

中国工程热物理学会

第七届年会论文集

第三分册

传热传质学

一九九〇

南京



目 录

导热

应用 Duhamel 定理确定固体界面上的瞬时热流密度

..... 于 韧 施明恒 1-1-1-4

导热反问题的数值分析—待定边界条件..... 陈善年 张辉 1-5-1-10

凝固类非线性热传导问题的热阻法求解 陈则韶 1-11-1-16

准稳态温度场存在的充要条件 胡汉平 张寅平 梁新刚 1-17-1-20

耦合求解焓及移动边界位置的多维相变问题焓法

..... 曾欣 辛明道 1-21-1-26

自然对流

非等温竖壁的自然对流与辐射的复合换热

..... 任泽需 王建丰 张登富 2-1-2-6

高 Gr 数水平旋转圆筒多孔介质表面对流质交换的研究

..... 章熙民 马洪亭 李风 李维毅 2-7-2-12

有限空腔内自然对流的传热关系式 ... 夏吉良 辛明道 张洪济 2-13-2-18

水平通道内由于两侧气体浓度差引起的自然对流传质研究

..... 王四海 江亿 2-19-2-16

Rayleigh—Taylor 不稳定性临界波长的实验研究

..... 孔旭静 张舒飞 王幼纯 2-27-2-31

研究具有水平离散扁平热源的竖板自然对流换热的新方法

..... 林兆庄 许嘉钰 王补宣 2-32-2-37

具有平行隔板的双向倾斜矩形腔体内自然对流传热研究

..... 陆煜 张学军 2-38-2-43

封闭圆内缝隙度对开缝圆环自然对流换热的影响

..... 杨沫 陶文铨 陈钟顺 2-44-2-49

倾斜平板通道自然对流的抽吸流率和换热

..... 杨小琼 罗来勤 李妩 王启杰 2-50-2-55

热面向上水平微型平板的自然对流换热研究 ... 王启杰 张孙孝 2-56-2-60

水平线热源自然对流中的热绕流实验研究

..... 董金昌 过增元 赵有信 2-61-2-67

封闭空腔中自然对流的数值分析和显示实验 黄步超 2-68-2-71

两侧壁分别为恒热流和恒壁温情况下矩形空间内多孔介质边界层区自然对流

..... 董玉冰 程尚模 2-72-2-77

移动热源热传导的非稳态分析(Ⅱ) 张洪济 2-78-2-83

III. 受迫和混合对流

空间横掠非均长倾斜板簇换热及阻力特性的试验研究

..... 黄辉章 陶文铨 3-1-3-6

金属铁屑填充换热管(管内)的试验研究

..... 张文铁 陶慧林 于洪彬等 3-7-3-12

几种强化传热表面特性的实验 顾维藻 胡敦燕 刘长春 3-13-3-18

航天飞机机翼前缘温度相似条件的分析 桂业伟 3-19-3-24

纵掠横肋套管的换热和阻力特性 金援越 陈钟顺 田野 3-25-3-30

发热固体大颗粒间绕流的传热实验研究 王补宣 刘涛 3-31-3-36

加热和冷却时一维无粘管流的研究 ... 张玉文 陈钟顺 过增元 3-37-3-42

具有三角粗糙肋的通道的传热和阻力特性的研究

..... 凌长明 陈钟顺 3-43-3-47

对流换热的物理机制分析及应用 过增元 庄文红 3-48-3-53

对流质交换边界层浓度场的实验研究

..... 王命棋 齐崇磊 章熙民 3-54-3-58

利用奈升华法对流化床中传热机理的研究 汤学忠 郝彦琼 3-59-3-64

IV. 相变换热

陈皮干燥特性的研究 涂颀 王存仓 田晓亮 毛润治 4-1-4-6

水平旋转圆筒内蒸汽凝结的研究 裘烈钧 王世峰 4-7-4-12

饱和降膜的换热特性和起沸形态 蒋章焰 马同泽 秦俭等 4-13-4-18

喷雾气液两相悬浮体滞止对流换热的理论分析

..... 葛绍岩 刘波 姚永庆 4-19-4-24

胶丸类药品干燥特性及系统的研究

..... 田晓亮 涂颀 吕灿仁 毛润治 4-25-4-30

中草药红外辐射与对流干燥的实验研究 褚治德 许铁栓等 4-31-4-36

低压水蒸汽在网状波纹流道中的凝结放热研究

..... 王中铮 赵镇南 李汝良 4-37-4-43

非共沸混合工质 R22/R12 水平管内冷凝换热的实验研究

..... 胡晓兰 马一太等 4-44-4-49

考虑壁面辐射时直立平板两侧膜状凝结与自然对流间的耦合传热

..... 张浩然 黄素逸 杨金宝 4-50-4-57

利用热镜防止汽车挡风玻璃结霜的理论和实验研究, I, 理论分析部分

..... 张寅平 葛新石等 4-58-4-63

液体高速流经水平板槽时的湍流膜沸腾传热 ... 彭晓峰 王补宣 4-64-4-71

DAE 高效蒸发传热管局部换热系数及其流型的实验研究

..... 王维城 张文喜等 4-72-4-77

