0)^{-1} X_0(1 + 10X_0)^{-1} X_1(1 + 5X_0)^{-1} X_1$$

$$V_3^0(s) = 16(1 + 5X_0)^{-1} X_0(1 + 10X_0)^{-1} X_1(1 + 5X_0)^{-1} X_0(1 + 10X_0)^{-1} X_1(1 + 5X_0)^{-1} X_1$$

$$+ 48(1 + 5X_0)^{-1} X_0(1 + 10X_0)^{-1} X_0(1 + 15X_0)^{-1} X_1(1 + 10X_0)^{-1} X_1(1 + 5X_0)^{-1} X_1$$

取: $Y(t) = \hat{N}_L u(t) = \sum_{i=1}^3 Y_i(t)$, 则网络 N_L 的三阶有限 Volterra 级数模型如图 7 所示。系统 $\bar{N}_L$

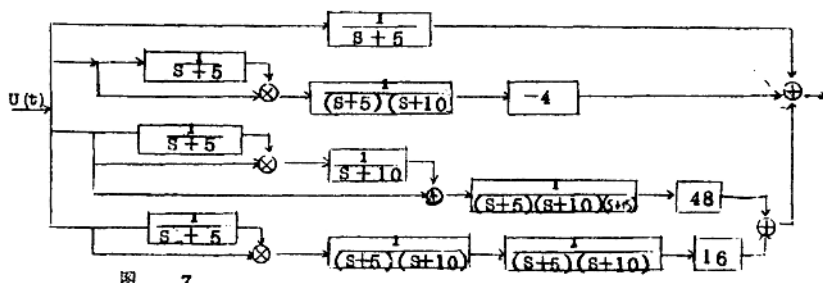


图 7

表 一

时间 t (秒)	$u(t)$ (伏)	$\hat{u}(t)$ (伏)	相对误差
0.02	0.12047	0.12120	0.0061
0.04	0.18387	0.18477	0.0011
0.50	0.18614	0.18656	0.0023
2.00	0.18614	0.18656	0.0023

线性动态系统，加法器和乘法器组成。当 $U(t) = 1(t)$ 时，分别对非线性网络 N_L 和系统 N_L 进行仿真。仿真结果如表一所示，可以看出，三阶近似综合系统 N_L 有效地表征了非线性网络 N_L 的输入——输出性质。

参 考 文 献：

- (1) M. S. Ghausi and K. R. Lakshminarayana, "Modern Filter Design", Prentice-Hall, Inc. 1981.
- (2) S. B. Bhat and L. O. Chua, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 32, No. 11, PP1150 1985.
- (3) W. J. Rugh "Nonlinear System Theory", Baltimore MA, The John Hopkins University Press, 1981.
- (4) S. B. Bhat, Y. S. Tang and L. O. Chua, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 30, No. 8 PP571 1983.

强非线性高阶自治系统的一种分析方法

丘水生 华南工学院

提要：作者在文献〔1—2〕中提出了等效小参量法的原理。本文中增加一个逼近非线性函数主要部分的幂级数，提高了近似解的精确度。另外，提出了二次近似解只含基波的简化计算程序和不采用频率展开式的简化算法，这两种算法相当简单，在工程上具有应用价值。本文提出的新方法适用于强非线性高阶系统。

1. 引言

目前比较流行的非线性分析方法是Lindstedt-Poincaré方法〔3〕，渐近法和Volterra级数法。这些方法的缺点是计算比较繁琐，仅适用于二阶系统，或者仅适用于弱非线性系统。此外，上述第一种方法在小参量 $\mu < 1$ 的情况下也产生较大的误差。本文介绍的等效小参量法，将谐波平衡法和一种新的扰动技术结合起来，具有多方面的优点。

2. 等效小参量法原理

我们考虑一个高阶非线性系统

$$a_n \omega^n x^{(n)} + a_{n-1} \omega^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \omega \dot{x} + a_0 x + k(\omega) f = 0 \quad (1)$$

式中， $\tau = \omega t$ ， $x^{(n)} = \frac{d^n x}{d\tau^n}$ ， $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$ ， $k(\omega)$ 是频率 ω 的函数。为了便于说明，设

$$k(\omega) = \omega \quad (3)$$

f 可以是一个强非线性函数

$$f = f(x, \dot{x}, \dots) \quad (4)$$

我们的目标是寻找式(1)的周期解。假定方程(1)的周期解的主要部分（下称主振波）只包含几个谐波：

$$x_0 = A_{10} \cos \tau + \sum_{m=2}^M (A_{m0} \cos m\tau + B_{m0} \sin m\tau) \quad (5)$$

