气动研究与发展

一九七八年

第五期

（总第十一期）

编辑出版者　《气动研究与发展》编辑组

印　刷　者　中国人民解放军第二十九
　　　　　　试验训练基地印刷车间

目　　录

用直线法计算纯头体粘性绕流流场

前　　言

利用完全的 *Navier-Stokes* 方程组反映激波层的结构，在理论上无疑是正确的。但是，数值求解它是十分困难的。为了既能反映激波层中粘性与无粘的相互作用，说明激波层的结构，又便于数值计算，许多作者对 $N-S$ 方程进行了各不相同的简化，从而得到简化的 $N-S$ 方程组[1] [5]。对于一定的飞行高度，一定的 R_e 数，激波作为一个间断面还是合理的，然而边界层和无粘流场的分别则不再是截然的了，这样应运而生的简化方程组就具有不那么明确的数学性质了。为了顺利地数值求解它，许多作者进行了大量的探索和研究工作，最初[5]把二点边值问题化成一点的初值问题，进行打靶，应该说是不成功的，随后所采用的追赶法解决了这个问题。但是，方程的推进，即沿物面方向一步一步地计算下去，好象一个关口卡住了。许多作者[2] [3]又对方程本身进行了取舍，使得能够推进下去，但是同时又带来了新的问题，近似性遭到了某种程度的损失。基于此，我们采用了直线差分法，整体地数值求解钝头体头部流场。实践说明，这个办法是可行的。

本工作在 1972 年底完成，73年初看到 *Rubin* [3] 的工作，为了进行各种近似办法的数值结果比较，又修改了程序，作了一些计算。本文是根据当时的工作报告删节而成的，目的在于互通情况，交流经验，因此，数据和图表以能说明本方法的运用性为止。

§1 基 本 方 程

1.1　边界层座标下的粘性方法组

采用边界层座标 x 、y , x 为沿物体表面的方向，y 为物体表面之法向。考虑到气体的化学状态可以是冻结的，平衡的和非平衡的多种情况，轴对称粘性流，遵循以下有量纲参数的方程组：

连续性方程
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r)+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v r(1+ky)]=0 \tag{1.1}$$

动量方程
$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial u}{\partial y}+kuv\right.$$
$$\left.\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}[(1+ky)\tau_{xy}]+k\tau_{xy}$$

$$+\frac{1}{r}\left[(\tau_{xx}-\tau_{\varphi\varphi})\frac{\partial r}{\partial x}+(1+ky)\tau_{xy}\frac{\partial r}{\partial y}\right] \tag{1.2}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial v}{\partial y}-ku^2\right]$$

$$=-(1+ky)\frac{\partial p}{\partial y}+(1+ky)\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$+k(\tau_{yy}-\tau_{xx})+\frac{1}{r}\left[\tau_{xy}\frac{\partial r}{\partial x}+(1+ky)(\tau_{yy}-\tau_{\varphi\varphi})\frac{\partial r}{\partial y}\right] \tag{1.3}$$

能量方程

$$C_p\rho\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=u\frac{\partial p}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$+\tau_{xx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+kv\right)+\tau_{xy}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+(1+ky)\frac{\partial u}{\partial y}-uk\right]$$

$$+(1+ky)\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}\left[u\frac{\partial r}{\partial x}+v(1+ky)\frac{\partial r}{\partial y}\right]$$

$$+\frac{1}{1+ky}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+(1+ky)\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{1+ky}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\right.$$

$$\left.-\frac{y}{1+ky}\frac{\partial k}{\partial x}\right]+(1+ky)\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{k}{1+ky}\right)$$

$$-(1+ky)\sum_i\omega_i h_i-(1+ky)\varphi\sum_i C_i E_i$$

$$+(1+ky)\rho D\sum_i\left(\frac{1}{(1+ky)^2}\frac{\partial C_i}{\partial x}\frac{\partial h_i}{\partial x}+\frac{\partial C_i}{\partial y}\frac{\partial h_i}{\partial y}\right) \tag{1.4}$$

组分守恒方程

$$\rho\left[u\frac{\partial C_i}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]=(1+ky)\omega_i+$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r\rho D}{1+ky}\frac{\partial C_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[r(1+ky)\rho D\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]\right\} \tag{1.5}$$

振动松弛方程

$$u\frac{\partial h_i}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial e_i}{\partial y}=(1+ky)E_i \tag{1.6}$$

状态方程

$$p=\rho TR/W \tag{1.7}$$

其中

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tau_{xx}=\frac{2\mu}{1+ky}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+kv\right)-\frac{2}{3}\mu div\overline{V}\\
&\tau_{yy}=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu div\overline{V}\\
&\tau_{\varphi\varphi}=\frac{2\mu}{r}\left(\frac{u}{1+ky}\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\mu div\overline{V}\\
&\tau_{xy}=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{1+ky}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-uk\right)\right]\\
&div\overline{V}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{1+ky}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+kv\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{u}{1+ky}\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right.
\tag{1.8}
$$

