流体物理学

丹生慶四郎
著

流体物理学

丹生慶四郎
著

共立全書
219
ΣΤΑΜΠ

―著 者 紹 介―

丹生　慶四郎（にう　けいしろう）

最終学歴　昭和28年　京都大学理学部物理学科卒業
専　　攻　流体力学，プラズマ物理学
現　　在　東京工業大学大学院総合理工学研究科エネルギー科学専攻教授，理学博士

ΣTAMΠ

流 体 物 理 学

〔共立全書 219〕

定 価 1700 円

NDC 423.8, 534.1

昭和53年4月20日　初版1刷発行

著　者　丹 生 慶 四 郎

発行者　南 條 正 男
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　藤 本 元
東京都文京区水道2丁目1番8号

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
電 話 東 京 947 局 2511番（代表）
郵便番号 112 振替 東京 1-57035 番
共立出版株式会社

印刷・藤本綜合印刷　製本・金崎製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

3342-202190-1371

まえがき

宇宙に存在する物質の運動を解析するにあたって，われわれはその物質を固体・液体・気体の三つの状態に分類して考察することが多い．気体は温度を高めると，やがて正の電荷をもつイオンと，負の電荷をもつ電子とに分離する．地球以外の多くの星や星間物質は，このように正負の電荷に分離した気体状の物質で構成されている．こうした状態をプラズマ（plasma）とよんで，第四の状態に加えることが最近しばしば行なわれる．これら四つの状態のうち，固体を除いた液体・気体・プラズマは容易に形を変えることで共通である．すなわち流動運動を行なうので，この三状態にある物質を流体（fluid）と総称し，その運動を解析する学問が流体物理学（physics of fluids）である．

これまで流体の運動を解析する学問に，多くの場合流体力学（hydrodynamics）という名が冠せられていた．流体，すなわち液体・気体・プラズマは分子（またはより小さな粒子）から構成されていることはもちろんであるが，通常の流体においては分子数はいたって多い．気体に例をとると，0°C，1気圧の標準状態の下で，1 cm^3 中に含まれている分子の数はロシュミット数（Loschmidt's number）とよばれて，2.69×10^{19} 個である．したがって，われわれの常識では無限小とみなせるほどの小さな体積である，りょう（稜）の長さ1ミクロン（μ）の立方体の中にも，なお 2.69×10^{7} 個という多数の分子が存在することになる．その結果，流体が分子の集合体であることに眼をつぶって，連続体として，その平均的な量のみに着目することが可能になる．流体を連続体としてその運動を解析する学問を，通常流体力学とよんでいる．

しかし，真空装置の中の流体の流れとか，星間物質中をロケットが飛ぶような問題では，1 cm^3 当たりの流体分子の個数は数個またはそれ以下といった非常に希薄な状態になることがあり，そのような状態では上で述べた事柄は成り立たなくなる．このような流体では，粒子相互間の

衝突は少なく，流体は平衡状態からはずれて，真空装置壁やロケットの表面と流体粒子の衝突のしかたが流れの様子をきめるようになる．このような場合流体は，粒子系として，粒子性を残して運動を解析しなければ，現象を正当に把握できなくなる．粒子の集団として流体運動を解析する学問を，これまで気体分子運動論 (kinetic theory of gases) とよんでいた．

流体物理学という名は，比較的最近になって使用されるようになったものだが，それは流体運動を解析する学問全般に付けられた名前である．流体を連続体として捉えようと，粒子系として捉えようと，また基礎方程式として何を選ぼうとも，ともかく流体運動を望ましい正確さで解析する学問が流体物理学であり，本書もその目的に沿って記述を試みた．記述した内容は，著者が大阪大学基礎工学部と東京工業大学工学部の3年生および4年生に対して行なった講義の原稿を中心にしたもので，読者には大学の教養課程で修得する程度の数学・力学・電磁気学の知識があるものと想定して稿を進めた．記述に際しては，なるたけ論理を一貫させて，順次に飛躍なく理解できるように努力したので，大多数の数式を読者は難なくたどることができると思われる．ただそのために本文中に数式がやや多くなったので，読者は数式に迷わされて，物理的意味を見落とすことのないように注意してもらいたい．