在实用中，一般说来 x_0 中只包含一个高次谐波也就足够了，故令

$$x_0 = A_{10} \cos \tau + A_{m0} \cos m\tau + B_{m0} \sin m\tau \quad (6)$$

$$\text{式中， } m=2 \text{ 或 } 3 \quad (7)$$

将式(6)代入(4)可得

$$f_0 = f(x_0, \dot{x}_0, \dots) \quad (8)$$

且可表示为

$$f_0 = F_1 + (f_0 - F_1) \quad (9)$$

$$\text{式中 } F_1 = C_1 \cos \tau + D_1 \sin \tau + C_m \cos m\tau + D_m \sin m\tau \quad (10)$$

则式(1)可写成：

$$a_n \omega^n x^{(n)} + a_{n-1} \omega^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x + \omega F_1 = -\omega(f_0 - F_1) - \omega(f - f_0) \quad (11)$$

$$\text{式中， } f_0 - F_1 \text{ 是函数与其主部之差，所以是小量，故可记为 } f_0 - F_1 = \epsilon(f_0 - F_1) \quad (12)$$

式中， $\epsilon=1$ ，是小量项的标记。考虑到 $f - f_0$ 也是函数与其主部之差，也是小量。因此，式(11)右边是小量，可看作微扰外力。于是，可以利用下述一种新的扰动技术来求解式(11)。

$$\text{假定： } x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (13)$$

将上式代入式(11)，可得

$$f = f_0 + \epsilon f_1(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, \dots) + \epsilon^2 f_2(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, \dots) + \dots \quad (14)$$

设式(13)中的一个扰动项可表为：

$$x_1 = \sum_n x_{n1} = \sum_n (A_{n1} \cos n\tau + B_{n1} \sin n\tau) \quad (15)$$

式中也包括基波扰动分量。\$x_1\$ 中的 \$n\tau\$ 分量 \$x_{n1}\$ 产生的函数增量为

$$\Delta f_{n1} = \frac{df_0}{dx_0} x_{n1} = Q_{n1} g_{n1} \cos n\tau + Q_{n2} h_{n1} \sin n\tau + \dots \quad (16)$$

\$\Delta f_{n1}\$ 也可以从式 (14) 的 \$f_1\$ 中直接找到。其中, \$z_{n1}, z_{h1} = A_{n1}\$ 或 \$B_{n1}\$

$$\Delta f_{n1} = Q_{n1} z_{n1} \cos n\tau + Q_{n2} z_{h1} \sin n\tau \quad (17)$$

即 \$\Delta f_{n1}\$ 是由 \$x_{n1}\$ 产生的函数增量的主要部分。于是, \$f-f_0\$ 的主要部分可表示为

$$f = \varepsilon f_{m1} + \varepsilon^2 f_{m2} + \dots \quad (18)$$

$$\text{式中, } f_{m1} = \sum_n \Delta f_{n1} = \sum_n (Q_{n1} z_{n1} \cos n\tau + Q_{n2} z_{h1} \sin n\tau) \quad (19)$$

其中 \$Q_{n1}\$ 和 \$Q_{n2}\$ 是 \$x_0\$ 中各分量振幅的函数。于是式 (14) 可写成

$$f - f_0 = \varepsilon f_{m1} + \varepsilon (f_1 - f_{m1}) + \varepsilon^2 f_{m2} + \varepsilon^2 (f_2 - f_{m2}) + \dots \quad (20)$$

因为 \$f_1 - f_{m1}\$ 是函数与其主项之差, 故可看作是比 \$f_1\$ 高一阶的小量, 即可记为

$$\varepsilon (f_1 - f_{m1}) = \varepsilon^2 (f_1 - f_{m1})$$

余类推, 将上式代入式 (20), 可得

$$f - f_0 = \varepsilon f_{m1} + \varepsilon^2 (f_1 - f_{m1}) + \varepsilon^2 f_{m2} + \varepsilon^3 (f_2 - f_{m2}) + \varepsilon^3 f_{m3} + \dots \quad (18)$$

$$\text{上式可写成 } f - f_0 = \varepsilon [f_{m1} + \varepsilon (f_1 - f_{m1}) + \dots] \quad (19)$$

