

水 声 换 能 器

(講 义)

下 册

周 福 洪 郑 士 傑 編

1962年9月

下 册 目 录

第五章 压电与电致伸缩式换能器

引言：压电与电致伸缩式换能器的实际应用及有关知识	1
*§ 5—1 晶体的电学特性	4
§ 5—2 晶体的弹性特性	9
(一) 广义虎克定律	9
** (二) 各向异性晶体在完全不对称情况下，独立弹性系数的个数	10
** (三) 具有一定对称性的晶体的独立弹性系数的个数	13
§ 5—3 压电效应	18
(一) 正向压电效应及其表示式	19
(二) 反向压电效应及其表示式	20
(三) 二级压电效应	23
* (四) 当晶体同时受电场与外力作用时的压电关系式	25
*§ 5—4 铁电晶体的电致伸缩效应	26
(一) 铁电晶体的特性	26
** (二) 钛酸钡晶体形成自发电极化的机理	27
(三) **电畴的自发极化与晶体电致伸缩系数的关系； *多晶钛酸钡在极化后所产生的线性压电效应	29
** (四) 钛酸钡陶瓷体电致伸缩效应的唯象性理论	29
** (五) 体积电致伸缩对晶体介电性能的影响	31
§ 5—5 晶体振动特性及晶体特性参数的测量	32
(一) 无损耗的压电晶体片的长度振动特性	32
(二) 在有机械损耗情况下的晶体片的长度振动特性	36
(三) 在有小机械阻情况下，测量晶体特性参数的方法	38
** (四) 在有天机械阻情况下，测量晶体特性参数的方法	44
§ 5—6 长度振动的压电晶体片形换能器的理论	46
* (一) 酒石酸钾钠的压电特性	47
* (二) 长度振动的压电晶体片，发射时的等效机械图	50
(三) 发射器的性能指标	53
(四) 发射器的等效电路图	54
(五) 接收状态的工作特性	57
§ 5—7 厚度振动的压电晶体片形换能器的理论	62
(一) 压电方程式	
(二) 等效机电图	
(三) 发射器的特性	
** (四) 无盖板的厚度振动器发射时的性能分析	
(五) 厚度振动的接收器	
§ 5—8 低频圆柱接收器的静态理论	
* (一) 轴对称情况下的应力平衡方程式及其解	

DU 27/109

I

(二) 圆柱形接收器的低频接收灵敏度 80

§ 5—9 压电陶瓷的薄壳圆柱形换能器的动态理论 85

 (一) 圆柱薄壳振动的一般关系式 85

 (二) 轴向极化下的压电关系式 86

 (三) 短圆柱的等效电路图和发射性能指标 88

 (四) 轴向自由状态的短圆柱, 迭加后的接收灵敏度 92

** (五) 薄圆环胶合在一起时的振动特性 92

** (六) 径向极化的薄圆环迭加后的振动特性 93

§ 5—10 低频薄壳球形接收器的静态理论 98

 * (一) 应力平衡方程式 98

 (二) 径向极化情况下的接收灵敏度 99

§ 5—11 极薄球壳振动器的动态分析 100

 * (一) 压电方程式 100

 * (二) 发射性能指标 102

§ 5—12 换能器灵敏度的绝对校准——互易法 103

 (一) 声学四端网络方程式和换能器机电四端网络方程式 104

 (二) 换能器的发射灵敏度和接收灵敏度的关系式 105

 (三) 互易法校准的步骤 107

** (四) 用比较法测量接收换能器的灵敏度 109

§ 5—13 压电换能器的效率 110

§ 5—14 各类压电晶体特性的比较 112

 (一) 对谐振式发射器 112

 (二) 对谐振式接收器 114

 (三) 对宽带压电接收器 115

§ 5—15 钛酸钡片形振动器的计算举例 116

第六章 换能器液态谐振腔的阻抗分析

§ 6—1 液态矩形腔的阻抗分析 120

§ 6—2 液态圆柱腔的阻抗分析 125

§ 6—3 对称径向振动的液态球腔的阻抗分析 130

第七章 水声换能器的方向特性和特殊方向系统

§ 7—1 基阵的方向特性 131

** (一) 描写换能器的方向特性的几个物理量 133

 (二) 均匀直线形基阵的方向特性 135

 (三) 椭圆形基阵的方向特性 145

§ 7—2 连续系统的方向特性 154

 * (一) 线形连续系统的方向特性 154

 (二) 片形连续系统的方向性 161

 * (三) 曲面连续系统的方向特性 168

§ 7—3 复合系统的方向特性 173

 (一) 均匀直线点源基阵的复合系统 174

- * (二) 长方片組成的均匀直綫形基陣 179
- * (三) 园柱管組成的园形基陣 180
- § 7-4 改善換能器系統方向特性的措施 183
 - (一) 採用复合系統 183
 - * (二) 採用工作面是非均匀振幅分佈的发射器 183
 - * (三) 採用工作面是非均匀灵敏度分佈的接收器 189
 - * (四) 採用特殊电路来改善收发系統的方向特性 191
 - (五) 採用特殊的方向系統 194
- § 7-5 特殊方向系統 194
 - * (一) 拋物面系統 194
 - * (二) 喇叭系統 204
 - (三) 水声波导系統的簡單介紹 208
- * § 7-6 水声換能器的方向特性的设计计算方法 219
- 附录一: 換能器接收多频信号的总和方向特性 221
- 附录二: 拋物面系統的两个方向特性函数的推导 224
- 附录三: 最佳直綫形基陣的设计方法 229