R12、R22 在 DAE 高效蒸发传热管内平均沸腾换热系数及其压力损失的准则关联式

..... 王维城 张文喜等 4-78-4-83

肋片管外凝固换热强化的研究	王超 王启杰 陈钟顺	4-84—4-89
非等温条件下木片碎料中的水分迁移特性	尚德库	4-90—4-95
水平冷凝传热管双侧强化传热实验研究	廖强 辛明道等	4-96—4-101
两相顺流热虹吸管内凝结换热的研究	卫红 马同泽	4-102—4-107
角域内的二维冻结熔解问题	彭仕文 程尚模 陈断业	4-108—4-113
乙醇—水混合蒸汽在双向螺旋盘管上的凝结	邬国华 程尚模	4-114—4-119
V. 多孔介质的传热与传质		
圆柱颗粒随机堆放形成的多孔结构中对流传质规律的实验研究	刘保民 陶文铨	5-1—5-6
非牛顿流体在侧壁恒热流加热的封闭多孔介质腔内的自然对流	张晓奋 屠传经 严建平 张华珍	5-7—5-12
固体吸湿式空调系统热质传递机理研究	寿卫东 韩鸿兴	5-13—5-18
多孔介质等效导热系数的较高精确度通用计算式	陈则韶 倪海涛 陈梅英	5-19—5-24
相连续非饱和多孔介质中水份迁移机理的探讨	刘伟 王崇琦等	5-25—5-30
VI. 高温传热与辐射		
辐射强化多孔介质温度分布和最佳光学厚度的实验研究	葛绍岩 曹恕 徐靖中等	6-1—6-6
参数估计技术在闪光法测热物性数据处理中的应用	顾毓沁 胡山	6-7—6-12
一种新型人工黑体辐射源的理论及实验研究	姚成才 葛新石等	6-13—6-18
测量微粒粒径分布的辐射反问题方法	谈和平 余其铮	6-19—6-24
多孔陶瓷辐射强化的实验研究及多层丝网热发射率的测定	葛绍岩 全淑霞 徐靖中	6-25—6-28
结霜工况下肋片管式蒸发器的传热研究	孟繁炯 岳丹婷	6-29—6-34
VII. 工业应用换热器及其它		
叠砌孔板气—气换热器传热特性研究	叶国兴 才建东等	7-1—7-7
凝固时的双扩散自然对流及其同沟槽偏折的联系 第一部分:实验研究	赵勇 连国达等	7-8—7-13
凝固时的双扩散自然对流及其同沟槽偏折的联系 第二部分:数值分析	赵勇 连国达等	7-14—7-19
半导体制冷冰箱的传热分析	张素军 杨玉顺 刘纪福	7-20—7-25
活塞式压缩机壳管式冷却器换热系数的实验研究	严彩球 吕亚东 孙嗣莹	7-26—7-32

侧壁局部受热时充满多孔介质封闭空腔内的自然对流	操基明 夏吉良 辛明道	7-33—7-38
多孔平板辐射节能的理论与实验研究	徐斌 余其铮 谈和平	7-39—7-44
分离式热虹吸管组换热特性的研究	张正芳 孙全平等	7-45—7-50
蛇类野外越冬环境的热工分析	肖杰 屠传经等	7-51—7-55
食品材料的微波解冻传热实验研究	曾欣 辛明道 张大明	7-56—7-61
大面积厂房间歇供暖的地面吸热问题	程林 裘烈钧 陈立明	7-62—7-67
VIII. 数值模拟		
第二类边界条件下平板内熔化问题的半精确解	张玉文 陈钟顾	8-1—8-6
非定常导热问题的边界元—有限差分耦合分析	杜生广	8-7—8-11
地下直埋管道传热的边界元分析	陈学营 沈胜强 崔峨	8-12—8-17
果蔬自发式气调贮藏的数学模型	江亿 侯东明	8-18—8-23
微波加热陶瓷二维传热模型及计算	方建华 沈路婵 屠传经等	8-24—8-29
应用线性瞬态热传导中的拉普拉斯变换特征有限元法	俞维泽 张东山 王志文 吴东棣	8-30—8-35
陶瓷涂层对气膜冷却式火焰筒壁面温度影响的计算研究	董志锐	8-36—8-42
轮胎硫化过程无探针微机控制模型	张能力 王雪峰 王补宣	8-43—8-48
基于任意非正交曲线网格的对流扩散问题数值解	陈汉平 石正军	8-49—8-54
模拟印刷电路板空气强迫对流传热的二维数值计算	丁小江 辛明道	8-55—8-60
开口方形空腔的湍流自然对流的数值研究	林成先 辛明道等	8-61—8-66
凝汽器壳侧蒸汽流动和传热特性的数值计算	许占豪 俞茂铮	8-67—8-72
二维对流扩散问题的边界元解法	全淑霞 姚永庆 郭宽良	8-73—8-77
计算移动边界问题的一种隐式离散格式	曾欣 辛明道	8-78—8-83
一种新的辐射模型及其在室内火灾数值模拟中的应用	周红 范维澄	8-84—8-89
燃烧器区域传热的 Montecarlo 法分区计算	田岩 谈和平 秦裕琨	8-90—8-95
在注塑充模过程中相变传热数值模拟	张政 刘川	8-96—8-101
高超音速大攻角钝体迎风面气动加热计算	冯青 刘松龄	8-102—8-117
水平旋转圆管流动和换热数值分析	常海萍 王宝官 丁中涛	8-108—8-113