$$\text{设 } \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (20)$$

将式 (12), (19) 和 (20) 代入 (11), 可得到一组方程

$$a_n \omega_0^n x_0^{(n)} + a_{n-1} \omega_0^{n-1} x_0^{(n-1)} + \dots + a_0 x_0 + \omega_0 F_1 = 0 \quad (21)$$

$$a_n \omega_0^n x_1^{(n)} + a_{n-1} \omega_0^{n-1} x_1^{(n-1)} + \dots + a_0 x_1 + \omega_1 F_1 + \omega_0 F_{m1} = P_1(\omega_1, x_0) - \omega_0 (f_0 - F_1) \quad (22-A)$$

$$a_n \omega_0^n x_2^{(n)} + a_{n-1} \omega_0^{n-1} x_2^{(n-1)} + \dots + a_0 x_2 + \omega_2 F_1 + \omega_0 F_{m2} = P_1(\omega_2, x_1) - \omega_0 (f_1 - F_{m1}) \quad (22-B)$$

式中, \$P_1\$ 和 \$P_2\$ 分别包含将式 (29) 代入式 (27) 左边线性部分所得的一阶小量项和二阶小量项。式 (21) 称为主振荡方程。式 (22) 是线性的, 称为扰动方程。将式 (6) 和 (20) 代入 (21), 可确定主振荡 \$x_0\$。将求得的 \$x_0\$ 代入 (22-A), 可求得一阶修正量。类似地, 利用逐次近似程序, 可确定其他高阶修正量。注意到, 我们直接利用谐波平衡法来求解扰动方程, 而不利用初始条件和消除永年项的概念, 这是本文的特点之一。由主振荡方程得到非线性代数方程之后, 一般可以利用迭代过程, 并且其中的高次谐波方程往往可以线性化, 于是可将非线性方程的变量数目减少至两个。可以证明, 对于实际系统, 一般 \$\omega_1 = 0\$, 在推导高阶扰动方程右边的表达式时, 可利用这一关系式。本文中规定, 非线性自治系统稳态解的最后形式是

$$x = A_1 \cos \tau + A_2 \cos 2\tau + B_2 \sin 2\tau + \dots$$

$$A_n = A_{n0} + A_{n1} + A_{n2} + \dots \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$B_n = B_{n0} + B_{n1} + B_{n2} + \dots \quad (n=2, 3, \dots) \quad (23)$$

其中, \$A_{n0}\$ 是由主振荡方程求出的 \$n\$ 次谐波振幅分量, \$A_{n1}\$ 和 \$B_{n1}\$ 是第 1 个扰动方程求得的 \$n\$ 次谐波振幅修正量。其中, 基波只含余弦分量。

3. 简化算法

若 \$x_0\$ 只包含基波, 则上述过程大为简化。此时, 式 (5) 变为:

$$x_0 = A_1 \cos \tau \quad (24)$$

$$\text{式 (20) 变为 } F_1 = c_1 \cos \tau + D_1 \sin \tau \quad (25)$$

由于本文采用了式 (18) 和 (23), 因而求解过程中不需要利用初始条件和消除永年项的概念。同时, 式 (22) 右端在求解过程中均变为已知函数。因此, 这一算法比通常的扰动法更为简单。另外, 由于采用了式 (18), 近似解的精确度显著提高了。

4. 不采用频率展开式的算法

在 Lindstedt-Poincaré 法中, 频率展开式 (20) 是必不可少的。当方程 (1) 的线性部分包含的项数增加且导致的最高阶数相当高时, 采用展开式 (20) 将使计算变得相当复杂。由于本文方法采用了展开

式(18), 式(20)是可以取消的, 则计算过程可大为简化。

此时, 式(20)变为

$$\omega \approx \omega_0 \quad (26)$$

求解过程和上述式(8)~(23)的过程基本相同, 但在求解式(22)时, 不再计算基波修正, 而将式(22)各方程右边非线性函数及开式中的正弦分量代入原方程(1), 对右端再作一次谐波平衡计算。

$$\text{令 } A_1 = A_{10} + \Delta A_1, \quad \omega = \omega_0 + \Delta \omega \quad (27)$$