还有

$$
\left\{
\begin{aligned}
&h=\sum_i C_i h_i\\
&h_i=C_{pi}T+e_i+h^\circ_i\\
&C_p=\sum_i C_i C_{pi}\\
&W=1/\sum_i C_i\\
&\mu,\lambda\propto T^{1/2}
\end{aligned}
\right.
\tag{1.9}
$$

且 C_{pi} 和 h°_i 的具体表达式如下，量纲单位是 $erg/mol^\circ k$ 和 erg/mol。

$$
C_{pi}=\begin{cases}7/2\ R & \text{双原子分子 } O_2, N_2, No, No^+\\ 5/2\ R & \text{单原子分子 } O, N, e\end{cases}
\tag{1.10}
$$

组　分	O_2	N_2	No	O	N	e	No^+
h_i°			9.16×10^{11}	2.47×10^{12}	4.7×10^{12}		9.83×10^{12}

(1.11)

为方便计，把诸气动参量无量纲化，获得无量纲粘性方程组。上述诸式所引入的符号所代表的意义和无量纲因子见下表，几何参数见图 1。

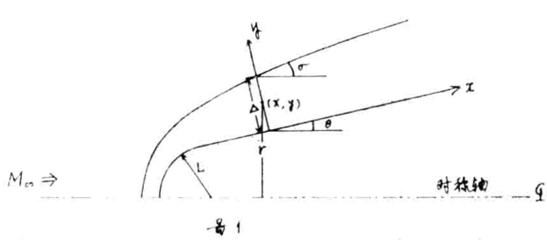

图　1

量　　纲	符　号	物　理　意　义	无量纲因子
cm/sec	u, v	分别为 x, y 方向速度分量	V_∞ 来流速度
cm	r	到对称轴的距离	L 球头半径
g/cm^3	ρ	密度	ρ_∞ 来流密度
$1/cm$	k	曲率	$1/L$ 球头曲率
dy^n/cm^2	p	压力	$\rho_\infty V_\infty^2$
$°k$	T	温度	$W_\infty V_\infty^2/R$
mol/g	C_i	i 组分克分子浓度 $= \dfrac{\rho_i}{\rho} \dfrac{1}{w_j}$	$1/W_\infty$
erg/mol	e_i	i 组分振动能	$W_\infty V_\infty^2$
$g/cm^2 sec$	μ	粘性系数	μ_∞
$cal/cm\cdot sec\cdot °k$	λ	热传导系数	λ_∞
$mol/cm^3\cdot scc$	ω_i	i 组分生成率	$\rho_\infty V_\infty/W_\infty L$
$erg/mol\cdot sec$	E_i	i 组分振动变化率	$W_\infty V_\infty^3/L$
$erg/mol\cdot °k$	R	气体普通常数	$=8.31\times10^7$
g/mol	W	平均分子量	W_∞
erg/mol	$h_i°$	i 组分生成焓	$W_\infty V_\infty^2$
$erg/mol\cdot °k$	C_{pi}	i 组分的定压比热	R
cm^2/sec	D	扩散系数	D_∞
erg/mol	h_i	i 组分的比焓	$W_\infty V_\infty^2$
弧　　度	θ	壁面的切向角	
弧　　度	σ	激波的切向角	
	M_∞	来流 mach 数	
	γ	比热比	
	M	Mach 数	$=\sqrt{\gamma p/\rho}$

同时，引入几个常数：

$P_r = C_p\mu/\lambda$　　　(Prandtl 数)

$S_c = \mu/\rho D$　　　(Schmidt 数)

$L_e = p_r/s_c = \rho D C_p/\lambda$　　　(Lewis 数)

$R_e = \rho V L/\mu$　　　(Reynolds 数)

无量纲形式的方程可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}[\rho v(1+ky)r] = 0 \qquad (1.1)^*$$

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + (1+ky)v\frac{\partial u}{\partial y} + kuv\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+ky)\tau_{xy})\right]+k\tau_{xy}+\frac{1}{r}\left[(\tau_{xx}-\tau_{\varphi\varphi})\frac{\partial r}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\left.+(1+ky)(\tau_{xy}\cdot\frac{\partial r}{\partial y})\right\}\right] \qquad (1.2)^*$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+(1+ky)\ v\frac{\partial v}{\partial y}-ku^2\right]=-(1+ky)\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R_e}\left\{\right.$$

$$(1+ky)\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy}+\frac{\partial}{\partial x}\ \tau_{xy}+k(\tau_{yy}-\tau_{xx})+\frac{1}{r}\left[\tau_{xy}\frac{\partial r}{\partial x}\right.$$

$$\left.\left.+(1+ky)\ (\tau_{yy}-\tau_{\varphi\varphi})\frac{\partial r}{\partial y}\right]\right\} \qquad (1.3)^*$$

$$C_p\rho\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=u\frac{\partial p}{\partial x}+(1+ky)v\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R_e}\left\{\right.$$