IX. 测量与显示技术

用激光散斑方法研究带凸台竖直平行通道的散热问题

..... 杨金宝 尧志 9-1-9-6

应用双面量热计直接确定保温材料的导热系数

..... 杨世铭 余自军 9-7-9-12

一种新的过渡态多功能热物性测定法——同时测定 λ 、 α 、 C_p 的平面热源定温边界

平板法 陈则韶 高晴岚 崔锷 9-13-9-17

地下岩芯导热系数的测定研究 程曙霞 李芝兰 葛新石等 9-18-9-23

薄型材料热物性测试的实验研究 姚杨献 9-24-9-27

含气孔建筑陶瓷材料的导热系数

..... 吴清仁 何寿生 文壁璇 曾令可 刘振群 9-28-9-33

测量小尺寸试件表面热流的折叠式激光斑照相技术

..... 朱德忠 宋耀祖 陈国光 9-34-9-39

测量三维非等温流场涡流参数及动态温度的双热线多方位转动法

..... 郑楚光 周英彪 米建春 熊卫红 9-40-9-46

投影云纹偏转法在传热学研究中的应用 ... 王鸣 马力 曾金根 9-47-9-52

多孔介质非饱和渗流的阈梯度模型

..... 虞维平 王补宣 施明恒等 9-53-9-58

应用Duhamel定理确定固体界面上的 瞬时热流密度

于 韧 施明恒

(东南大学)

一、前言

在许多工程实际问题中,常常需要确定固体界面上的瞬时热流密度。例如高温金属壁面的喷淋冷却、内燃机气缸壁上燃料滴的汽化、电子器件的散热系统设计等等。由于界面热流密度的直接测量十分困难且准确度较差,所以人们希望通过测量物体某些点处的局部温度来推算出界面热流密度。习惯上已知物体内部某些点处的温度来确定物体界面上的热流密度问题称为导热的反问题。为了求解导热的反问题,已经发展了许多解析的方法和数值计算技巧[1]。但是,在各种反问题的求解方法中,都存在一个共同的问题,即在一个发生导热系统中,对于物体内部各点而言,边界条件的影响总是逐步衰减的,因此在求解反问题时,总是利用衰减后的数值来计算边界上的热流密度。再加上测温点位置的测量误差,常常会导致较大的边界热流密度的计算误差。为此,人们希望被测温度点尽量靠近界面,甚至直接布置在界面上。由于各种高灵敏度微型表面热电偶的研制成功,现在已经能够比较精确地测量出界面的温度。因此,根据被测的界面瞬时温度直接计算界面瞬时热流密度的方法具有十分重要的工程实用价值。

本文基于Duhamel叠加定理,导出了利用界面瞬时温度直接计算界面瞬时热流密度的计算公式,并对液滴冲击高温壁面时液滴的界面瞬时热流密度进行了计算。

二、界面热流密度的计算方法

通常Duhamel定理是用来将求解边界条件随时间变化的热传导问题与求解边界条件不随时间变化的同一热传导问题相联系起来。作为一个特殊情况,Duhamel定理可以表述为:

对于一个线性均匀系统，若输入一个单位阶跃函数时其响应函数为 $V(\tau)$ ，则当输入函数为 $f(\tau)$ 时，其响应函数 $y(\tau)$ 可以表达为

$$y(\tau) = V(0)f(\tau) + \int_0^\tau V'(\tau-t)f(t)dt \quad (1)$$

对于界面传热的情况，界面温度随时间的变化 $\theta(\tau)$ 可以作为输入函数，则界面热流密度 $q(\tau)$ 就是相应的响应函数。所以边界上热流密度的表达式可写成：

$$q(\tau) = V(0)\theta(\tau) + \int_0^\tau V'(\tau-t)\theta(t)dt \quad (2)$$

式中 $\theta(\tau) = T(\tau) - T_0$ ， T_0 是界面初始温度， $T(\tau)$ 是在时刻 τ 所对应的界面温度。

为了求得单位响应函数 V ，假定固体壁面足够厚为半无限大物体，内部导热是一维的，其初始温度为 T_0 ，则固体内部温度分布可由下列微分方程来描述

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3)$$

边值条件为 $\tau = 0 \quad \theta = 0$

$$\tau > 0, \quad x = 0, \quad \theta = 1 \quad (4)$$

方程(3)在边值条件(4)下的解为

$$\theta = \operatorname{erfc}(x/\sqrt{4a\tau}) \quad (5)$$

则

$$U(\tau) = \lambda s \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda s / \sqrt{\pi a \tau} \quad (6)$$

将上式代入式(2)，并利用恒等式

$$U(0)\theta(\tau) = U(\tau)\theta(\tau) - \int_0^\tau V'(\tau-t)\theta(t)dt$$

可得界面热流密度的表达式为

$$q(\tau) = \lambda s / \sqrt{a\pi} \left[\theta(\tau) / \sqrt{\tau} + 1/2 \int_0^\tau (\theta(\tau) - \theta(t)) / (\tau-t)^{3/2} dt \right] \quad (7)$$

通常表面温度 $T(\tau)$ 是被测出的一根随时间变化的实验曲线。为了能够按式(7)计算热流密度，可以将被测温度的实验曲线用多项式回归[2]，即可写成

$$T(\tau) = T_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + \dots \quad (8)$$

$$\text{则 } \theta(\tau) = A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + \dots \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)，得

$$q(\tau) = \lambda s / \sqrt{a\pi} \left\{ \left[\tau^{1/2} (A_1 + A_2\tau + A_3\tau^2 + \dots) \right] + 1/2 \int_0^\tau \left[(A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + \dots) - (A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + \dots) \right] / (\tau-t)^{3/2} dt \right\} \quad (10)$$