利用式(21)和(27), 可得到以 ΔA_1 和 $\Delta \omega$ 的线性方程组, 即可求出 ΔA_1 和 $\Delta \omega$ 。

5. 典型例子

例一: 求下列三阶方程的周期解

$$\omega^2 \ddot{x} + 0.25\omega^2 \dot{x} + \omega^2 x - x^3 = 0 \quad (28)$$

式中 ω 是振荡频率。

$$\text{令 } \dot{x} = -x^2 \quad (29)$$

利用式(12), (18)和(20), 由式(28)可得

$$\omega_0^2 \ddot{x}_0 + 0.25\omega_0^2 \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 - F_1 = 0 \quad (30)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_1 + 0.25\omega_0^2 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + f_{m1} = -(f_0 - F_1) \quad (31)$$

$$\omega_0^2 \ddot{x}_2 + 0.25\omega_0^2 \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + f_{m2} = -3\omega_0^2 \omega_2 \dot{x}_0 - 0.5\omega_0 \omega_2 \ddot{x}_0 - \omega_2 \dot{x}_0 - (f_1 - f_{m1}) \quad (32)$$

$$\text{式中, } F_1 = -\frac{1}{4} A_{10}^2 \cos 3\tau, \quad f_0 - F_1 = -\frac{3}{4} A_{10}^2 \cos 3\tau \quad (33)$$

将上式代入(30)解得

$$A_{10} = 1, \quad \omega_0 = 1 \quad (34)$$

由式(31)和(34)可得

$$f_{11} = -\frac{9}{4} A_{11} \cos \tau \quad (35)$$

$$f_{m1} = -\frac{1}{4} 5 A_{11} \cos \tau - 1.5 A_{11} \sin \tau \quad (36)$$

利用上式, 由式(31)可解出 A_{11} , ω_1 , A_{21} 和 B_{21} , 由式(32)可解出 A_{12} , ω_2 , A_{22} 和 B_{22} , 其中

$A_{11} = 0$, $\omega_1 = 0$, 最后的解为

$$x = 1.00188 \cos \tau - 0.00118 \cos 3\tau - 0.0103 \sin 3\tau - 0.0000638 \cos 5\tau + 0.0010109 \sin 5\tau$$

$$\omega = 0.99614$$

例二: 求解 Van der Pol 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (37)$$

$$\text{令 } \tau = \omega t$$

则式(37)变为

$$\omega^2 \ddot{x} - \mu \omega x^2 + x + \mu \omega x^2 \dot{x} = 0 \quad (38)$$

$$\text{设 } x_0 = A_{10} \cos \tau \quad (39)$$

可求得 $A_{10} = 2$, $\omega_0 = 1$

$$A_{21} = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad A_{21} = -\frac{5\mu^2}{64+9\mu^2}$$

$$B_{21} = -\frac{16\mu}{64+9\mu^2}, \quad A_{12} = \frac{3\mu^2}{64+9\mu^2}, \quad \omega_2 = -\frac{\mu^2}{64+9\mu^2} \quad (40)$$

... ..

设 $\mu = 1$, 最后的解为

$$x = 2.0417 \cos \tau - 0.0822 \cos 3\tau - 0.219 \sin 3\tau - 0.0404 \cos 5\tau + 0.0256 \sin 5\tau \quad (41)$$

$$\omega = 0.9452 \quad (42)$$

由计算机求得的结果为

$$x = 2.0147 \cos \tau - 0.085155 \cos 3\tau - 0.22252 \sin 5\tau - 0.038455 \cos 5\tau \\ + 0.031238 \sin 5\tau \quad (43)$$

$$\omega = 0.9435004 \quad (44)$$

比较式(41)和(43)可知,利用简化算法所得的近似解相当准确。

顺便指出,利用通常的扰动法所得的近似解[4]当 $\mu=1$ 时误差相当大,即使 $\mu \ll 1$ 时其三次谐波振幅的符号也是错误的。

6. 结论

本文提出的分析方法有如下特点:

1. 本文方法利用等效小参数的原理将谐波平衡法和一种新的扰动技术结合起来,兼有两者的优点,克服了通常的扰动法的缺点。

2. 等效小参数客观存在,但不必出现在幂级数展开式中。展开式中采用作为小参数标记的“形式参数” $\epsilon=1$ 。

3. 采用了逼近非线性函数主部的近似法。

4. 求解过程中不需要利用初始条件和消除永年项的概念,而直接进行谐波平衡运算。

5. 频率展开式可以取消。因此,本文方法适用于强非线性高阶系统,近似解的精确度显著提高,优于通常的扰动法。而且,计算比较简单,具有一定的普遍意义,在工程上是有实用价值的。本文方法也适于非自治系统。

参 考 文 献

- [1] Shui-Sheng Qiu (丘水生), et al., An equivalent small parameter method for strongly nonlinear systems, Proc. 28th Midwest Symp. on Circuits and Systems, Louisville, 1985, pp. 61-64.
- [2] Shui-Sheng Qiu (丘水生), I. M. Filanovsky, Periodic solutions of Van der Pol equation with moderate values of damping coefficient, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-34, No. 2, 1987(in press).
- [3] A. H. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques, J. Wiley, 1981.
- [4] C. Hayashi, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw, 1964.