$$\tau_{xx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+kv\right)+\tau_{xy}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+(1+ky)\frac{\partial u}{\partial y}-uk\right]$$

$$\left.+(1+ky)\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}\left[u\frac{\partial r}{\partial x}+v(1+ky)\frac{\partial r}{\partial y}\right]\right\}+$$

$$+\frac{C_{p\infty}}{R_e p_r}\left\{(1+ky)\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{1+ky}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{1+ky}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-\frac{y}{1+ky}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\right]+(1+ky)\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{k}{1+ky}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{s_e{}^2R_e}\mu(1+ky)\sum_i\left(\frac{1}{(1+ky)^2}\frac{\partial C_i}{\partial x}\frac{\partial h'}{\partial x}+\frac{\partial C_i}{\partial y}\frac{\partial h_i}{\partial y}\right)$$

$$-(1+ky)\sum_i\omega_i h_i-(1+ky)\rho\sum_i C_iE_i \qquad (1.4)^*$$

$$\rho\left[u\frac{\partial C_i}{\partial x}+(1+ky)\ v\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]=(1+ky)\omega_i+$$

$$+\frac{1}{S_c{}^2R_e}\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r\mu}{1+ky}\frac{\partial C_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[r(1+ky)\mu\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]\right\} \qquad (1.5)^*$$

$$u\frac{\partial h_i}{\partial x}+(1+ky)\ v\frac{\partial h_i}{\partial y}=(1+ky)E_i \qquad (1.6)^*$$

$$p=\rho T/W \qquad (1.7)^*$$

在动量方程(1.2)—(1.3)中，考虑到粘性的影响；在能量方程(1.4)中，考虑到化学反应的影响，热传导的影响，粘性耗散的影响和组分扩散的影响；在组分方程(1.5)中，考虑到组分扩散的影响。

粘性系数μ，热导系数λ和p_r，L_e及热扩散系数D都应依赖于温度、密度和组分浓度，在一定的假设条件下，p_r和L_e基本可认为是常数，μ和λ近似的正比于温度T。

1.2 方程的简化

采用薄激波层的概念[1]，把粘性方程组加以简化，使它基本上包括两部分，全部的无粘流方程组所含诸项以及边界层方程组所含主要项。以期反映在较小的 R_e 和适当的 R_e 数时，无粘流场与边界层的相互作用，一次得到含有边界层的流场。在无量纲化的方程组基础上加以简化，得到下述简化方程组：

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r)+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(1+ky)r]=0 \tag{1.1}^*$$

x 动量方程

$$\frac{1}{R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left[-\rho v+\frac{\mu}{R_e}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{1+ky}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\rho u v k}{1+ky}+\frac{u}{R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu k}{1+yk}\right) \tag{1.2}^*$$

y 动量方程

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\left(\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\rho u^2 k}{1+ky}\right) \tag{1.3}^*$$

能量方程

$$\frac{C_{p\infty}}{R_e p_r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left[-\rho v C_p+\frac{C_{p\infty}\mu}{R_e p_r}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)\right]\cdot\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$=\frac{\rho u C_p}{1+ky}\frac{\partial T}{\partial x}+\left(-\frac{u}{1+ky}\frac{\partial p}{\partial x}-v\frac{\partial p}{\partial y}\right)-\frac{\mu}{R_e}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{2uk}{1+ky}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\Sigma\omega_i h_i+\rho\Sigma_i E_i C_i-\frac{\mu}{R_e S_c{}^2}\Sigma\frac{\partial C_i}{\partial y}\frac{\partial h_i}{\partial y} \tag{1.4}^*$$

组分方程

$$\frac{1}{R_e S_c{}^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial C_i}{\partial y}\right)+\left[-\rho v+\frac{\mu}{R_e S_c^2}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)\right]\frac{\partial C_i}{\partial y}$$

$$=\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial C_i}{\partial x}-\omega_i \tag{1.5}^*$$

振动方程

$$\frac{u}{1+ky}\frac{\partial e_i}{\partial x}+v\frac{\partial e_i}{\partial y}=E_i \tag{1.6}^*$$

状态方程

$$p=\rho T/W \tag{1.7}^*$$

其中 $\mu=(T/T_\infty)^{1/2}$ (1.8)*

$C_{p\infty}$ 是 C_p 在来流中的无量纲值，对于空气等于7/2。P_r 和 S_c 数取常数，例如 $P_r=0.71$，$S_c=0.5$。

为了数值求解的方便，对自变量进行座标变换，使激波到物面成为〔0,1〕区间，因此令：

$$\eta = y/\Delta(x) \quad , \qquad \xi = x$$

其中$\Delta(x)$是激波的厚度。这样求解区域是一矩形D:〔0,1;0,X〕。这样，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} - \eta\dfrac{\Delta'}{\Delta}\dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial}{\partial \eta} \quad , \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\Delta^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