上式中的积分项可以化简并积分后变成

$$\begin{aligned} & 1/2 \int_0^\tau \sum_{i=1}^m (A_i\tau^i - A_it^i) / (\tau-t)^{3/2} dt \\ &= \sum_{i=1}^m (2^{i-1} [(i-1)!]^{-1} \tau^{i/2} \sum_{k=i}^m A_k \tau^{k-i} / (2i-1)!) \quad (11) \end{aligned}$$

将上式代入公式(10)，最后得到界面热流密度的实用计算公式为

$$q(\tau) = \lambda s / \sqrt{a\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \tau^{(2k-1)/2} / 2 \left[1 + \sum_{i=1}^k 2^{i-1} [(i-1)!]^2 / (2i-1)! \right] \quad (12)$$

三、冲击液滴的瞬时换热量

作为上述计算方法的一个应用实例，我们来计算液滴冲击高温壁面时的冲击换热量。液滴冲击冷却是一种高效的冷却方式，在冶金、微电子元件冷却等方面有着重要的应用前景。工程设计时需要确定液滴一次冲击从壁面上带走的热量。单个液滴冲击高温壁面时利用二维表面热电偶测得的表面温度讯号如图1所示[6]。由图可见，高温壁面受到液滴冲击后，壁温在很短时间内迅速下降，液滴在壁面上停留短暂时间后，在蒸汽压力的作用下脱离表面。通过变换座标原点，将温度—时间曲线拟合成多项式

$$\theta(\tau) = -6.1\tau + 0.2074\tau^2 \quad (13)$$

将上式代入式(12)进行计算，求得的表面热流密度的表达式为

$$q(\tau) = -4.87 \times 10^5 \tau^{1/2} + 4.21 \times 10^6 \tau^{3/2} \quad (14)$$

液滴一次冲击带走的热量为

$$Q = \int_0^{\tau_0} q(\tau) \pi R^2(\tau) d\tau \quad (15)$$

式中 τ_0 和 $R(\tau)$ 分别是液滴与壁面相接触的时间和接触半径，由文献[4]和[3]提供的公式计算。

图2给出了按公式(15)计算出的冲击换热量和实验中测定的壁面散热量[5]之间的比较。由图可见，两者的符合程度是满意的，偏差小于20%。计算结果比实测值偏高，除了液滴半径误差外，主要是由于实际壁温和壁面热流不均匀所引起的。

参考文献：

1、数学手册 人民教育出版社 1977

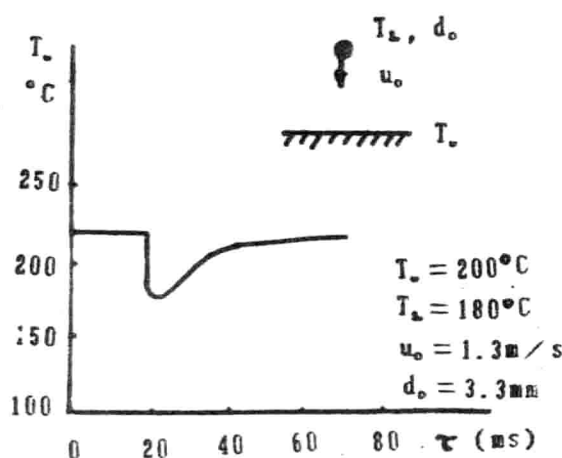


图1 壁面温度讯号

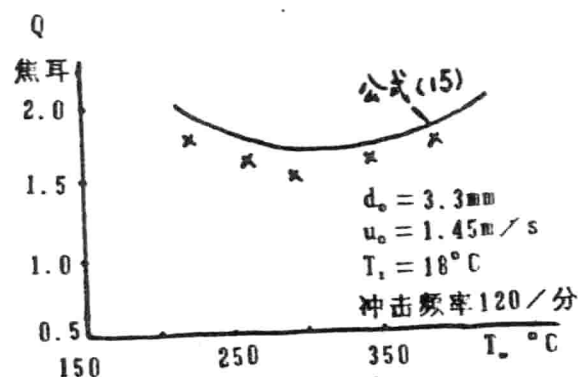


图2 冲击换热量计算值与实测值之间的比较

2、Anderson, S.A. et al "A Technique for Determining the Transient Heat Flux at a solid Interface Using the Measured Transient Interfacial Temperature " J. Heat Transfer vol. 95 Nov. 1973。

3、施明恒 "单个液滴碰击壁面时的流体动力学特征" 力学学报 Vol 17. NO. 5, 1985。

4、Wachters, L.H.J. et al, "The Heat Transfer From a Hot Wall to Impinging Mist Droplets in the Spheroidal State." Chem Eng. Sci, vol. 21. 1966.