第五章 压电与电致伸缩式换能器

引言

压电与电致伸缩式换能器是目前水声技术领域中应用最广泛的一类换能器。其原因：由于它较其它类型的换能器具有更多的优点。

(1) 它有较高的接收灵敏度。当它工作在谐振接收状态时，它可以有几百微伏/微巴—几个毫伏/微巴的接收灵敏度。而磁致伸缩式换能器在谐振接收状态的接收灵敏度，一般比压电的小十倍左右。

(2) 当它工作在发射状态时，它的电声效率亦较大。一般它的电声效率可超过30%。而对于石英晶体发射器来讲，它的电声效率约大于60%。对于镍的磁致伸缩换能器在最佳工作状态一般不能超过50%，通常在20%—40%之间。

(3) 由于压电（电致伸缩）陶瓷的出现，我们可以依据实际工作情况的需要，将它做成各种形状的换能器。例如，我们可以利用压电陶瓷做成球形换能器。

到目前为止，我们已经发现许多晶体具有压电性能，可以利用它们作为换能器的材料。但其中性能比较好的，亦为人们常采用的，不外乎为下列几种晶体：石英、电气石、酒石酸钾钠、磷酸二氢铵、硫酸锂、酒石酸二钾、酒石酸乙二醇、磷酸二氢钾，以及由钙钛矿晶型为基所构成的多晶电致伸缩陶瓷，例如，以钛酸盐为基的多晶陶瓷，如钛酸钡和钛酸铅所组成的多晶固溶体，和由锆酸铅与钛酸铅所组成的固溶体等等。除掉以钙钛矿晶型为基的陶瓷外，其它的晶体均具有天然的压电性能，并且其中有些晶体已能用人工方法加以培养。例如酒石酸钾钠，磷酸二氢铵晶体，皆可从水溶液中生长。钛酸钡等多晶陶瓷体，在最初状态，并不呈现压电性能，仅当它们受强电场使之极化后，才具有相应的压电性能。

依据实际工作情况的需要，一般压电换能器常采用下列的四种基本形式：

(I) 菌式片形换能器

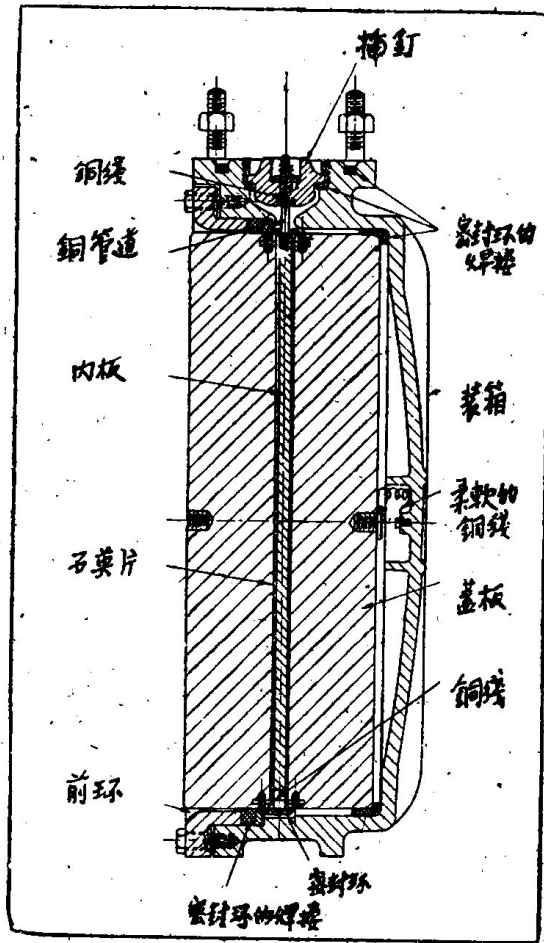
(i) 厚度振动的菌式换能器：

它的结构如图(5-0-1)所示。它又称郎芝万型换能器，因为这种型式首先由法国物理学家郎芝万(Langevin)所采用。其内部的振动子是由二块金属板及由许多石英小晶片所嵌镶成的压电晶体层所组成。在振动子的外部有一个金属壳，金属壳与后盖板之间有一层空气隙，空气层的作用是利用它来反射声波，使整个换能器工作在单面发射和接收状态。在前盖板与金属外壳上套有一层橡皮外套，其作用是使换能器处于水密状态；但与前盖板相密合的橡皮层应为透声橡皮，以利声能通过此橡皮向水中发射。