非线性电路的单形样值分析*

北京邮电学院
胡 健 姚 华
提 要

本文导出非线性电路的单形插值方程。它的优点是：电路的线性与非线性子网络分块表示，便于线性与非线性子网络分别处理；非线性子网络用单形插值表示，有利于采用非线性特性的离散数据。

1. 前言

在近20年来，用分段线性法求解非线性电路的工作有很大的进展。其中，很多工作是关于非线性网络的分段线性表示方法。现在有三种分段线性模型的表示方法：(1) 单形插值表示[1]；(2) 规范分段线性表示[2]；(3) 状态模型[3]。这些表示方法都得到从不同角度讨论。单形插值表示的优点有：

1) 非线性特性很容易用离散数据表示，而单形插值表示法很适于这种数据形式。

2) 在相邻两个邻域的单形插值表示只差一个顶点，而且这两个不同顶点有一定的线性关系。

但是，在采用一般的结点分析时，直接采用非线性特性的离散数据就有困难。尤其在含非线性多端子网络时，这个问题更是突出。

本文的目的是导出含非线性多端子网络的电路的数学模型，适用于单形插值表示。

2 非线性子网络的单形插值表示

多端子网络见图1。在非线性的情况下，它可以用矢量函数表示($f: R^n \rightarrow R^n$)。函数 $f(x)$ 用分段线性函数逼近时，它可以记作

$$f(x) = B(j+1) + C(j+1) \quad j=0, 1, \dots, m \quad (1)$$

式中 m 是线性段数， j 是线性段序号。在实际应用中，(1)式很难使用。特别在已知分段线性的角点数据时，应用单形插值来表示分段线性函数比较方便[1]。于是，我们采用下式代替(1)式：

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \lambda$$

$$\text{和} \quad X\lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \lambda \quad (2)$$

式中 $\lambda \in R^n$ 是实矢量和 x_j ($j=0, 1, \dots, n$) 是单形顶点值。(2)式可记作

$$f(x) = [f(x_0) \ f(x_1) \ \dots \ f(x_n)] X^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

在(3)式中， $f(x_j)$ ($j=0, 1, \dots, n$) 和 X 都是已知量，所以(3)式记作

$$f(x) = H \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中

$$H = [f(x_0) \ f(x_1) \ \dots \ f(x_n)] X^{-1} \quad (5)$$

是已知 $n \times (n+1)$ 维矩阵。(4)式是非线性子网络的单形插值模型。

(4)式用标量表示时可写作

$$\begin{aligned} f_1(x) &= H_{11}x_1 + H_{12}x_2 + \dots + H_{1n}x_n + H_{1(n+1)} \\ &\vdots \\ f_j(x) &= H_{j1}x_1 + H_{j2}x_2 + \dots + H_{jn}x_n + H_{j(n+1)} \\ &\vdots \\ f_n(x) &= H_{n1}x_1 + H_{n2}x_2 + \dots + H_{nn}x_n + H_{n(n+1)} \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 $f_j(x)$ 可以是 j 端子的电流(或电压)， x_j 也可以是 j 端子电压(或电流)。因此， H_{ij} 表示等效阻抗或导纳，由(5)式定义，决定于函数和变量的角点值。

例如，在两端子网络的情况下，(6)式可有

$$\begin{aligned} v_1 &= Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 & \text{或} & & v_1 &= Z_{11}i_1 + Y_{12}v_2 \\ v_2 &= Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 & & & i_2 &= Z_{21}i_1 + Y_{22}v_2 \end{aligned}$$

等形式，视 $f(x)$ 和 x 表示电流或电压而定。式中 Z_{ij} 或 Y_{ij} 是等效量。

国家自然科学基金委员会资助

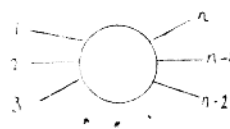


图1 多端子网络

采用(4)式或(6)式的形式时,我们希望得到一个电路方程,它便于嵌入电路中所含的非线性子网络的单形插值模型。由此,我们需要导出一个特殊的电路方程形式,我们称之为分层电路方程。为得到这种方程形式,我们先定义电路的电压图和电流图概念。这个概念在文献[4]中曾有讨论,但下面讨论的与它是不同的。