变换后的方程是：

x动量方程

$$\frac{1}{R_e}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\left[-\rho v+\frac{\mu}{R_e}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\eta\Delta'\frac{\rho u}{1+ky}\right]\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$=\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\rho uvk}{1+ky}+\frac{1}{R_e}\frac{u}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu k}{1+ky}\right)+\frac{1}{1+ky}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}-\Delta'\frac{\eta}{\Delta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right) \qquad (1.12)$$

能量方程

$$\frac{C_{p\infty}}{R_e p_r}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\left[-C_p\rho v+\frac{C_{p\infty}\mu}{R_e P_r}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta\Delta'\frac{C_p\rho u}{1+ky}+\frac{1}{R_e S_c^2}\frac{\mu}{\Delta}\sum_i C_{pi}\frac{\partial C_i}{\partial\eta}\right]\frac{1}{\Delta}\frac{\partial T}{\partial\eta}$$

$$=\frac{\rho u C_p}{1+ky}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\left[\frac{u}{1+ky}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\left(v-\frac{u}{1+ky}\eta\Delta'\right)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right]+$$

$$+\sum_i\omega_i h_i+\rho\sum_i C_i E_i-\frac{\mu}{R_e}\left[\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2-\frac{2uk}{1+ky}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right] \qquad (1.13)$$

组分方程

$$\frac{1}{S_c^2 R_e}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{\partial C_i}{\partial\eta}\right)+\left[-\rho v+\frac{\mu}{S_c^2 R_e}\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta\Delta'\frac{\rho u}{1+ky}\right]\cdot\frac{1}{\Delta}\frac{\partial C_i}{\partial\eta}=\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial C_i}{\partial\xi}-\omega_i \qquad (1.14)$$

y动量方程

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial p}{\partial\eta}=-\frac{\rho u}{1+yk}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\left(\frac{\rho u}{1+ky}\eta\Delta'-\rho v\right)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\rho u^2 k}{1+ky} \qquad (1.15)$$

连续方程

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\rho v}{\partial\eta}+\rho v\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)=-\frac{\rho u}{r}\sin\theta-\frac{1}{1+ky}\left[\frac{\partial\rho u}{\partial\xi}\right.$$

$$-\eta\frac{\Delta'}{\Delta}\frac{\partial\rho u}{\partial\eta}\Big] \qquad (1.16)$$

振动方程

$$\left(\nu-\frac{u}{1+ky}\eta\Delta'\right)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial e_i}{\partial\eta}=E_i-\frac{u}{1+ky}\frac{\partial e_i}{\partial\xi} \qquad (1.17)$$

态状方程

$$P=\rho T/W \qquad (1.7)^*$$

方程(1.12)－(1.17)和(1.7)*是数值计算的出发方程。值得注意：(1.12)－(1.14)是二阶方程，(1.15)－(1.17)是一阶方程。

1.3 **边界条件**

对于一定的 R_e 数，可以认为粘性和热导只在物体壁面附近有显著影响，而在激波附近并不那么重要，因此，仍然认为激波是一个间断面，其前后满足*Ranking-Hugoniot* 条件。

对于冻结流和非平衡流，当 $\eta=1$ 时（即在激波上）有

$$u=V_t^*Cos(\sigma-\theta)+V_n^*Sin(\sigma-\theta) \qquad (1.18)$$

$$\nu=V_t^*Sin(\sigma-\theta)-V_n^*Cos(\sigma-\theta) \qquad (1.19)$$

另外

$$V_n^*=V_\infty Sin\sigma\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{M_\infty^2Sin^2\sigma}\right\} \qquad (1.20)$$

$$V_t^*=V_\infty Cos\sigma \qquad (1.21)$$

又

$$\rho=\rho_\infty\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{M_\infty^2Sin^2\sigma}\right\}^{-1} \qquad (1.22)$$

$$P=P_\infty\left\{\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_\infty Sin^2\sigma-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right\} \qquad (1.23)$$

$$C_i=C_{i\infty} \qquad (1.24)$$

$$e_i=e_{i\infty} \qquad (1.25)$$

对于平衡流的边界条件见1．4．4。

当 $\eta=0$ 时（即在物面上）

$$\begin{cases} u=0 & (1.26)\\ \nu=0 & (1.27)\end{cases}$$

$$\begin{cases} T=T_w \quad \text{(冷壁条件)} & (1.28)\\ \text{或}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w=0 \quad \text{或 (绝热条件)} & (1.29)\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_i=C_{iw} \quad \text{(催化条件)} & (1.30)\\ \text{或}\left(\frac{\partial C_i}{\partial y}\right)_w=0 \quad \text{(非催化条件)} & (1.31)\end{cases}$$

确定激波厚度 $\Delta(x)$ 的方法

$$(\rho v)_s = \frac{-1}{r_\Delta(1+k\Delta)} \int_0^{\Delta(x)} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) dy \tag{1.32}$$