5、施明恒, 于韧 "液滴冲击高温壁面时的换热量研究" 第三届高校工程热物理学术会议, 1990。

6、于韧 "液滴冲击高温壁面时的换热机理和换热量的研究" 硕士研究生论文 东南大学, 1989。

导热反问题的数值分析——待定边界条件

陈善年 张辉
(东南大学)

摘 要

本文引用线性空间、距离空间和线性算子概念来描述和讨论待定边界条件的导热反问题,在逼近意义下求得这个不适定问题的近似解。采用阶梯函数子空间的边界条件变化规律得到相应的线性代数方程组。通过数值实验和物理实验的例子表明采用方法的适用性和有效性。

一、前 言

待定边界条件的导热反问题在无法测定边界条件的工程技术问题中广泛存在。根据求解域内某点或某几个点的温度变化规律(温度历史),采用导热反问题的求解方法就有可能得到待定边界条件的解。

近30年来对线性导热反问题的研究已逐步展开^[1],但在求解中还常用精确匹配的观点,即认为按所求得的边界条件得到的温度场必须与测量值一致,而没有考虑测量值误差带来的稳定性问题。更合理的应该是近似匹配的观点,即要求得到的是相应于最优控制观念的最佳逼近解^[2],这将满足求解这个数学上的不适定性问题的要求。

从工程上看,满足特定温度场的边界条件是存在且确定的,但测量值的误差也是存在的。

本文讨论常物性、线性边界条件、无内热源的非稳态导热反问题,待定的是部分边界条件。

二、问题的数学描述

导热正问题

$$\begin{aligned} \text{控制方程} \quad & \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T \\ \text{边界条件} \quad & b(\vec{r}_n, t) = f(\vec{r}_n, t) \\ \text{初始条件} \quad & T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}) \\ \text{解得:} \quad & T(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

待定n段边界条件的导热反问题

$$\begin{aligned} \text{控制方程} \quad & \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T \\ \text{已知边界条件} \quad & b(\vec{r}_i, t) = f(\vec{r}_i, t) \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \text{待定边界条件} \quad & b(\vec{r}_j, t) = \text{待定} \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \text{初始条件} \quad & T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}) \\ \text{测点值} \quad & T(\vec{r}_k, t) \quad (k=1, 2, \dots, l) \end{aligned}$$

由场内温度测值确定n段边界条件时,若采用简单的外推,势必由于边界的影响在内部的滞后和衰减而造成严重失真,实用上可以视导热方程是一个线性系统,边界条件是系

统输入, 测点温度历史是系统输出, 由系统输出来确定输入, 即找到一个最合适的边界条件。这样便可以消除滞后的影响, 但仍需控制衰减现象。

在线性导热问题中, 边界条件 $\vec{b}$ 与温度场 $\vec{T}$ 间存在线性关系, 即

$$A\vec{b} = \vec{T} \quad (\vec{b} \in B, \quad \vec{T} \in F)$$

式中 A 是线性算, B 和 F 分别表示关于定解条件加温度分布的线性空间。

本文引用距离空间概念来求得近似意义下的解。

若线性空间 B 中的元素 $\vec{b}$, 是待定的边界条件解, 其在线性空间 F 中的映象 $A\vec{b}$, 与测点温度历史 $\vec{T}_n$ 间的距离最近, 即

$$d_r(A\vec{b}_n, \vec{T}_n) = \inf_{\vec{b} \in B} \|A\vec{b} - \vec{T}_n\|,$$

根据经验(如光滑性、变化趋势等)在无限维边界条件空间 B 中适当选择一个 n 维子空间 S_n , 也就是 $\vec{b} \in S_n \subset B$, 用给定的误差扰动可以验证所选择子空间 S_n 内的解 $\vec{b}_n$ 的唯一性与稳定性。

若将待定边界条件对测点的影响分离出来, 并运用迭加原理 $T''=T-T'$, $b''=b-b'$, 则可将反问题的数学描述转化成一个正问题和一个标准形式反问题, 即

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T'}{\partial t} &= K \nabla^2 T' \\ b'(\vec{r}_w, t) &= f(\vec{r}_w, t) \\ b'(\vec{r}_w, t) &= 0 \\ T'(\vec{r}, 0) &= T_n(\vec{r}) \\ T'(\vec{r}_i, t) &= \text{计算值} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T''}{\partial t} &= K \nabla^2 T'' \\ b''(\vec{r}_w, t) &= 0 \\ b''(\vec{r}_w, t) &= \text{待定} \\ T''(\vec{r}, 0) &= 0 \\ T''(\vec{r}_i, t) &= \text{测量值} - \text{计算值} \end{aligned}$$

关于正问题的数值求解见文献^[4]。标准形式反问题具有初始条件与已知边界条件均为零、测点温度历史已知和算子 A 对待定边界条件是线性等特点。

三、逼近方法求解

基于最优控制观念的逼近方法有许多种, 我们采用最小二乘的逼近方法求解。设在 n 维线性空间 S_n 中有一组基

$$\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \dots, \vec{b}^{(n)}$$

S_n 的所有元素都是这组基的线性组合

$$\vec{b} = C_1 \vec{b}^{(1)} + C_2 \vec{b}^{(2)} + \dots + C_n \vec{b}^{(n)}$$

对一个测点时, 有

$$\begin{aligned} A\vec{b}^{(1)} &= \vec{T}_i^{(1)} \\ A\vec{b}^{(2)} &= \vec{T}_i^{(2)} \\ &\vdots \\ A\vec{b}^{(n)} &= \vec{T}_i^{(n)} \end{aligned}$$

也就是说, 如把每个基单独作为标准形式的待定边界条件, 则都可通过计算正问题方法得到测点的相应温度历史。对任意的边界条件 $\vec{b}$, 有

$$\begin{aligned} A\vec{b} &= A(C_1 \vec{b}^{(1)} + C_2 \vec{b}^{(2)} + \dots + C_n \vec{b}^{(n)}) \\ &= C_1 \vec{T}_i^{(1)} + C_2 \vec{T}_i^{(2)} + \dots + C_n \vec{T}_i^{(n)} \end{aligned}$$

