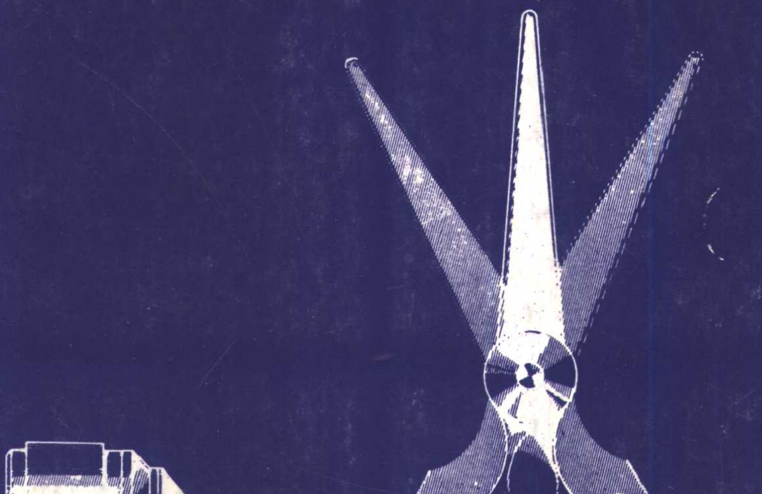
機械振動學演習



.1

機械振動學演習

江苏工业学院图书馆
藏书章

符　號

A＝常數，斷面積。

B＝常數。

C＝電容器容量，曲軸之廻轉力。

D＝常數。

E＝週期性起電力，楊氏係數。

F＝固體摩擦力，散逸函數。

G＝橫彈性係數。

H＝角動量。

I＝慣性矩。

J＝斷面慣性矩。

K＝彈簧常數，體積彈性係數。

L＝電感量（INDUCTANCE）。　運動電位。

M＝週期性力矩。標準質量。

N＝整數。

P＝外力。

Q＝電荷。一般力。

R＝阻力。　電阻。　質量比。

S＝彈簧恢復力。

T＝週期。　動能。　絃張力。

U＝位能。

V＝相對速度。　體積。

W＝功。　一週期內之功。

X = 力之x方向分力。

Y = y 方向之分力。　倍率。　標準函數。

Z = z 方向之分力。

a = 振幅。　波動速度。　馬氏方程式中之特性值。

b = 常數。

c = 粘性阻尼係數。

c_c = 臨界阻尼係數。

d = 常數。

e = 自然對數。

f = 頻率。　漩渦（ WHIRLING ）速率。

g = 重力加速度。

i = 電流。　任意整數。

j = $\sqrt{-1}$。（其下有小字時，表示任意整數。）

k = 彈簧常數。（其下有小字母時，表示任意整數。）

l = 長度。　連桿長度。

m = 質量。　慣性係數。

n = 整數。

$2n$ = 單位質量之粘性阻尼係數。

p = 壓力。　艾比沙運算符號 (HEAVISIDE'S OPERATOR)

q = 自由圓頻率，　普通座標。作用在單位質量之外力振幅。

$2q$ = 變化彈簧常數之振幅。

r = 曲軸半徑。　回轉軸之運動半徑。（其下有小字母時，表示任意整數。）

s = 複素數頻率，拉普拉斯變換之運算符號（ LAPLACE TRANSFORMATION OPERATOR)

t = 時間。

u = 活塞速度。棒之縱向變位。

v = 速度。

w = 分佈載荷。

x = 從平衡位置起之位移。 直角座標。

x_{st} = 由靜載荷引起之靜撓度。

y = 直角座標。 弦及樑之橫向變位。

z = 直角座標。

α = 相位。活塞加速度。 複素數頻率之實數部。

β = 相位。 複素數頻率之虛數部份。

γ = 阻尼係數比。

δ = 撓度。 對數減縮。 外力與變位之相位差。

Σ = 微量。 軸之偏心。

k = 整數。 斷熱指數。

λ = 强迫頻率比。

μ = 小變數。

ν = 固有頻率比。

ρ = 密度。 廻轉半徑。

ρ_1 = 線密度。

τ = 時間。

θ = 角變位，廻轉角， 曲柄軸角度。

φ = 角變位， 連桿之傾角， 漩渦運動之角度。

ϕ = 角變位。 回轉角。

ω = 外力之圓頻率。 廻轉角速度。

ω_0 = 固有圓頻率。

Ω = 角速度。 圓頻率。

Θ = 連桿之修正力偶。

ξ = 標準座標。 小變位。 直角座標。

η = 直角座標。 小變位。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　錄

第一章　一自由度系之振動

1-1　一彈簧其平均直徑 $D=40$ (mm), 彈簧線直徑 $d=4$ (mm), 有効卷數 $N=10$, 材料的縱彈性係數 $E=2.1\times10^4$ (kg/mm²), 橫彈性係數 $G=8\times10^3$ (kg/mm²), 求下列各情況之彈簧常數