或写成
$$\frac{r_\Delta^2}{2} = \int_0^{\Delta(x)} \rho u dy \tag{1.33}$$

这就是流量守恒的条件。

1.4 化学平衡与化学非平衡

1.4.1 化学非平衡

当来流的速度足够大时，激波层中的温度是相当高的，空气要发生化学反应，通常是氧分子首先离解，其次是氮分子的离解和与氧分子的化合等一系列反应，为了简便，又为实际需要所接受，只考虑七种组分：O_2、N_2、NO、O、N、e、NO^+，七个反应式：

(1) $O_2 + M \rightleftharpoons 2O + M$ (1.34)

(2) $N_2 + M \rightleftharpoons 2N + M$ (1.35)

(3) $NO + M \rightleftharpoons N + O + M$ (1.36)

(4) $N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$ (1.37)

(5) $NO + O \rightleftharpoons N + O_2$ (1.38)

(6) $N_2 + O_2 \rightleftharpoons 2NO$ (1.39)

(7) $N + O \rightleftharpoons NO^+ + e$ (1.40)

反应系数列表如下

k_{fi}（正向反应系数）	k_{ri}（反向反应系数	K（平衡常数）$= k_{fi}/k_{ri}$
$0.12\times10^{22}T^{-1.5}exp(-59400/T)$	$10^{18}T^{-1}$	$0.12\times10^{4}T^{-0.5}exp(-59400/T)$
$0.19\times10^{18}T^{-0.5}exp(-113260/T)$	$10^{16}T^{-0.5}$	$0.19\times10^{2}exp(-113260/T)$
$0.40\times10^{21}T^{-1.5}exp(-75490/T)$	$10^{20}T^{-1.5}$	$0.4\times10exp(-75490/T)$
$0.52725\times10^{14}exp(-37770/T)$	1.11×10^{13}	$0.475\times10exp(-37770/T)$
$1/3\times10^{10}Texp(-19210/T)$	$10^{12}T^{0.5}exp\times$ $\times$(—3120/T)	$1/3\times10^{-2}T^{0.5}exp(-16090/T)$
$0.684\times10^{27}T^{-3}exp(-65140/T)$	4.8×10^{23} $\times T^{-2.5}\times exp$ $(-43360/T)$	$0.142\times10^{4}T^{-0.5}\times$ $\times exp(-21780/T)$
$0.3\times10^{14}T^{-0.5}exp(-32500/T)$	$3\times10^{21}T^{-1.5}$	$10^{-8}Texp(-32500/T)$

其中M是第三碰撞体，对于不同M有不同的有效系数：

反应 \ 系数 M	O_2	N_2	NO	O	N	NO^+	e
1	3	1	1	$1.75\times10^{-3}T$	1	1	1
2	1	2.53	1	1	$2.26\times10^{5}T^{-1}$	1	1
3	1	1	20	20	20	1	1

第 i 个反应的生成率用 Q_i 表示

$$Q_1=[(\rho C_1)k_{f1}-(\rho C_4)^2k_{r1}]\left\{\sum_{i=2,3}^{5,6,7}(\rho C_i)+3(\rho C_1)+1.75\times10^3T\rho C_4\right\} \tag{1.41}$$

$$Q_2=[(\rho C_2)k_{f2}-(\rho C_5)^2k_{r2}]\left\{\sum_{i=1,3}^{4,6,7}(\rho C_i)+2.53(\rho C_2)+2.26\times10^5T^{-1}\rho C_5\right\} \tag{1.42}$$

$$Q_3=[(\rho C_3)k_{f3}-(\rho C_4)(\rho C_5)k_{r3}]\left\{\sum_{i=1,2}^{6,7}(\rho C_i)+20\sum_{i=3,4}^{5}(\rho C_i)\right\} \tag{1.43}$$