3 电路的电压图和电流图

电路的电压关系和电流关系可以用电压图和电流图表示。

电压图 $G_V = (X, E')$ 表示电路的结点间的电压,其中, X 是顶点集,表示电路的结点; E' 是弧集,表示电路全部顶点间的电压。 G_V 称为完全电压图。

由于 n 端子网络只有 $(n-1)$ 个电压是独立的,完全电压图中对应不独立的电压的弧可以删去。这样得到的称电压图 $G_V = (X, E)$ 。

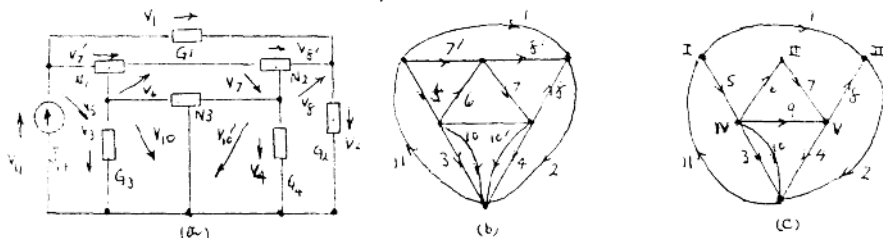


图2 (a) 电路及其电压; (b) 完全电压图; (c) 电压图

在图2中,给出了电路(a)及其电压图(b)和(c)。电压图(c)表示了电路的必要电压关系,即删去图2(b)中多端子网络的不独立电压。

电路的完全电流图 $G_I = (X_n, X_c, E')$ 表示电路的支路电流。其中,顶点集 X_n 表示端子集, X_c 表示子网络集,弧集 E' 表示电路的支路电流集。由于二端子网络的两端电流相等,代表它们的顶点可以删去。结果,完全电压图变为电流图 $G_I = (X, E)$,其中顶点集 X 表示电路的结点和二端以上的多端子网络。

电路的电流图的例见图3(b)和(c)。在图3(b)中给出了完全电流图。把完全电流图中代表二端子网络的顶点删去,则得到电流图3(c)。

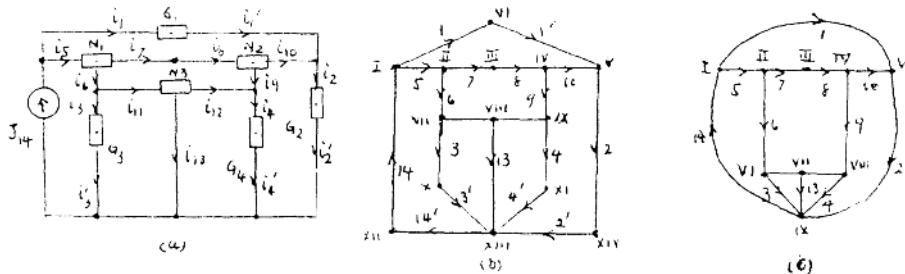


图3 (a) 电路及其电流; (b) 完全电流图; (c) 电流图

从上面的讨论可知:

- 1) 电压图和电流图分别表示电路的电压关系和电流关系;
- 2) 它们的顶点数不一定相等,弧数也不一定相等;
- 3) 根据多端子网络的电压的取法可以得不同的电压图,因此电压图不是唯一的。可以建立适合非线性子网络变量关系的电压图。

电压图和电流图分别有它们自己的关联矩阵 A_V 和 A_I 。它们的尺寸分别决定于电压图的顶点数 r_V 和弧数 c_V , 电流图的顶点数 r_I 和弧数 c_I 。

例如,图2(c)和3(c)的图形的关联矩阵分别为

$$A_V = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 1 & & & & 1 & & & & -1 & & -1 \\ 2 & -1 & 1 & & & & -1 & 1 & & & 1 & \\ 3 & & & 1 & & & & & & & & \\ 4 & & & & 1 & & & & & & & \\ 5 & & & & & 1 & & & & & & \\ 6 & & & & & & -1 & 1 & & & & \\ 7 & & & & & & & & -1 & 1 & & \\ 8 & & & & & & & & & & & \\ 9 & & & & & & & & & & & \\ 10 & & & & & & & & & & & \\ 11 & & & & & & & & & & & \end{array} \quad (7)$$