(a) 伸長及壓縮時。

(b) 受扭力時。

(c) 受彎曲時。

解：(a) 從作者之機械力學第 7 頁, 第 1-1 表之 No.1 得:

$$k=\frac{Gd^4}{8ND^3}=\frac{8\times10^3\times4^4}{8\times10\times(40)^3}=0.4\ (\mathrm{kg/mm})。$$

(b) 同上之 No.7 公式得:

$$k=\frac{Ed^4}{64ND}=\frac{2.1\times10^4\times4^4}{64\times10\times40}=210\ (\mathrm{kg\cdot mm/rad})。$$

(c) 同上表之 No.8 公式得:

$$k=\frac{Ed^4}{32ND}\cdot\frac{1}{1+E/(2G)}$$

$$=\frac{2.1\times10^4\times4^4}{32\times10\times40}\times\frac{1}{1+\dfrac{2.1\times10^4}{2\times8\times10^3}}$$

$$=181.6\ (\mathrm{kg\cdot mm/rad})$$

1-2　一物體放在一水平台上, 該台作上下單振動, 振動頻率爲 5 (cps), 今欲該物體不跳離水平台, 則振幅須在於何種條件以下?

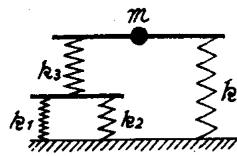
解：因振動之最大加速度 $(\ddot{x})_{max}$ 若大於重力加速度 g 時, 向下運動時, 物體會離開台子, 故所求條件爲:

$$(\ddot{x})_{max}\leqq g$$

則　$(\ddot{x})_{max} = a\omega^2 = a \times (5 \times 2\pi)^2 = 100\pi^2 a$

$$\therefore \quad a \leqq \frac{g}{100\pi^2} = 9.93\,(\mathrm{mm})$$

1-3 第1-1圖中，質量m作上下振動，求其振動頻率。此時質量m置於彈簧k_3及k_4之中央，而彈簧k_3在彈簧k_1及k_2之央央。此質量m因受限制只作上下振動。棒雖能自由迴轉，但質量及慣性矩可以忽略。



第1-1圖

解：設加一力P於質量m。則彈簧k_1，k_2，k_3，k_4之撓度為δ_1，δ_2，δ_3，δ_4，設質量m之降下位移為δ，合成彈簧常數為k，可得下列六式子:

由於力之平衡得:

$$\begin{cases} k_1\delta_1 + k_2\delta_2 = k_3\delta_3 \\ k_3\delta_3 + k_4\delta_4 = P \end{cases}$$

由於力矩之平衡條件得:

$$\begin{cases} k_1\delta_1 = k_2\delta_2 \\ k_3\delta_3 = k_4\delta_4 \end{cases}$$

而　$k = P/\delta$

$$\delta = \frac{\left(\dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \delta_3\right) + \delta_4}{2}$$

由前四式得:

$$\delta_1 = \frac{P}{4k_1}, \quad \delta_2 = \frac{P}{4k_2}, \quad \delta_3 = \frac{P}{2k_3}, \quad \delta_4 = \frac{P}{2k_4}\ 。$$

以之代入第六式得:

$$\delta=\frac{P}{4}\left(\frac{1}{4k_1}+\frac{1}{4k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}\right)$$

從第五式得:

$$k=\frac{4}{\frac{1}{4k_1}+\frac{1}{4k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}}$$

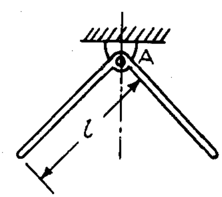
則此系自由振動時之微分方程式爲:

$$m\ddot{x}+kx=0$$

其固有圓振動頻率爲:

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}=\frac{4}{m\left(\frac{1}{4k_1}+\frac{1}{4k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}\right)}$$

1-4 一均匀棒，全長$2l$，質量$2m$，中央彎成90度，如圖1-2所示，在A點以一水平軸支住，求微小振動時之固有頻率。



第1-2圖

解：設此系有一旋轉角θ，則運動方程式爲:

$$I\ddot{\theta}=-mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

對A軸之慣性矩I，因棒極細時$I=2ml^2/3$，則上式爲:

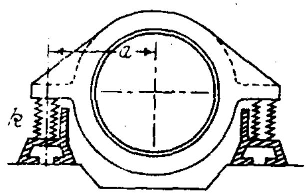
$$\frac{2ml^2}{3}\ddot{\theta}=-\frac{mgl}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

若振動微小時 $\sin\doteqdot\theta$，上式成:

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2\sqrt{2}l}\theta=0$$

則 $$\omega_0^2=\frac{3g}{2\sqrt{2}l}$$

1-5 求圖 1-3 中，發電機固定子之固有振動頻率，但彈簧之常數皆爲 k，固定子中心到各彈簧之平均距離 a，固定子之慣性矩 I。

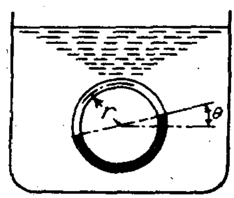


第 1-3 圖

解： 振動微小時，固定子之旋轉角爲 θ，而彈簧之位移爲 $a\theta$，由於彈簧之力矩爲 $(4ka\theta)a$，則運動方程式爲：$I\ddot{\theta}+4ka^2\theta=0$

$$\therefore\quad \omega_0^2=\frac{4ka^2}{I}$$

1-6 第 1-4 圖示一圓環其平均半徑爲 r，放在水中。該圓環細管斷面一定。當管內水作微小振動時，求其固有頻率。



第 1-4 圖

解： 對於通過圓環中心，在紙面內之垂直軸，管內水之慣性矩爲 I，

則 $I=A\pi r^3\gamma/g$

此處 $\gamma=$ 水之比重，

$A=$ 細管斷面積

假設 θ 爲水迴轉角，

則其轉矩爲 $-2r^2A\gamma\theta$、得其運動方程式如下：

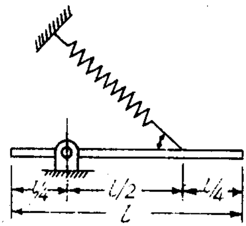
$$I\ddot{\theta}+2r^2A\gamma\theta=0$$

$$\therefore \quad \omega_0^2 = \frac{2r^2A\gamma}{I} = \frac{2g}{\pi\gamma}$$

1-7　長度l，重量W之一均匀棒，如第1-5圖所示，在距其一端$\frac{l}{4}$處銷住。距他端$\frac{l}{4}$處，以一傾斜45°之彈簧吊住。

(a)計算其固有頻率

(b)將棒豎立使與(a)情況成90°時，求其頻率。



第1-5圖

解：(a)設旋轉角θ極小時。棒以θ角旋轉時，彈簧之變位為：$\frac{l\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4}$，則彈簧之恢復力為：$k\frac{l\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4}$，從平衡位置作基準，當棒自重之力矩與彈簧力矩相等時，其運動方程式為：

$$I\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{8}\theta = 0$$

此處I＝棒對於支點之慣性矩。若棒之直徑甚小，則

$$I = \frac{7Wl^2}{48g}$$

故

$$\omega_0^2 = \frac{kl^2/8}{I} = \frac{6kg}{7W}。$$

(b)當棒以θ角迴轉時，彈簧恢復力矩與前相同，為：$kl^2\theta/8$，棒自重之力矩為$\frac{Wl\theta}{4}$，則其運動方程式為：

$$I\ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{8} + \frac{Wl}{4}\right)\theta = 0$$

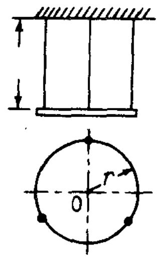
试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\therefore\ \omega_0^2=\frac{(\frac{kl^2}{8})+(\frac{\overline{W}l}{4})}{I}=\frac{6g}{7}(\frac{k}{W}+\frac{2}{l})$$

1-8 一質量m，半徑r之剛體圓板，如第1-6圖所示，以三條細線繫於天花板上，三線之長爲l。恰好三等分此圓板之圓周。

（a）使圓板對其垂直中心線作迴轉，求其頻率。

（b）使圓板僅作橫向水平振動。（不迴轉），求頻率。



第1-6圖

解：（a）圓板靜止時，各線之張力爲T_0，$T_0=\frac{mg}{3}$，當圓板在水平面內之轉動角爲θ時，各線與其鉛直線成φ角，其張力爲T。則$T=T_0/\cos\varphi$，因$T\fallingdotseq T_0$。T之水平方向分力爲H，則$H=T\sin\varphi\fallingdotseq T_0 r\theta/l$。$H$對於中心O點之轉矩爲：