若测得温度历史 $\vec{T}_n$, 将近似解写成

$$d_r(\vec{Ab}, \vec{T}_n) = \inf_{\vec{b} \in S_r} ||\vec{Ab} - \vec{T}_n|| = \inf_{C_i \in R} || \sum_{i=1}^n C_i \vec{T}_i^{(w)} - \vec{T}_n ||,$$

式中R是实数域。满足上式的 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 代入 $\vec{Ab} = \sum_{i=1}^n C_i \vec{T}_i^{(w)}$ 得到的b就是待定边界条件 $\vec{b}_r$ 。

在实际计算中, $t_i (=P \Delta t)$ 时刻域内温度历史 $\vec{T}_n$ 是离散值, 即 $\vec{T}_n = (T_n^1, T_n^2, \dots, T_n^p)^T$ 。对应边界条件 $\vec{b}^{(w)}$ 解出的测点温度历史 $\vec{T}_i^{(w)}$, 有

$$\begin{aligned} \vec{T}_1^{(w)} &= (T_1^1, T_1^2, \dots, T_1^p)^T \\ \vec{T}_2^{(w)} &= (T_2^1, T_2^2, \dots, T_2^p)^T \\ &\vdots \\ \vec{T}_n^{(w)} &= (T_n^1, T_n^2, \dots, T_n^p)^T \end{aligned}$$

$$\text{得 } d_r(\vec{Ab}, \vec{T}_n) = \inf_{C_i \in R} ||Q|| = \min_{C_i \in R} \left(\sum_{r=1}^p \left(\sum_{i=1}^n C_i T_i^r - T_n^r \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{式中 } Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_p)^T, Q_r = \sum_{i=1}^n C_i T_i^r - T_n^r \quad (r=1, 2, \dots, p)$$

$$\text{由 } \frac{\partial d_r}{\partial C_i} = 0 \text{ 得}$$

$$\sum_{r=1}^p (T_i^r \left(\sum_{j=1}^n C_j T_j^r - T_n^r \right)) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

用矩阵表达式表示, 有

$$A C = E$$

$$\text{其中元素 } a_{ij} = \sum_{r=1}^p T_i^r T_j^r \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

$$e_i = \sum_{r=1}^p T_i^r T_n^r$$

$$a_{ii} = a_{ii}$$

由线性代数方程组求解得到 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 进而得到 b_r 。

对两个测点, 则矩阵元素是

$$a_{11} = \sum_{r=1}^p (T_{1r} T_{1r} + T_{2r} T_{2r})$$

$$e_1 = \sum_{r=1}^p (T_{1r} T_{nr} + T_{2r} T_{nr})$$

可见, 同时采用两个测点温度历史时, 得到的关于 C_i 的线性代数方程组就是单个测点的线性代数方程组之和。这是一个简单而重要的结论。

对两个待定边界条件

$$\vec{Ab} = C_{11} \vec{T}_1^{(w)} + C_{12} \vec{T}_2^{(w)} + \dots + C_{1n} \vec{T}_n^{(w)} + C_{21} \vec{T}_1^{(w)} + C_{22} \vec{T}_2^{(w)} + \dots + C_{2n} \vec{T}_n^{(w)}$$

$$d_r(\vec{Ab}, \vec{T}_n) = \inf_{C_{ij} \in R} || \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n C_{ij} \vec{T}_j^{(w)} - \vec{T}_n ||$$

$$= \min_{C_{ij} \in R} \left(\sum_{r=1}^p \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n C_{ij} T_j^r - T_n^r \right)^2 \right)^{1/2}$$

同理,可推广到 多个测点和多个待定边界条件问题。作者计算实践表明,测点数一般应不少于待求边界条件个数。

在子空间 S 选择时,若采用多项式构成的线性空间,则只能适应光滑的边界条件变化规律。我们推荐一组 n 个阶梯构成的 n 维阶梯函数来逼近边界条件的变化规律,它可以适应各种复杂情况。它的全部阶梯也就构成一组基。其中第 i 个基: $\bar{b}^{(i)} = A_i$ ($A_i \neq 0$ 当 $(i-1)\Delta t_i < t \leq i\Delta t_i$, 在其他时间 $A_i=0$)。阶梯函数空间可用这些基的线性组合表示,即

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^n c_i \bar{b}^{(i)}$$

阶梯宽度 Δt_i 受 t_i 时段内 T_i 的采样个数限制,间隔为 Δt 的等间隔采样时,有 $p=t_i/\Delta t$ 。用等宽度阶梯有 $n=t_i/\Delta t$ 。建议 $n=p/2$,则可以保证得到合理的解,并认为阶梯的高度代表中间点时间的值。见图1。

四、举 例

通过数值实验与物理实验的实例检验算法的适用性与有效性。数值实验是在给定的边界条件下计算出测点的温度历史,再由此温度历史反算出待定边界条件,然后比较两者的差别,物理实验是测量测点的温度历史,计算出待定边界条件,再与测出的边界条件值作比较。

例1 厚为200mm的无限大平板,材料是纯铜,初温20℃,左边界绝热,右边界温度待定。测点温度历史采样间隔 $\Delta t=0.05$ 秒, $\Delta t_i=0.1$ 秒, $P=60$, $n=30$,测点是 P_i 点(距右边界2.5mm)。