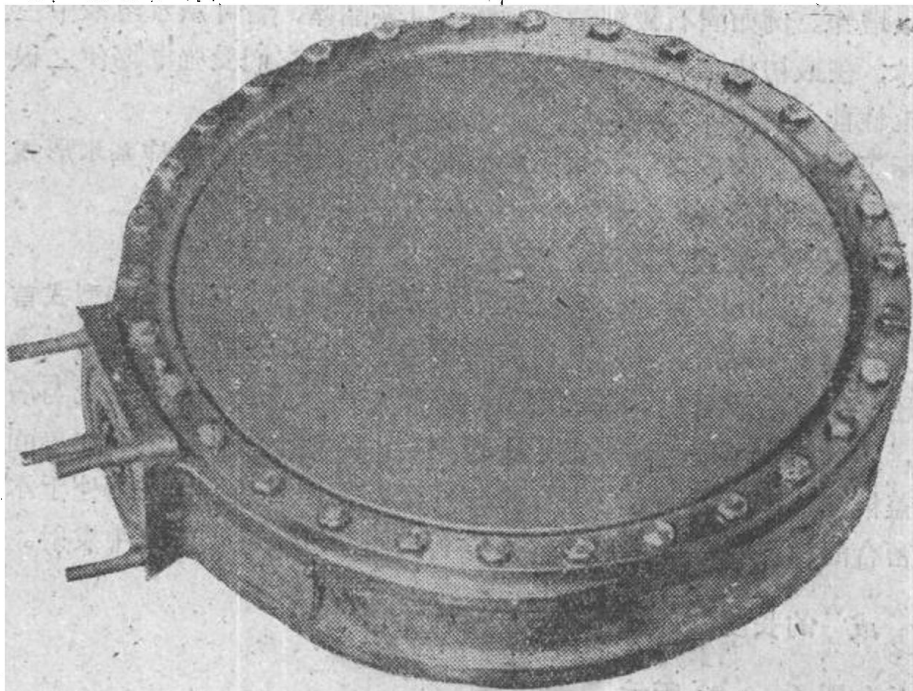
(ii) $\frac{\lambda}{2}$ 或 $\frac{\lambda}{4}$ 的长度振动的菌式换能器：

它的结构如图(5-0-2)所示。

这种换能器是近代较广泛应用的菌式换能器。如美国QJA型声纳站就是应用如(5-0-2)b图所示的压电换能器。



(a)



(b)

图 5-0-1 郎芝万型压电换能器

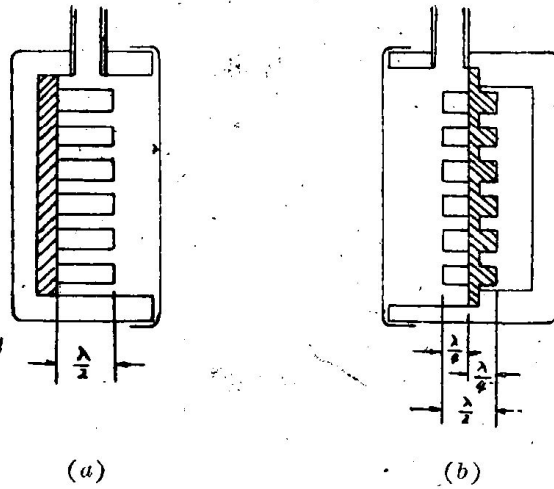
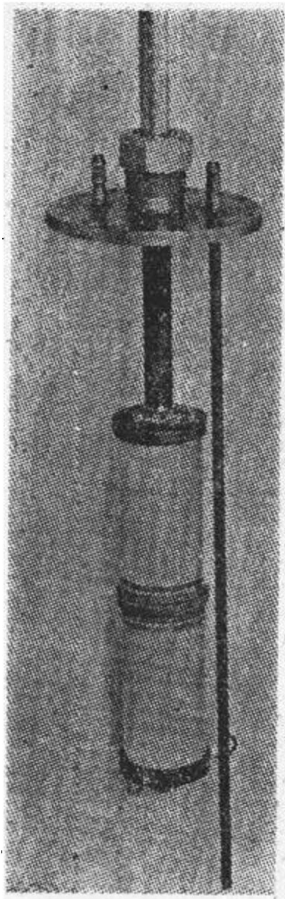


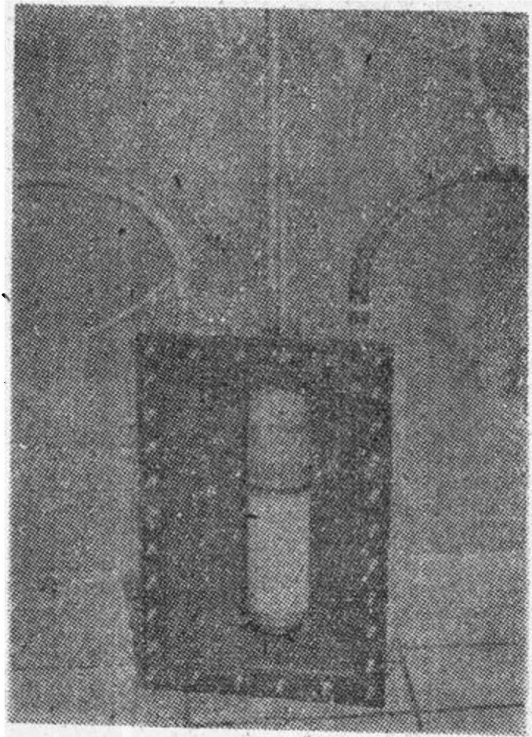
图 5-0-2 长度振动的菌式压电换能器

(I) 园柱形的换能器:

它的结构如(5-0-3)图所示。由许多短园柱迭加而成，内部为空心，外部有一个园柱形外壳，中间灌蓖麻油。如苏式通讯仪即採用此种型式的换能器。



(a)



(b)

图 5-0-3 园柱形压电换能器

(I) 球形的换能器:

它的结构如(5-0-4)图所示。如苏式的标准换能器就采用这种形式的换能器。

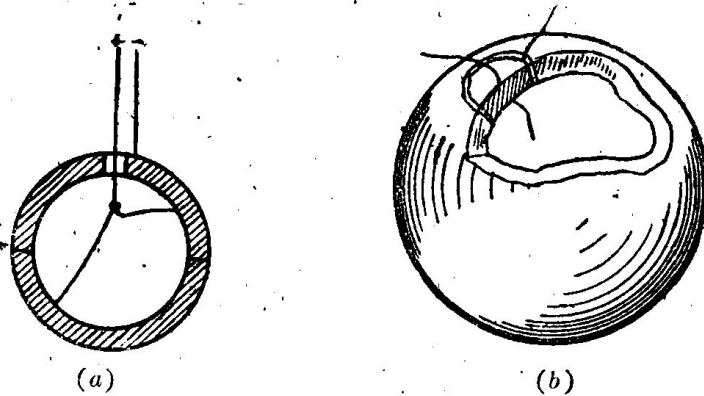


图 5-1-4 圆球形压电换能器

(IV) 聚焦系统的换能器

它的结构如(5-0-5)图所示。它的由许多钛酸钡陶瓷嵌镶而成，一般超声清洗系统常采用这种换能器。

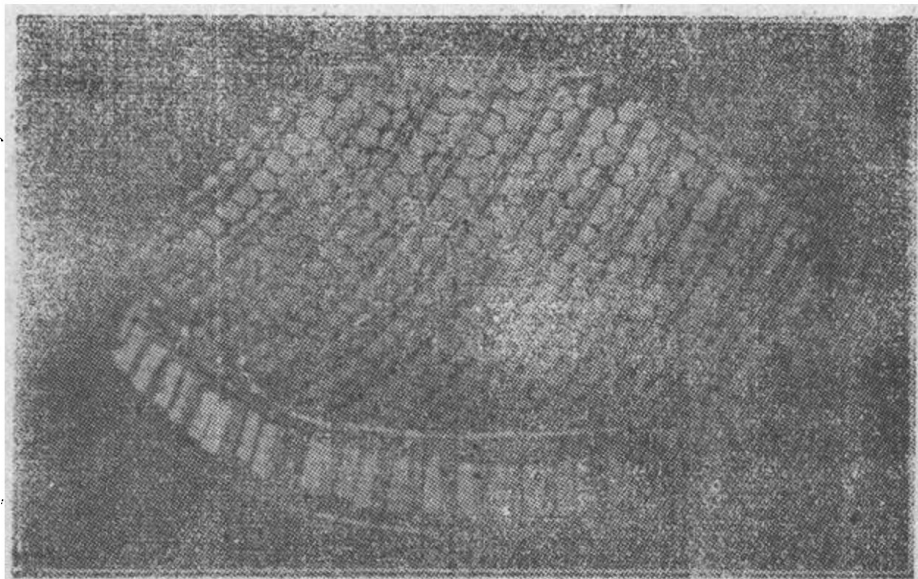


图 5-0-5 聚焦系统的压电换能器

本章的内容是：首先介绍晶体的一般特性及压电效应的基本规律，然后讨论压电换能器的基本工作原理——主要研究片形及柱形换能器在收发状态下的基本工作原理，并概略地介绍一下球形换能器的工作特性。此外对压电换能器及其材料的特性参数的测量也作了较为详细的说明。最后对压电换能器设计计算的方法及其应注意的事项作一简略的介绍。

§ 5-1 晶体的电学特性

我们知道，把一块无限大且为各向同性的平板形电介质，放在一均匀电场中，依据高斯定理有：

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (5.1.1)$$

其中 D 是电位移, E 是电介质中的电场强度, P 是电极化。

对于各向同性的介质, 电极化向量与电场强度向量是平行的, 因而 (5.1.1) 式可以用标量的关系式来表示。

对于各向同性的电介质

$$\vec{P} = K\vec{E} \quad (5.1.2)$$

K 是电介质的电化率。

将 (5.1.2) 式代入 (5.1.1) 式得

$$\vec{D} = \vec{E}(1 + 4\pi K) = \varepsilon\vec{E} \quad (5.1.3)$$

ε 是介质的介电常数。

在晶体中, 由于晶体的各向异性, 电场强度的向量与电极化向量往往并不在同一方向上。若沿 X 轴向作用一电场, 它不仅能沿 X 轴向产生电极化, 而且能沿 Y 轴向及 Z 轴向也产生电极化。同理, 当沿 Y 轴向或 Z 轴向作用电场时, 亦将产生与上述相类似的现象。

晶体内部的电场可用下列向量关系式来表示:

$$\vec{E} = \vec{i}E_1 + \vec{j}E_2 + \vec{k}E_3 \quad (5.1.4)$$

其中, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示沿 X, Y, Z 轴向的单位向量, E_1, E_2, E_3 表示沿 X, Y, Z 轴向的电场强度分量。

当晶体受上述形式的电场作用时, 其内部所产生的电极化向量 \vec{P} 为:

$$\vec{P} = \vec{i}P_1 + \vec{j}P_2 + \vec{k}P_3 \quad (5.1.5)$$

其中, P_1, P_2, P_3 表示沿 X, Y, Z 轴向的电极化分量。

则电极化分量与电场分量的标量关系为:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= K_{11}E_1 + K_{12}E_2 + K_{13}E_3 \\ P_2 &= K_{21}E_1 + K_{22}E_2 + K_{23}E_3 \\ P_3 &= K_{31}E_1 + K_{32}E_2 + K_{33}E_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.1.6)$$