$$Q_4=(\rho C_2)(\rho C_4)k_{f4}-(\rho C_3)(\rho C_5)k_{r4} \tag{1.44}$$

$$Q_5=(\rho C_3)(\rho C_4)k_{f5}-(\rho C_1)(\rho C_5)k_{r5} \tag{1.45}$$

$$Q_6=(\rho C_1)(\rho C_2)k_{f6}-(\rho C_3)^2k_{r6} \tag{1.46}$$

$$Q_7=(\rho C_4)(\rho C_5)k_{f7}-(\rho C_7)^2k_{r7} \tag{1.47}$$

其中 C_1 到 C_7 分别对 O_2，N_2，NO，O，N，e 和 NO^+。

每种组分的生成率是

$$\omega_1=-Q_1+Q_5-Q_6 \tag{1.48}$$

$$\omega_2=-Q_2-Q_4-Q_6 \tag{1.49}$$

$$\omega_3=-Q_3-Q_5+Q_4+2Q_6 \tag{1.50}$$

$$\omega_4=2Q_1+Q_3-Q_4-Q_5-Q_7 \tag{1.51}$$

$$\omega_5=2Q_2+Q_3+Q_4+Q_5-Q_7 \tag{1.52}$$

$$\omega_6=\omega_7=Q_7 \tag{1.53}$$

这样计算出的 ω_i 用 $\rho_\infty V_\infty/W_\infty L$ 无量纲化，即可代入方程(1.14)和(1.13)中了。

1.4.2化学平衡

所谓化学平衡是指局部化学平衡，即对应给定的 P 和 T，C_i 和 ρ 是个定值，这时有八个未知量，它们满足：

$$C_1=\rho/K_1C_4^2 \tag{1.54}$$

$$C_2=\rho/K_2C_5^2 \tag{1.55}$$

$$C_3=\rho/K_3C_4C_5 \tag{1.56}$$

$$C_4C_5=\frac{1}{K_7}C_6^2 \tag{1.57}$$

在不考虑组分扩散的情况下，还有

$$2C_{1\infty}=2C_1+C_3+C_4+C_6 \tag{1.58}$$

$$2C_{2\infty}=2C_2+C_3+C_5+C_6 \tag{1.59}$$

还有 $$C_6=C_7 \tag{1.60}$$

利用状态方程(1.7)和(1.54)－(1.60)，可以用迭代法求出对给定的P、T相应的C_i和ρ。这样求出的值与A. C. Предводителев的著作〈ТаблынпТермодиламиzескиx Функции Вөздуха〉相比较，误差百分之几。

1.4.3振动松弛

对双原子分子O_2、N_2、NO当温度为T时，处于平衡态的振动能量表达式是

$$\overline{e}_i(T)=R\Theta_i\Big/exp\left(\frac{\Theta_i}{T}\right)-1 \tag{1.61}$$

在非平衡态时，振动松弛E_i表示为

$$E_i=(\overline{e}_i-e_i)/\tau_i \tag{1.62}$$

τ_i为振动松弛时间，具体数据如下：

$$\begin{cases}\Theta_{o2}=2274^\circ K\\ \Theta_{N2}=3396^\circ K\\ \Theta_{No}=2742^\circ K\end{cases} \tag{1.63}$$

$$\tau_{o2}^{-1}=7.23\times10^{16}\rho T^{1/6}exp(-218/T^{1/3})[1-exp(-2274/T)](3C_1+$$
$$+5C_4+C_2+C_3+C_5+C_6+C_7) \tag{1.64}$$

$$\tau_{N2}^{-1}=1.30\times10^{14}\rho T^{1/2}exp(-192/T^{1/3})[1-exp(-3396/T)](2.5C_2$$
$$+35C_5+C_1+C_3+C_4+C_6+C_7) \tag{1.65}$$

$$\tau_{No}^{-1}=1.27\times10^{14}\rho T^{1/6}exp(-84/T^{1/3})[1-exp(-2742/T)]\cdot$$
$$\cdot[0.05(C_1+C_2+C_6+C_7)+C_3+C_4+C_5] \tag{1.66}$$

1.4.4化学平衡态的激波关系式

对于平衡态，激波关系式不再象冻结流那样简单，它不仅依赖于$M_\infty Sin\sigma$，而且依赖于局部的压力和温度，即依赖于来流的热力学参数（如飞行高度的不同）。因此它是一个非线性的关系式：

$$V^*_n\rho^*-Sin\sigma=0 \tag{1.67}$$

$$\rho^*V_n^{*2}+P^*-\left(1\Big/(\gamma M_\infty^2)+Sin^2\sigma\right)=0 \tag{1.68}$$

$$\frac{1}{2}V^{*2}_n+h^*(T^*,P^*)-\left(\frac{1}{2}Sin^2\sigma+\frac{C_p}{\gamma M_\infty^2}\right)=0 \tag{1.69}$$

反应着质量、动量和能量守恒。γ为绝热指数，对空气$\gamma=1.4$，$C_p=7/2$。n表示垂直于激波的方向，$*$表示激波后的值。(1.67)－(1.69)是无量纲形式。同时

$$h^*(T^*,P^*)=\sum_{i=1}^{7}C_i^*h_i^*=\sum_i C_i^*(P^*,T^*)(C_{pi}T^*+\overline{e}_i(T^*)+h_i^0) \tag{1.70}$$

由此可见，(1.67)－(1.70)和(1.7)，(1.54)－(1.60)联立求解C_i^*、P^*、T^*、V^*、σ等量。

附带说明一下化学平衡时的能量方程中的一些项应如何正确理解。当状态处于平衡时，$\omega_i = 0$，$E_i = 0$。但是反映在能量方程中的

$\sum\limits_i \omega_i h_i + \rho \Sigma C_i E_i$ 并不等于零，而是等于：

$$\rho \sum_i h_i \left(\frac{u}{1+ky} \frac{\partial C_i}{\partial x} + \nu \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \rho \sum_i C_i \left(\frac{u}{1+ky} \frac{\partial e_i}{\partial x} + \nu \frac{\partial e_i}{\partial y} \right) \qquad (1.71)$$