设定右边界温度为 $\bar{b}=150+20t-10t^2$ ℃由正问题计算 P_i 点温度历史,再反算待定边界温度,计算得到的阶梯变化温度与给定的曲线吻合很好。见图2。

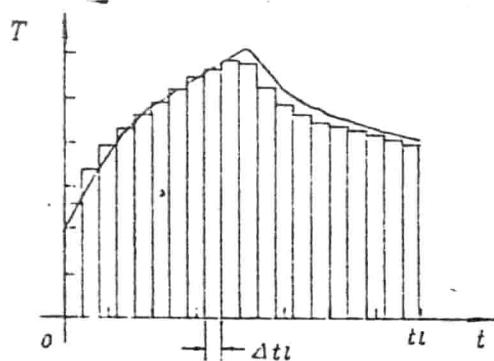


图 1

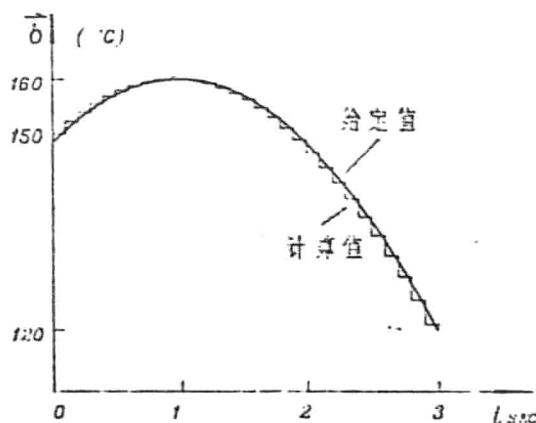


图 2

例2 如图3所示具有两个待定边界条件的导热反问题。其中除左上端两小段边界条件是待定外,已知底部是20℃,其余为绝热边界,初始温度是20℃。有 P_1 和 P_2 两个测点。取 $\Delta t=0.05$ 秒, $\Delta t_i=0.1$ 秒,测点温度历史 2×40 采样值,阶梯数目 2×20 个。

给定左段边界热流

$$\bar{b}_1^* = 10^4 + 10^4 t^2 \quad \text{W/m}^2$$

给定右段边界热流

$$\bar{b}_2^* = 10^4 + 10^4 t \quad \text{W/m}^2$$

计算得到的阶梯变化热流与给定值符合良好。见图4(a)(左段), 4(b)(右段)。

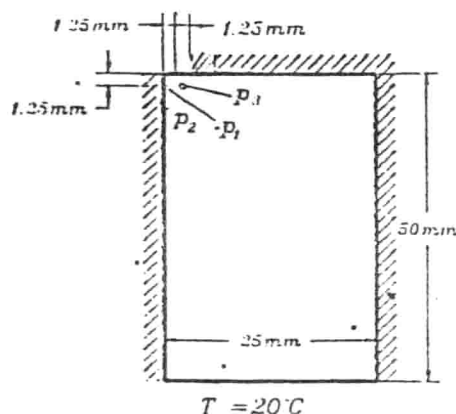


图3

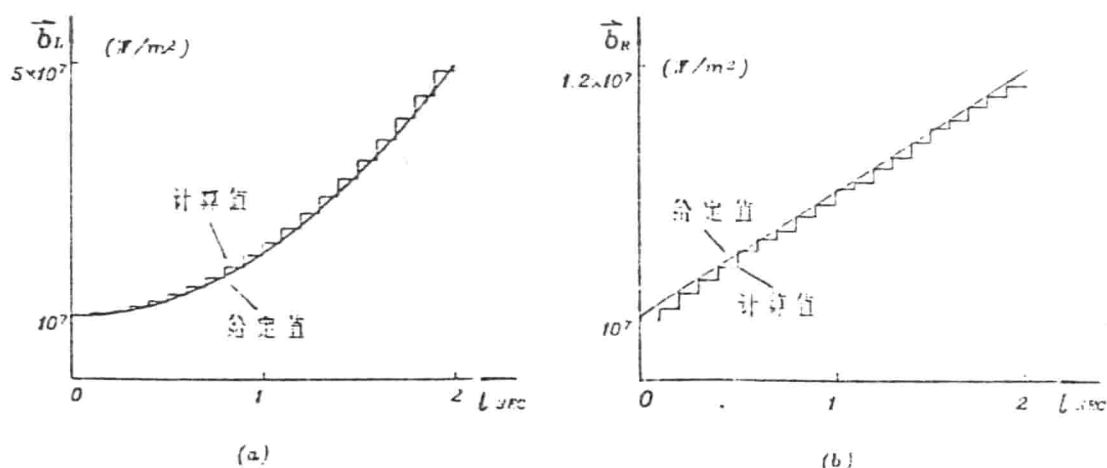


图4

例3 在长220mm, $\phi 15$ 铜棒上, 距下端2.5mm(C_1)和5mm(C_2)处, 沿径向钻深6mm、 $\phi 0.8$ 的两个小孔, 孔内装有测温热电偶。铜棒初温10°C, 下端面突然升温到100°C, 采样时间内保持上端面温度不变。铜棒侧面绝热以保证一维导热。实验方法是测出 C_2 点温度历史作为已知的 C_1 点的边界条件, 再由测出的 C_2 点温度历史反算出 C_1 点的温度历史, 并比较 C_1 点的实测值与计算值。

$$\Delta t_1 = 2\Delta t = 1.5 \text{ 秒} \quad n=20 \quad p=40$$

由图5可见两者符合良好。偏差的原因中包含有物性取值和测温中难免的误差。

导热反问题实际应用时, 为解决因温度历史误差造成的稳定性, 要求算法要保证测点误差与边界误差间成单调关系。取测点值与精确值距离 d_i 及计算边界条件与给定边界条件间距离 d_e , 分别是

$$d_i = \sqrt{\frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} (T_m - T_e)^2 dt}$$

$$d_e = \sqrt{\frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} (b_m - b_e)^2 dt}$$