K_{11} 表示晶体受 X 轴向的电场作用时, 沿 X 轴向产生电极化所对应的电化率。

K_{12} 表示晶体受 Y 轴向的电场作用时, 沿 X 轴向产生电极化所对应的电化率, 一般称它为交叉电化率。其余各附号可以按上述情况类推之。

相应地, 我们可以求得下面的关系式:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.1.7)$$

式中, D_1, D_2, D_3 表示沿 X, Y, Z 轴的电位移分量。

ε_{11} 表示晶体受 X 轴向的电场作用时, 沿 X 轴向产生电位移所对应的介电常数。

ε_{12} 表示晶体受 Y 轴向的电场作用时, 沿 X 轴向产生电位移所对应的介电常数, 一般又称它为交叉介电常数。

对于各向异性的电介质, 电位移与电场强度及电极化的关系可用下列向量关系式来表示:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (5.1.8)$$

将(5.1.4)(5.1.6)式代入(5.1.8)式并与(5.1.7)式比较, 则可得到各向异性的晶体的介电常数与电化率的关系式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{hh} &= 1 + 4\pi k_{hh} \quad \text{其中 } h=1, 2, 3. \\ \varepsilon_{hi} &= 4\pi K_{hi} \quad \text{其中 } h \neq i, \text{ 而 } h, i=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (5.1.9)$$

依据(5.1.9)式, 对于完全不对称的晶体, 它可以有9个独立的介电常数或9个独立的电化率。

在有些书中或论文中, 为了运算的方便, 常常将它用矩阵的形式来表示:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.10)$$

有时为了书写方便, (5.1.10)式又可写成

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (5.1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{若令 } (D_1)_1 &= \varepsilon_{11} E_1, (D_1)_2 = \varepsilon_{12} E_2, (D_1)_3 = \varepsilon_{13} E_3, \\ (D_2)_1 &= \varepsilon_{21} E_1, (D_2)_2 = \varepsilon_{22} E_2, (D_2)_3 = \varepsilon_{23} E_3, \\ (D_3)_1 &= \varepsilon_{31} E_1, (D_3)_2 = \varepsilon_{32} E_2, (D_3)_3 = \varepsilon_{33} E_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.12)$$

根据实验证明, 在所有的情况, 它们之间有下列关系:

$$(D_1)_2 E_1 = (D_2)_1 E_2, (D_1)_3 E_1 = (D_3)_1 E_3, (D_2)_3 E_2 = (D_3)_2 E_3 \quad (5.1.13)$$

比较(5.1.12)及(5.1.13)式得

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}, \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} \quad (5.1.14)$$

因此就得到一个结论: 对于任何一个完全不对称的晶体而言, 其独立的介电常数不超过6个。

** 具有一定对称性的晶体的介电常数

利用晶体的对称性关系, 我们可以证明, 当晶体有一定的对称性时, 晶体所具有的独立介电常数的个数将少于六个。

为了便于理解, 我们以石英晶体为例。可以证明, 由于石英具有一定程度的对称性, 它仅有两个独立的介电常数。

在证明石英的独立介电常数的个数之前, 让我们首先回忆一下坐标变换的关系式。

若有两个同原点的坐标系 X, Y, Z 及 X', Y', Z' 。 X', Y', Z' 轴对 X, Y, Z 轴的方向余弦各为 $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ 。若将它们的关系写成矩阵的形式, 则有

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5.1.15)$$

上式亦可理解为: 当我们知道了某一个向量在 (X, Y, Z) 坐标系中的分量以后, 它在 (X', Y', Z') 坐标系中的分量便可以(5.1.15)式的关系中求得。

利用直角坐标的正交性, 我们可得:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (5.1.16)$$

上式亦可理解为：当我们知道了某向量在 (X', Y', Z') 坐标系中的分量以后，利用 (5.1.16) 式便可求出它在 (X, Y, Z) 坐标系中的分量。

为了便于运算及书写方便，我们常用 a 及 a^{-1} 表示 (5.1.15) 及 (5.1.16) 式右边的第一个矩阵，即

$$a = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.17)$$

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.18)$$

由于坐标的正交性

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad (5.1.19)$$

若令 \vec{D} 表示在坐标系 (X, Y, Z) 中的电位移向量，而它在 (X', Y', Z') 坐标系中的向量用 \vec{D}' 来表示，则它们两者的关系为

$$\vec{D}' = a \vec{D} = a \varepsilon \vec{E} = a \varepsilon a^{-1} a^{+1} \vec{E} = a \varepsilon a^{-1} \vec{E}' \quad (5.1.20)$$

其中， \vec{E} ， \vec{E}' 分别表示在 (X, Y, Z) 及 (X', Y', Z') 坐标系中的电场强度向量。

由此可知，介电常数在坐标变换中的关系为

$$\varepsilon' = a \varepsilon a^{-1} \quad (5.1.21)$$

下面我们将利用 (5.1.21) 式及石英晶体的对称性来证明它仅有二个独立的解电常数。

石英具有绕 X 轴的二重轴及绕 Z 轴的三重轴的对称性。

所谓绕 X 轴的二重轴的对称性，即当晶体绕 X 轴旋转 180° 时，旋转后的晶形及特性与原来的晶形及特性相同，所谓绕 Z 轴的三

重轴的对称性，即当晶体绕 Z 轴旋转 120° 时，旋转后的晶形及特性与旋转前的相同。晶形的相同，即表示它内部结构相同。因此当某一物理场作用到晶体相应的对称面时，其内部产生的效果应相等。我们以一简例说明之。若有一个一维晶体，如 (5-1-1) 图所示。