$$Hr=T_0r^2\theta/l$$

三線之總恢復力矩爲：$3T_0\frac{r^2\theta}{l}=mgr^2\theta/l$

圓板之運動方程式爲：

$$I\ddot{\theta}+(mgr^2/l)\theta=0$$

以$I=\frac{mr^2}{2}$代入則所求固有圓周頻率：

$$\omega_0^2=\frac{mgr^2}{Il}=\frac{2g}{l}$$

（b）設細線對於鉛直線之角變位爲θ，其運動方程式爲：

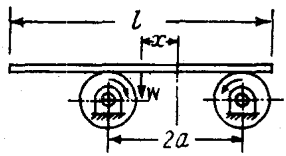
$$ml\ddot{\theta}+3T\sin\theta=0$$

但 $T\fallingdotseq T_0=\frac{mg}{3}$，$\theta\ll 1$，上式變爲：

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{l}\right)\theta=0$$

$$\therefore\quad \omega_0^2=\frac{g}{l}$$

1-9 圖1-7示二個滾子，以等速ω作相反方向轉動，兩滾子之距離爲$2a$，其上放置一重量爲W，長度爲l之棒，棒與滾子之間有固體摩擦力，棒作調和振動。求棒之固有頻率，並由週期T導出固體摩擦係數μ之計算式。



第1-7圖

解： 若棒從中央位置，有x的位移。則兩滾子上之壓力各爲：　$W(a+x)/2a$　；　$W(a-x)/2a$

當棒回復到中央位置時，滾子與棒之間有如下之摩擦力差：$\mu W\left(\dfrac{a+x}{2a}\right)-\mu W\left(\dfrac{a-x}{2a}\right)=\dfrac{\mu W}{a}x$

則棒之運動方程式如下：

$$(W/g)\ddot{x}+\frac{\mu W x}{a}=0$$

固有圓周頻率爲：

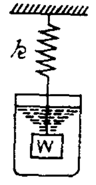
$$\omega_0=\sqrt{\frac{\mu g}{a}}$$

又當振動週期T已測定時，摩擦係數可由下式算出：

$$\mu=\frac{4\pi^2 a}{gT^2}$$

1-10 一重爲W之薄板，以彈簧k吊於空中使振動，測定其週期爲

τ_1。然後，使該板完全浸於液體中。振動週期測定爲τ_2。（如第1-8圖）。免計空氣阻力。液體之阻力爲 $2Sfv$（但 $2S$ 爲板之兩面面積，f 爲摩擦係數，v 爲速度。）。由上測定結果，求 f。



第1-8圖

解： 在空氣中時，振動方程式爲：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}+kx=0,$$

由此：$\tau_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{W/kg}$ ………(1)

在液體中，振動方程式爲：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}+2Sf\dot{x}+kx=0$$

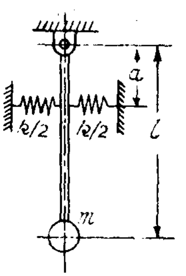
由此：$\tau_2=\dfrac{2\pi}{\omega_2}=2\pi/\sqrt{(kg/W)-(Sfg/W)^2}$ ………(2)

但因　$k>S^2f^2g/W$

從(1)(2)兩式得：

$$f=\frac{\sqrt{Wk/g}}{S}\sqrt{1-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2}$$

1-11 一無重量的棒，其長爲 l，在其下端有一質量爲 m 之擺，在距離其上端爲 a 之處，有二個彈簧 $k/2$ 繫之。當振幅極小時求其固有頻率。（第1-9圖）