§2 数 值 方 法

根据对方程组性质的初步分析，以整体求解具有较大范围亚音区的头部流场为宜。就我们所用的计算方法而言，不管包含有多么大的流场，总还有亚音层被划在外面，当然它是很薄的一层，在一定条件下，可以认为这薄薄的一层亚音区，对解的影响不算太大了。

2.1 直线法近似

要求解的区域是曲边四边形 $ABCD$，流场的性质为图 2 所示。在座标变换后，它对应矩形 $ABCD$，$\xi \in [0, X]$，$\eta \in [0, 1]$。

把 $[O, X]$ 分成几个条带，例如分个成两条带，即 $\xi_0 = O$，$\xi_1 = X/2$，$\xi_2 = X$，把流体

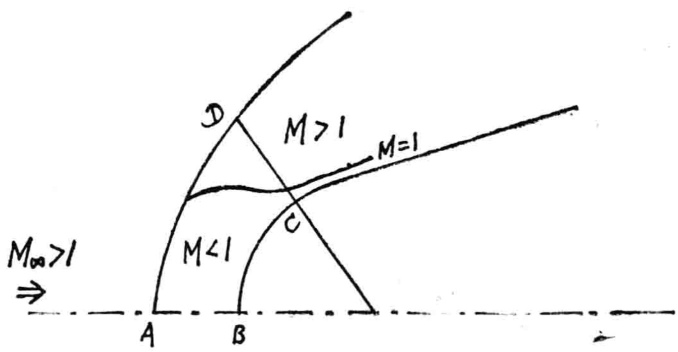

图 2

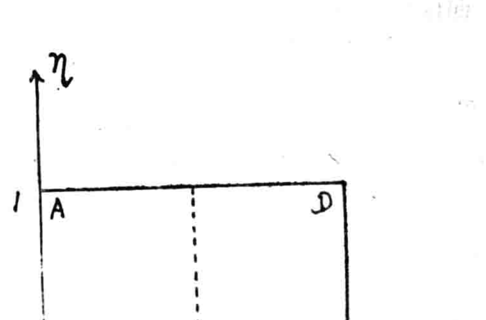

图 3

参量（u、ν、T、P、C_i、e_i）和激波脱体距离$\Delta(\xi)$，按ξ发展成幂级数，利用到与对称轴对称或反对称的性质，可以分别写成

$$u=u_1(\eta)\xi+u_3(\eta)\xi^3+u_5(\eta)\xi^5+\cdots\cdots \tag{2.1}$$

$$\nu=\nu_o(\eta)+\nu_2(\eta)\xi^2+\nu_4(\eta)\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.2}$$

$$T=T_o(\eta)+T_2(\eta)\xi^2+T_4(\eta)\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.3}$$

$$P=P_o(\eta)+P_2(\eta)\xi^2+P_4(\eta)\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.4}$$

$$C_i=C_{io}(\eta)+C_{i2}(\eta)\xi^2+C_{i4}(\eta)\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.5}$$

$$e_i=e_{io}(\eta)+e_{i2}(\eta)\xi^2+e_{i4}(n)\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.6}$$

$$\Delta=\Delta_o+\Delta_2\xi^2+\Delta_4\xi^4+\cdots\cdots \tag{2.7}$$

把它们分别代入方程组(1.12)－(1.17)中去，就可以把$\partial/\partial x$的项化成多项式。把这组方程分别对ξ_o、ξ_1、ξ_2取值，就得到一系列的常微分方程组。我们仍以两条带为例，即在三条线上分别列出常微分方程组来

$\xi=0$（对称轴上）

$$\frac{1}{R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{du_1}{d\eta}\right)+\left(-\rho\nu+\frac{\mu}{R_{e\infty}}\frac{2k}{1+ky}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{du_1}{d\eta}-\frac{\rho u_1}{1+ky}u_1$$
$$=\frac{\rho\nu u_1k}{1+ky}+\frac{u_1}{R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu k}{1+ky}\right)+\frac{1}{1+ky}\left[2p_2-\eta\frac{2\Delta_2}{\Delta}\frac{dp_o}{d\eta}\right] \tag{2.8}$$

$$\frac{C_{p\infty}}{P_{r\infty}R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{dT_o}{d\eta}\right)+\left(-\rho\nu C_p+\frac{C_{p\infty}\mu}{P_{r\infty}R_{e\infty}}\frac{2k}{1+ky}+\frac{\mu}{R_{e\infty}S^2_{c\infty}}\sum_i C_{pi}\right.$$
$$\left.\frac{1}{\Delta}\frac{dC_{io}}{d\eta}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{dT_o}{d\eta}=-\frac{\nu}{\Delta}\frac{dp_o}{d\eta}+\sum_i\omega_ih_i+\rho\sum_i C_iE_i-\frac{4}{3}\frac{\mu}{R_{e\infty}}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2 \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{S^2_{c\infty}R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{dC_{io}}{d\eta}\right)+\left(-\rho\nu+\frac{\mu}{S^2_cR_{e\infty}}\frac{2k}{1+ky}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{dC_{io}}{d\eta}=-\omega_i \tag{2.10}$$