很明显，它具有绕 X 轴的二重对称性。若沿 Y 轴正向作用一电场 E 时，相应的介电常数为 ε 。当沿 Y 轴负向作用一电场 E 时，相应的介电常数为 ε' ，但依据对称性这两个介电常数必然相同，即 $\varepsilon' = \varepsilon$ 。在第二种情况，从数学观点来看，它相对于第一种情况绕 X 轴旋转了 180° 。我们将此种概念推广，应用到石英晶体，立即可以证明石英晶体仅具有二个介电常数。很明显，当绕 X 轴旋转 180° 时，新旧二坐标系的转换矩阵为：

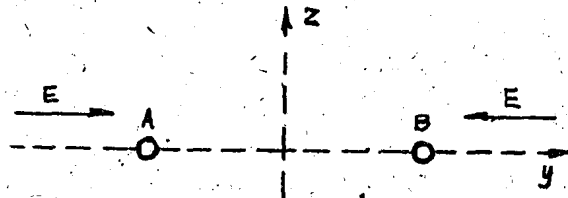


图 5-1-1

$$a = a^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (5.1.22)$$

若令绕X轴旋转180°后的介电常数为 ϵ' ，则

$$\epsilon' = a \epsilon a^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ -\epsilon_{21} & \epsilon_{22} & -\epsilon_{23} \\ -\epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.23)$$

因为 $\epsilon = \epsilon'$ ，故 $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{31} = \epsilon_{13} = 0$

由于石英晶体具有绕Z轴的重三轴，当绕Z轴旋转120°时，新旧二坐标系的转换矩阵为：

$$a = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad a^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (5.1.24)$$

若令绕Z轴旋转120°后的介电常数为 ϵ''

$$\epsilon'' = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon_{31} + 3\epsilon_{22}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \epsilon_{11} - \frac{\sqrt{3}}{4} \epsilon_{22} & \frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon_{32} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \epsilon_{11} - \frac{\sqrt{3}}{4} \epsilon_{22} & \frac{3}{4} \epsilon_{11} + \frac{1}{4} \epsilon_{22} & -\frac{1}{2} \epsilon_{32} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon_{32} & -\frac{1}{2} \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.25)$$

又因为 $\epsilon'' = \epsilon'$ ，故 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ ， $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0$ 。

因此，石英晶体仅具有二个独立的介电常数 ϵ_{11} 及 ϵ_{33} 。

根据伐格特(W. Vaigt)的研究：

对于三斜晶系它仅具有六个独立介电常数。

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.26)$$

对于单斜晶系它仅有四个独立介电常数。

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.27)$$

例如酒石酸乙二胺，酒石酸二钾即属于此晶系，它们的介电常数分别为：

酒石酸二钾 $\epsilon_{11} = 6.44$ ， $\epsilon_{22} = 5.8$ ， $\epsilon_{33} = 6.49$ ， $\epsilon_{13} = 0.005$

酒石酸乙二胺 $\epsilon_{11} = 5.0$ ， $\epsilon_{22} = 8.22$ ， $\epsilon_{33} = 5.0$ ， $\epsilon_{13} = \times \times$

对于正交晶系它仅有三个独立介电常数:

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.28)$$

酒石酸钾钠即属于此晶系, 它的介电常数如下:

$$\varepsilon_{22} = 12.5, \varepsilon_{33} = 10.5, \text{ 由于它是铁电体在 } 10^\circ\text{C 时, } \varepsilon_{11} = 250.$$

对于四角晶系(如磷酸二氢铵)、三角晶系(石英)、六角晶系等皆仅有二个独立介电常数

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.29)$$

石英 $\varepsilon_{11} = 4.35, \varepsilon_{33} = 4.60$

磷酸二氢铵 在 20°C 时 $\varepsilon_{11} = 58, \varepsilon_{33} = 15.6$.

对于立方晶系仅有一个独立介电常数、对于多晶陶瓷亦仅有一个独立介电常数

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} \quad (5.1.30)$$

如钛酸钡陶瓷在 20°C 时, $\varepsilon_{11} = 1400$

§ 5-2 晶体的弹性特性

(一) 广义虎克定律

应力与应变的关系及独立弹性系数的个数。

在弹性力学中, 我们知道, 在微小形变状态下, 晶体应力与应变的关系遵从广义虎克定律。它的关系式为

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3 + c_{14}\varepsilon_4 + c_{15}\varepsilon_5 + c_{16}\varepsilon_6 \\ T_2 &= c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3 + c_{24}\varepsilon_4 + c_{25}\varepsilon_5 + c_{26}\varepsilon_6 \\ T_3 &= c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3 + c_{34}\varepsilon_4 + c_{35}\varepsilon_5 + c_{36}\varepsilon_6 \\ T_4 &= c_{41}\varepsilon_1 + c_{42}\varepsilon_2 + c_{43}\varepsilon_3 + c_{44}\varepsilon_4 + c_{45}\varepsilon_5 + c_{46}\varepsilon_6 \\ T_5 &= c_{51}\varepsilon_1 + c_{52}\varepsilon_2 + c_{53}\varepsilon_3 + c_{54}\varepsilon_4 + c_{55}\varepsilon_5 + c_{56}\varepsilon_6 \\ T_6 &= c_{61}\varepsilon_1 + c_{62}\varepsilon_2 + c_{63}\varepsilon_3 + c_{64}\varepsilon_4 + c_{65}\varepsilon_5 + c_{66}\varepsilon_6 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