第1-9圖

解：設擺之振動爲：

$$\theta=\theta_0\sin\omega_0 t$$

質量 m 之最大動能爲：

$$T_{max}=m(l\omega_0\theta_0{}^2)^2/2$$

此系之位能包括質量 m 上下運動及彈簧位能：

$$U_{max}=mgl(1-\cos\theta_0)+kx_0^2/2$$

振動微小時：$x_0=a\theta_0$，$1-\cos\theta_0=\dfrac{\theta_0^2}{2}$。

則：$U_{max}=(mgl+ka^2)\theta_0^2/2$

由公式：$T_{max}=U_{max}$

得：$$\omega_0^2=\frac{ka^2}{ml^2}+\frac{g}{l}$$

1-12 將上題之擺，倒立。

（a）求固有頻率。

（b）當此系之平衡爲安定時，求 a，m，l 之關係。

解：（a）當質量在平衡位置時，其位能最大。此題最大位能與前題相反。

$$U_{max}=(-mgl+ka^2)\theta_0^2/2$$

最大動能與前題相同。由下關係式：

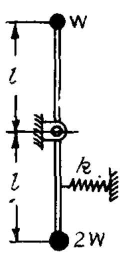
$$T_{max}=U_{max}$$

得：$$\omega_0^2=\frac{ka^2}{ml^2}-\frac{g}{l}$$

（b）對於上式，彈簧弱時，即 k 微小時，ω_0^2 爲負值則擺不能成立，故限於 ω_0^2 爲正。

$$\therefore\quad a^2>\frac{mgl}{k}$$

1-13 圖1-10示一無重量之棒，在中央以銷釘住，其長 $2l$，棒上端，下端分別以一重量 W, $2W$ 繫住。在銷釘及下端重量之中央，以一彈簧 k 繫住。求鉛直面內之固有頻率。



第1-10圖

解：設其振動爲 $\theta=\theta_0\sin\omega_0 t$

$$則T_{max}=\frac{W}{2g}(l\theta_0\omega_0)^2+\frac{2W}{2g}(l\theta_0\omega_0)^2=\frac{3W}{2g}(l\theta_0\omega_0)^2$$

$$U_{max}=\frac{k}{2}(l\theta_0^2/2)^2$$

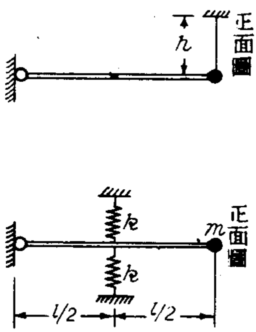
$$+2W(1-\cos\theta_0)-Wl(1-\cos\theta_0)$$

$$\doteqdot \frac{k}{2}\left(\frac{l\theta_0}{2}\right)^2+Wl\frac{\theta_0^2}{2}$$

因 $T_{max}=U_{max}$

$$\therefore\quad \omega_0^2=\frac{g}{3}\left(\frac{k}{4W}+\frac{1}{l}\right)$$

1-14 一無重量之棒，長爲 l。一端以質量 m 繫之。如圖1-11所示，此棒一端裝在壁，可自由旋轉。棒之中央，以二個彈簧 k 水平支住。質量 m 以一長爲 h 之細絲吊之。水平位置平衡。求自由振動之頻率。



第1-11圖

解： 質量 m 在鉛直面內之角移爲 θ，水平面內之角移爲 φ，調和振動爲

$$\theta=\theta_0\sin\omega_0 t$$

因 $\varphi=\dfrac{\theta h}{l}$，

彈簧之最大撓度 $h\theta_0/2$。則最大位能爲：

$$U_{max}=mgh\cdot\frac{\theta_0^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(2k)\cdot\left(\frac{h\theta_0}{2}\right)^2$$

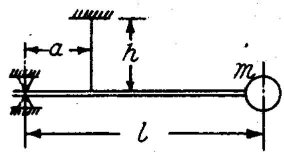
$$=\left(mgh+\frac{kh^2}{2}\right)\frac{\theta_0^2}{2}$$

最大動能爲 $T_{max}=\dfrac{1}{2}m(h\theta_0\omega_0)^2$

因 $T_{max}=U_{max}$

得：　　$\omega_0^2 = \dfrac{g}{h} + \dfrac{k}{2m}$

1-15 一棒長為 l（重量免計），一端帶一重量 m，他端以一銷支柱距銷支 a 之處有一細絲，其長為 h，吊住該棒。若將棒水平移動，使作細微振動。求其固有頻率，（如圖1-12所示。）



第1-12圖

解：因細絲與棒之交點作單擺運動，而質量 m 之運動為其 $/a$ 倍。當振幅微小時，知：

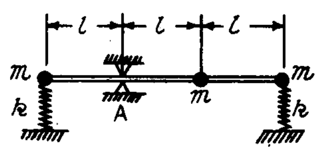
$$U_{max} = mgh(1-\cos\theta)\frac{l}{a} \doteqdot mgh\frac{l\theta_0^2}{2a}$$

最大速度為 $h\omega_0\theta_0 l/a$，則最大動能為：

$$T_{max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2}{a^2}\cdot m h^2\omega_0^2\cdot\theta_0^2$$

$$\therefore\quad \omega_0 = \sqrt{ag/lh}$$

1-16 圖1-13示一長為 $3l$，而無重量之棒，以三個相等質量 m 繫住。而在A點為一銷支。兩端以彈簧 k 支持使之水平，求水平面內微小振動之固有頻率。



第1-13圖

解：設其微小迴轉振動為：$\theta = \theta_0\sin\omega_0 t$

該系之最大動能為：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com