1章は，流体の運動を解析するための基礎方程式の導出を中心に記述が展開されている．1.1節では，連続体の立場に立って，流体運動の解析の基礎方程式，いわゆるナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equation) を導いた．1.2節は，流体運動の特殊な場合としての静止流体に対して，基礎方程式から導かれる簡単な結果を示し，1.3節と1.4節では，ベルヌーイの定理とうず（渦）定理というもっとも基本的な定理を導いて，今後の理論の展開の基礎を築いておいた．2章は古典流体力学の中心的課題である非圧縮完全流体の運動にあてられ，主としてポテンシャル理論と複素関数論が展開されている．読者は，数学と物理学とのもっとも密着した関係を与えるものとしての流体力学を見出すに違いない．最近の研究においても重要なポイントとなっている，分散性などの基礎概念を与えるために，波動に関してもやや詳しく記述した．3章の高速流では，逐次近似法としての M 二乗展開法，摂動法としての

薄翼理論，数値計算のための特性線法など，非線形の方程式の代表的解法が掲げられている．境界層理論と粘性の効くおそい流れの解析を示した4章を合わせて，1.1節から4.2節までが，通常の流体力学の主テーマになっている部分である．5章は，実在の流体運動のあり方としてはむしろ自然で，われわれが多くの場合現実の流れとして出会わす乱流について記述した．もう一つの典型的な連続体としての場を解析する学問である電磁気学が流体力学と結びついて生まれた電磁流体力学について，その概観の記述のために6章があてられている．6章までが流体の連続体としての記述である．

近年材料の純度を高めるため，不純物を除去した高真空中で反応や加工を行なうことなどとからんで真空技術が進み，科学技術で真空技術の果たす役割が大きくなった．一方これらの装置の内部流に対する希薄流体とは別に，高空や星間を人類が飛行するようになって，物体まわりの高速の希薄気体の流れに興味が向けられるようになった．7章はこれら希薄気体を解析し，また連続体としての流体運動の解析に必要な輸送係数を導出するための気体分子運動論についての記述が進められている．この章では，気体分子運動論の微視的立場に立つ基礎方程式，ボルツマン方程式 (Boltzmann equation) から，その速度モーメントの方程式として巨視的立場に立つ連続体の方程式をも導出して，その関係を把握させ，連続体として流体を取り扱う際の限界を明らかにしている．最後に8章は，6章とともに，近年急速に脚光を浴びて，研究者の関心を集めているプラズマに関して，取扱い方法を記述した．プラズマは高温になると粒子相互間の衝突が著しく減少して，連続体としての取扱いが困難となるので，8章は主として微視的立場に立って解析を進めたが，無限に広がりつつあるこの分野のごく基礎的事項を要約するに止めた．

最近発展しつつある流体物理学において，空力加熱の問題をはじめ，熱と流体運動との関係はからみあってとうてい切り離すことはできないが，ページ数の関係で熱流を含む現象の解析は割愛せざるを得なかった．この方面に興味ある読者は，さらに専門書に向かって勉学を進めてほしい．また流体物理学という書名から，本書に対して天体物理学や生物物理学，さらには気象・海洋などにおける流体現象の記述を期待された読者もあろうが，そのような応用方面の記述もいっさい省かれてい

る．内容の不充分なところや間違いの個所も多いと思われるので，忌憚ないご叱責，ご注意，ご批判を仰ぎたい．

まえがきを閉じるにあたって，本書の出版にご尽力下さった共立出版株式会社の各位に心から感謝申し上げる．

昭和53年3月

丹生慶四郎

目　次

第1章　流体運動の解析における基礎

第2章　非圧縮完全流体の運動

第7章 気体分子運動論

第8章 プラズマ物理学

第1章　流体運動の解析における基礎

1.1　ナビエ・ストークス方程式

身近な流体，空気や水の運動を考えてみよう．一体何がわかれば，それらの運動状態がわかったといえるであろうか．今日は風が強い，潮の流れが速いと思う．それは流体の速度 $\boldsymbol{v}$ の大小を感じているのであろう．強い風に当たると吹き飛ばされそうになる．それは気体の圧力 P が体に力を及ぼしているわけである．冬の水は手を切るように冷たい．流体の温度 T も知りたい変量である．考えてみれば，流体の運動学的な変量の速度 $\boldsymbol{v}$，熱力学的な変量の圧力 P，温度 T，密度 ρ などが時刻 t と場所 $\boldsymbol{r}$ の関数として求められれば，まずわれわれの目的を達したことになる．流体の色とか香りとか，それも時には重要であろうが，まだ芸術のテーマとして，ここでの流体物理学の研究の対象外としておこう．$\boldsymbol{v}, p, T, \rho$ などを t と $\boldsymbol{r}$ との関数として規定するための基礎方程式が，ナビエ・ストークス方程式 (Navier–Stokes equation) である．以下にその導出を示そう．