其中: T_1, T_2, T_3 为沿 X, Y, Z 轴向的正应力, 并规定压力为负, 张力为正。 T_4, T_5, T_6 为切应力。

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为沿 X, Y, Z 轴向的伸缩应变, 并规定: 伸张应变为正, 压缩应变为负。
 $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ 为切应变。若在第一象限内, 一个矩形面经变形后, 原来由正向轴所夹的直角

变成了锐角，则这种形变称为正切应变。
如图(5-2-1)所示即为正 ϵ_6 的切应变

c_{11}, \dots, c_{66} 等为弹性系数。以上式可以看出，对于完全不对称的晶体似乎应有36个不同的弹性系数。但后面我们将证明即使是完全各向异性的物体，它亦只有21个完全独立的弹性系数。

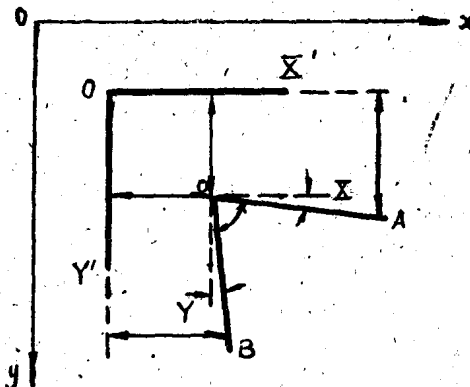


图 5-2-1

**** (二) 各向异性晶体在完全不对称情况下，独立弹性系数的个数**

当晶体受外力作用后，由一平衡状态达到另一个新的平衡状态，这物体必有一位移。当物体由一个形状变为另一个形状时，外力(体力和面力)通常均需做功，我们可以求出这功的值。

从另一个角度来看，任何物体或一物体的任何部分都具有能量。假如在运动时，则具有动能，它和质量分布以及速度的分布有关。在位移不大的情况下，我们可把每单位体积的动能写成如下形式：

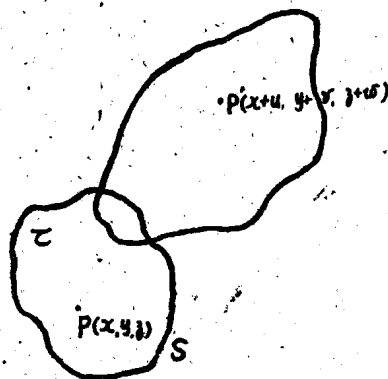
$$\frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (5.2.2)$$

其中： ρ 是未变形前的单位体积的质量， u, v, w 是物体在 X, Y, Z 轴向的位移分量。除此以外，尚有物体体积内部的分子动能及分子间的相互作用能，前者和温度有关，这两种能量总称作内能。通常总是选择一个均匀温度作为一个参考状态，然后用此参考状态来计算其它状态的内能。物体任一部分的总能量便是这部分的动能和内能的和，而物体的总能量便是各部分总能量之和。

当一物体由一状态变至另一状态时，动能是要改变的。一般地说，总能量的改变并不等于外力所做的功，因为此时物体尚吸收或放出热量。这种热量常常用等值的功来度量。

热力学第一定律告诉我们：一物体总能量的增加等于外力所做的功和所吸收的热量之和。

现在我们来计算时间由 t 至 $t+dt$ 所做的功。如图(5-2-2)所示，假如物体的体积是 τ ，表面积是 s ，体力是 $f(f_x, f_y, f_z)$ ，面力是 $F_N(X_N, Y_N, Z_N)$ 。物体由一状态变至另一状态时，物体中任一点 $P(x, y, z)$ 变为 $P'(x+u, y+v, z+w)$ 。若时间由 t 变至 $t+dt$ ，则 u, v, w 变为 $u + \frac{\partial u}{\partial t} dt, v + \frac{\partial v}{\partial t} dt,$



图, 5-2-2

$w + \frac{\partial w}{\partial t} dt$ 。我们假定在 dt 时间间隔中外力所作的功是 $d\epsilon$ ，其中体力所作的功是 $d\epsilon_1$ ，面

力所作的功是 $d\varepsilon_2$, 则

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} dt = \iiint_V \left(f_x \frac{\partial u}{\partial t} dt + f_y \frac{\partial v}{\partial t} dt + f_z \frac{\partial w}{\partial t} dt \right) d\tau = \iiint_V \left(f_x \frac{\partial u}{\partial t} + f_y \frac{\partial v}{\partial t} + f_z \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt d\tau \quad (5.2.3a)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} dt = \iiint_V \left(X_N \frac{\partial u}{\partial t} + Y_N \frac{\partial v}{\partial t} + Z_N \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt ds \quad (5.2.3b)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 \quad (5.2.4)$$

已知通过某一点的任意平面上的应力状态可用六个独立的应力分量来表示。因而我们在边界上任取一单元面, 它的法线为 N , 而作用在此面上的力在 X, Y, Z 轴上的投影为 X_N, Y_N, Z_N , 则

$$\left. \begin{aligned} X_N &= T_1 l + T_6 m + T_5 n \\ Y_N &= T_6 l + T_2 m + T_4 n \\ Z_N &= T_5 l + T_4 m + T_3 n \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