我们应用算例1的数据, 并将求解正问题得到的精确测点温度历史加上计算机伪随机

人为造成七种不同程度误差干扰的测点值，来计算边界温度值，详见文献^[4]，得到图6

与 d 变化关系。可见算法是符合要求的，边界条件的近似解是稳定的。

文中所有算例的正问题数值计算均采用文献^[4]中的二维传导型问题程序。其余程序自

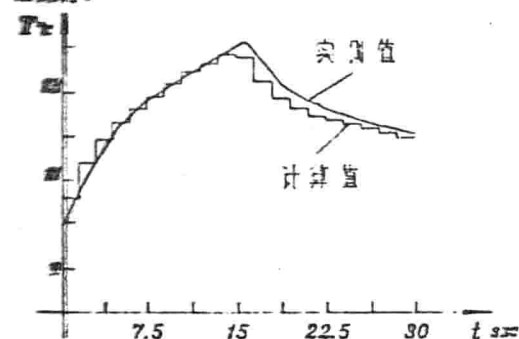


图5

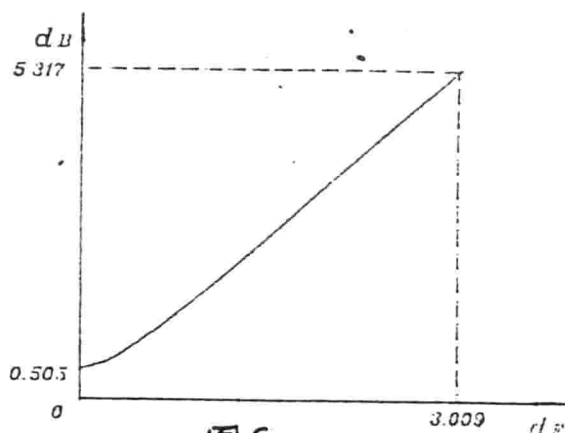


图6

参 考 文 献

1. Beck, J.V., Inverse Heat Conduction-Ill-Posed Problems, John Wiley & Sons, New York, 1985
2. 吉洪诺夫(1979), “不适定问题的解法”, 地质出版社
3. 张辉, “待定边界条件热传导反问题的数值分析”, 南京工学院硕士论文, 1988
4. 郭宽良、孔祥谦、陈善年, “计算传热学”, 中国科学技术出版社, 1988。

凝固类非线性热传导问题的热阻法求解

陈则韶
中国科学技术大学

摘要

本文提出了一种求解固液相变热传导问题的新方法——热阻法。文中介绍了热阻法解题步骤和技巧,并举例求解了一维平板和圆柱体的凝固传热问题,所得结果与文献的解析精解和数值解十分吻合,为一阶精度解。用该方法可以极其容易地获得相变换热器所必需的热流与相变界面位置、相变界面位置与时间的关系,解的结果用方程式给出,具有物理意义明确和普遍性的优点。

一、前言

在自然界和工程界,固液相变热传导的问题很多,例如冻土、冻冰、铸造、熔炼、相变储热、食品冻结等。要掌握这些过程的规律,确定过程中变化着的热流密度的规律是至关重要的。由于伴随着相变的热传导问题是非线性问题,用传统的解析法只能求解几种极简单的问题[1],目前主要流行数值解[2]。虽然数值法具有通用性,也能得到高精度,但解的结果呆板,比不上解析解物理意义明确,普遍性差,计算中也有许多技巧需要掌握,弄不好会出现发散。为了弥补这些不足,在精度许可范围内相继应用了许多近似法,例如准静态法、摄动法[3]、数值解析混合法[4]等。准静态法由于忽略了显热,只有零阶精度,摄动法在选择小参量及解题过程也有麻烦,温度场有失真。因此寻求更简便、精确、易于被工程界所接受的方法仍有必要。基于上述目的,作者在本文介绍一种求解相变热传导问题的新方法——热阻法,并举二例说明。

二、第一类边界一维平板凝固问题

为了介绍热阻法并便于与精解作比较,举 Neumann-Stefan[5] 的问题为例。有半无限体处于临界凝固点 t_f ,表面突然被冷至 t_c ,并维持在 t_c 。若只讨论在表面 $x=0$ 与 $x=R$ 深处间的凝固,即为第一类边界的一维平板问题。物理模型及无量纲模型见图1(a),(b)。

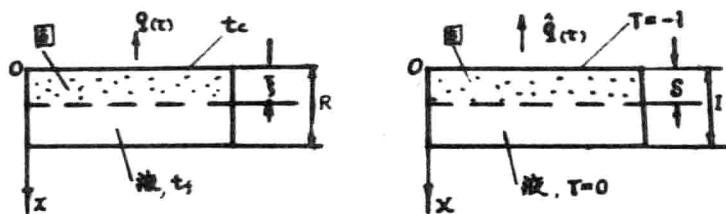


图1 一维平板凝固模型