其中P_2和Δ_2分别是P和Δ展开式中ξ^2项的系数，它们可以用ξ_i上的P和Δ值确定，此时

$$P_2=\frac{1}{3}\frac{1}{X^2}[-15P_o+16P(\xi_1)-P(\xi_2)] \tag{2.11}$$

$$\Delta_2=\frac{1}{3}\frac{1}{X^2}[-15\Delta_o+16\Delta(\xi_1)-\Delta(\xi_2)] \tag{2.12}$$

还有

$$\frac{1}{\Delta}\frac{dP_o}{d\eta}=-(\rho\nu)_0\frac{1}{\Delta}\frac{d\nu_o}{d\eta} \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d(\rho\nu)_o}{d\eta}=-\frac{2k}{1+ky}(\rho\nu)_o+\frac{2}{1+ky}\rho_ou_1 \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{de_{io}}{d\eta}=E_i/\nu_o \tag{2.15}$$

$$P_o=\rho_oT_o/w_o \tag{2.16}$$

为了解(2.8)，需要给出u_1在激波上的值，u_1满足下式：

$$u_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=1-\frac{2\Delta_2}{1+\Delta_0 k}\left(1-\frac{1}{\rho^*}\right) \tag{2.17}$$

ρ^*为激波后的密度。此式对于冻结、非平衡、平衡状态都正确。

从(2.8)－(2.17)不难看出，驻点线上的气动参数分布强烈地依赖着下游流动，只有在某些近似下，才能独立地求解驻点线流动规律。

$\xi=\xi_1$或ξ_2（非对称轴上）

这时的方程具有形式上的相同性，即

$$\frac{1}{R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{du}{d\eta}\right)+\left[-\rho\nu+\frac{\mu}{R_{e\infty}}\left(\frac{Cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\eta\frac{\rho u}{1+ky}\Delta'\right]\frac{1}{\Delta}\frac{du}{d\eta}$$

$$=\frac{\rho u}{1+ky}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{\rho u\nu k}{1+ky}+\frac{u}{R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu k}{1+ky}\right)$$

$$+\frac{1}{1+ky}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}-\eta\frac{\Delta'}{\Delta}\frac{dP}{d\eta}\right) \tag{2.18}$$

$$\frac{C_{p\infty}}{R_{e\infty}p_{r\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{dT}{d\eta}\right)+\left[-\rho\nu C_p+\frac{C_{p\infty}\mu}{R_{e\infty}p_{r\infty}}\left(\frac{Cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\eta\frac{\rho u C_p}{1+ky}\Delta'\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{S_{c\infty}^2R_{e\infty}}\sum_i C_{pi}\frac{1}{\Delta}\frac{dC_i}{d\eta}\right]\frac{1}{\Delta}\frac{dT}{d\eta}=\frac{\rho u C_p}{1+ky}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)-\left[\frac{u}{1+ky}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\right.$$

$$\left.+\left(\nu-\eta\frac{u\Delta'}{1+ky}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right]+\sum_i\omega_i h_i+\rho\sum_i C_iE_i-\frac{\mu}{R_{e\infty}}\left[\left(\frac{1}{\Delta}\frac{du}{d\eta}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2uk}{1+ky}\frac{1}{\Delta}\frac{du}{d\eta}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{dv}{d\eta}\right)^2\right] \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{S_c^2R_{e\infty}}\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\mu}{\Delta}\frac{dC_i}{d\eta}\right)+\left[-\rho\nu+\frac{\mu}{S_cR_{e\infty}}\left(\frac{Cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta\frac{\rho u}{1+ky}\Delta'\right]\frac{1}{\Delta}\frac{dC_i}{d\eta}=\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial C_i}{\partial\xi}-\omega_i \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{dp}{d\eta}=\left(-\rho\nu+\eta\frac{\rho u}{1+ky}\Delta'\right)\frac{1}{\Delta}\frac{dv}{d\eta}-\frac{\rho u}{1+ky}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\rho u^2k}{1+ky} \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\rho v}{d\eta}=-\rho\nu\left(\frac{Cos\theta}{r}+\frac{k}{1+ky}\right)-\frac{\rho u}{r}Sin\theta+\frac{\eta}{1+ky}\frac{\Delta'}{\Delta}\frac{d\rho u}{d\eta}$$

$$-\frac{1}{1+ky}\left[u\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+\rho\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] \tag{2.22}$$

$$\left(\nu-\eta\frac{u}{1+ky}\Delta'\right)\frac{1}{\Delta}\frac{de_i}{d\eta}=E_i-\frac{u}{1+ky}\left(\frac{\partial e_i}{\partial\xi}\right) \tag{2.23}$$

$$P=\rho T/w \tag{2.24}$$

其中，对于偶函数g（包括v、T、P、C_i、e_i和Δ）有