A．連続方程式

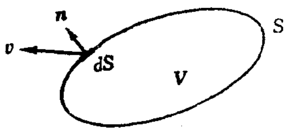

図 1.1

流体 (fluid) の満たしている空間を考え，その空間内に形の固定した一定の体積 (volume) V を選び，その体積を取り囲む閉曲面 (surface) を S としよう．流体は表面 S を横切って体積 V の内外で運動しているが，表面 S の微小部分 dS に着目し，dS の外向き法線 (normal vector) を $\boldsymbol{n}$ で表わそう．面積要素 dS を横切る流体の速度 (velocity) を $\boldsymbol{v}$，その速度 $\boldsymbol{v}$ の法線 $\boldsymbol{n}$ 方向の成分 (component) を v_n と書くと，面積要素 dS を通って単位時間に体積 V の内側から外側へ流れ出る流体の質量

は $\rho v_n dS$ である．ここに ρ は流体の密度 (density) で，単位体積当たりの流体の質量を表わす．$\rho v_n dS$ を S の全表面にわたって積分したものは，S の内すなわち体積 V 中に含まれている流体の質量の 単位時間当たりに減少する量に等しいはずである．以上のことを数式で表現すると

$$\iint_S \rho v_n dS = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$$

となる．体積 V は固定しているので，偏微分 $\partial/\partial t$ は積分記号の内側に移すことができ，結局

$$\iint_S \rho v_n dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{1.1}$$

を得る．ガウス (Gauss) の定理を用いると，左辺の表面積分は 体積積分に書きかえられて

$$\iint_S \rho v_n dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho v_i) dV \tag{1.2}$$

なる関係が導ける．r_i, v_i はベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ の i 成分で，場合によっては直接成分を $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，$\boldsymbol{v}=(u, v, w)$ のように書くこともある．式 (1.2) の右辺の前には $\sum_{i=1}^{3}$ をつけ加えるべきではあるが，これ以後一つの項の中に同じ添字が二度現われていれば，いつでもその添字に関して 1から3まで和をとるものと規約しておこう．つまり

$$\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho v_i) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}(\rho v_i) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

である．式 (1.1) と (1.2) を組み合わせると

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho v_i)\right\} dV = 0 \tag{1.3}$$

を得る．式 (1.3) の積分すべき体積は 任意に 選べるので，任意の体積 V に対して式 (1.3) がつねに成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i}(\rho v_i) = 0 \tag{1.4}$$

が成り立たなければ ならない．x, y, z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ で表わして

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$$

なる記号がよく用いられる．この ∇ を用いると，式 (1.4) は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

と書くことができ，div という記号を用いて

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$$

と表わすこともある．式 (1.4) で，左辺第一項は密度の時間変化，第2項は質量の流出する割合を示し，両項で流体の質量の保存を表わしており，連続方程式 (equation of continuity) とよばれている．

B．運動方程式

流体中の任意の1点Qを通って一つの平面を考え，その平面の法線を $\boldsymbol{n}$ とする．面を通して外側の流体部分が内側の研究部分に及ぼす単位面積当たりの力，すなわち応力 (stress) を $\boldsymbol{p}_n$ とすれば，$\boldsymbol{p}_n$ の大きさは一般に $\boldsymbol{n}$ の方向により異なる．いま流体の中に任意の閉曲面 S をとり，S の内部の流体についての運動量保存の法則を考えよう．そのためには S 内の流体の運動量 (momentum) の単位時間当たりの変化を考えなければならない．単位時間当たりの変動を d/dt で書くと，ニュートン (Neuton) の運動法則は

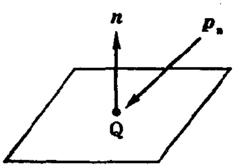

図 1.2

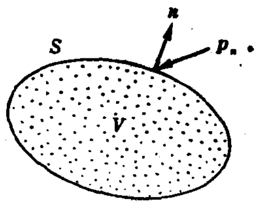

図 1.3

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\boldsymbol{v}dV=\iiint_V \rho\boldsymbol{F}dV+\iint_S \boldsymbol{p}_n dS \qquad (1.5)$$

と表わされる．$\boldsymbol{F}$ は流体の単位質量に働く外力 (force) である．式 (1.5) の右辺第1項は，体積 V 内の流体に働く外力を表わし，第2項は，表面 S を通じて外部の流体が体積 V 内の流体に及ぼす力を表わしている。式 (1.5) で，左辺の運動量の変化を考えるとき，流体は流れる

ので，同じ流体部分の占める体積 V は変化し，その V の変化も考慮しなければならない．すなわち

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV = \iiint_V \frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \boldsymbol{v} v_n dS \qquad (1.6)$$

となる．右辺第1項は体積変化がない場合の運動量変化，第2項は閉曲面 S の表面が法線方向に速度成分 v_n で移動することによって生じた運動量変化を表わす．右辺第2項にガウスの定理を応用して体積積分で表示し，連続方程式 (1.4) を利用すると，式 (1.6) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV &= \iiint_V \frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} dV + \iiint_V \frac{\partial \rho \boldsymbol{v} v_i}{\partial r_i} dV \\ &= \iiint_V \left\{ \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho v_i}{\partial r_i} + \rho v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r_i} \right\} dV \\ &= \iiint_V \left\{ \boldsymbol{v}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial r_i}\right) + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\right)\boldsymbol{v} \right\} dV \\ &= \iiint_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} dV \qquad (1.7)\end{aligned}$$

となる．ただし式 (1.4) を用いた．また式 (1.7) で

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r_i} \qquad (1.8)$$

で，a 項で述べるラグランジュ (Laglange) 微分を示す．結局式 (1.5) は

$$\iiint_V \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} dV = \iiint_V \rho \boldsymbol{F} dV + \iint_S \boldsymbol{p}_n dS \qquad (1.9)$$

と変形できる．

a．ラグランジュ微分　ここで式 (1.8) で定義された演算子 D/Dt の物理的意味について振り返ってみよう．時刻 t に点 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ にあった流体の微小部分に付属する物理量 ϕ の時間変化を考えると，時刻 $t+\Delta t$ に流体の微小部分は点 $(x+u\Delta t, y+v\Delta t, z+w\Delta t)$ にきている．したがって Δt 時間内の ϕ の微小変化 $\Delta\phi$ は

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi(x+u\Delta t, y+v\Delta t, z+w\Delta t, t+\Delta t) - \phi(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial \phi}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial \phi}{\partial z} w\Delta t + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + O\{(\Delta t)^2\} \qquad (1.10)\end{aligned}$$

となる．$D\phi/Dt$ は $\Delta t \to 0$ の極限で

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z} \equiv \frac{D\phi}{Dt} \tag{1.11}$$

と定義される．このように D/Dt は流体の微小部分に付随した諸量が，微小部分の運動とともに単位時間当たりにどれだけ変化するかを示すもので，ラグランジュ微分とよばれている．

b．応力テンソル 以下応力 $\boldsymbol{p}_n$ について考察する．図 1.4 のように法線 $\boldsymbol{n}$ なる斜面をもつ微小四面体 OABC を考え，式 (1.9) を適用すると，体積積分の項は表面積分の項に比べて高次の微小量で無視できる．したがって，力のつりあい式として

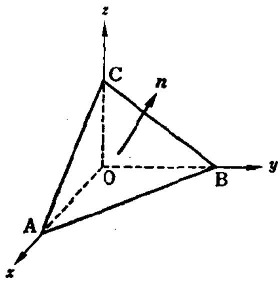

図 1.4

$$\boldsymbol{p}_n \Delta S + \boldsymbol{p}_{-x}\Delta S_x + \boldsymbol{p}_{-y}\Delta S_y + \boldsymbol{p}_{-z}\Delta S_z = 0 \tag{1.12}$$

を得る．ΔS, ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z は △ABC, △OBC, △OAC, △OAB の面積で，$\boldsymbol{n}$ の方向余弦を (l, m, n) とすれば

$$(\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z) = (l, m, n)\Delta S \tag{1.13}$$

なる関係がある．互いに面で接し合う流体部分についての作用・反作用の関係から

$$-\boldsymbol{p}_{-x} = \boldsymbol{p}_x \tag{1.14}$$

なる関係が成り立つから，式 (1.12) は

$$\boldsymbol{p}_n = l\boldsymbol{p}_x + m\boldsymbol{p}_y + n\boldsymbol{p}_z \tag{1.15}$$

となる．たとえば $\boldsymbol{p}_x$ は x 方向に法線をもつ面 △OBC に働く力であるから，その力の x, y, z 方向の成分を $\boldsymbol{p}_x(p_{xx}, p_{xy}, p_{xz})$ のように書くと，式 (1.15) は

$$\begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

のように書け，またベクトル形で

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.17}$$

のようにも書ける．p_{xx} など 9 個の成分をもつ $\boldsymbol{P}$ は，応力テンソル (stress tensor) とよばれる二階のテンソルである．式 (1.15) を式