其中 l, m, n 是面法线的方向余弦

将(5.2.5)式代入(5.2.3b)式, 则得

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{dt} = & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_6}{\partial y} + \frac{\partial T_5}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial T_6}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_4}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial T_5}{\partial x} + \frac{\partial T_4}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right] dt d\tau \\ & + \iiint_V \left(T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right) dt d\tau \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

由于

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_6}{\partial y} + \frac{\partial T_5}{\partial z} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_6}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_4}{\partial z} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_5}{\partial x} + \frac{\partial T_4}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7)$$

因此将(5.2.7), (5.2.6), (5.2.3a)代入(5.2.4)式得

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} dt = & \iiint_V \rho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \right] dt d\tau + \iiint_V \left[T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + \right. \\ & \left. + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right] dt d\tau \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\text{若令物体所含的动能为 } K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau \quad (5.2.9)$$

则(5.2.8)式可改写成

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dK}{dt} + \iiint_V \left[T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right] d\tau \quad (5.2.10)$$

因此每单位时间内外力所做的功减去动能的增加率为:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dk}{dt} = \iiint \left[T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right] d\tau \quad (5.2.11)$$

由热力学第一定律, 我们有

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dk}{dt} + \frac{dU}{dt} - \frac{dQ}{dt} \quad (5.2.12)$$

其中 Q 是体积 τ 所吸收的热量, U 是体积 τ 的内能。

假如状态的改变是绝热过程, 这相当于外力作用于物体上, 使其很快地由一个状态转变为另一个状态, 那么物体中任何一部分将无热量的传递, 因此

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (5.2.13)$$

且

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt} \quad (5.2.14)$$

这样我们便有

$$\frac{dU}{dt} = \iiint \left[T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right] d\tau$$

假如我们令单位体积的内能为 U_1 , 则:

$$U = \iiint U_1 d\tau$$

由于 τ 指的是物体形变前的体积, 因此 τ 和 s 与时间无关。亦即

$$\frac{dU}{dt} = \iiint \frac{\partial U_1}{\partial t} d\tau$$

这样我们有

$$\iiint \frac{\partial U_1}{\partial t} dt = \iiint \left[T_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + T_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + T_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + T_4 \frac{\partial x_4}{\partial t} + T_5 \frac{\partial x_5}{\partial t} + T_6 \frac{\partial x_6}{\partial t} \right] d\tau$$

区域 τ 可以是任意的, 因此对于某一固定的区域, 在时间间隔 dt 内, U_1 的变化是

$$dU_1 = T_1 dx_1 + T_2 dx_2 + T_3 dx_3 + T_4 dx_4 + T_5 dx_5 + T_6 dx_6 \quad (5.2.15)$$

U 是状态函数, dU 是全微分, 因此必存在一个态函数 W , 它有这样的性质

$$\left. \begin{aligned} T_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, T_6 = \frac{\partial W}{\partial x_6} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_n} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_m} \quad (m \neq n; m, n = 1, \dots, 6) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.16)$$

W 一般称为应变能。

在等温过程中, 也存在有相应的应变能函数。

利用 (5.2.16) 和 (5.2.1) 式即可得到

$$c_{m'n} = c_{nm} \quad (m \neq n; m, n = 1, \dots, 6) \quad (5.2.17)$$

因此我们证明了, 晶体在完全不对称的情况下, 它仅有21个独立的弹性系数。

** (三) 具有一定对称性的晶体的弹性系数的个数

当晶体具有一定对称性时, 它的独立弹性系数将少于21个。在证明此问题之前, 让我们首先研究一下, 应变与应力随坐标的变换关系。

(i) 应变分量随坐标变换的关系。

设有二个同原点的坐标系 X, Y, Z 及 X', Y', Z' , 物体内部的形变位移在 X, Y, Z 坐标系中的投影为 u, v, w ; 在 X', Y', Z' 坐标系中的投影为 u', v', w' , 因而有

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (l_1 u + m_1 v + n_1 w) = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) (l_1 u + m_1 v + n_1 w)$$

若令 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 表示在 X, Y, Z 坐标系中的相对形变。

$x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6$ 表示在 X', Y', Z' 坐标系中的相对形变, 则有

$$x'_1 = l_1^2 x_1 + m_1^2 x_2 + n_1^2 x_3 + m_1 n_1 x_4 + n_1 l_1 x_5 + l_1 m_1 x_6$$

其中 l_1, m_1, n_1 是 n' 在 X, Y, Z 坐标系中的方向余弦

同理得

$$x'_2 = l_2^2 x_1 + m_2^2 x_2 + n_2^2 x_3 + m_2 n_2 x_4 + n_2 l_2 x_5 + l_2 m_2 x_6$$

$$x'_3 = l_3^2 x_1 + m_3^2 x_2 + n_3^2 x_3 + m_3 n_3 x_4 + n_3 l_3 x_5 + l_3 m_3 x_6$$

$$x'_4 = 2l_2 l_3 x_1 + 2m_2 n_3 x_2 + 2n_2 n_3 x_3 + (m_2 n_3 + n_2 m_3) x_4 + (n_2 l_3 + n_3 l_2) x_5 + (l_2 m_3 + l_3 m_2) x_6$$

$$x'_5 = 2l_3 l_1 x_1 + 2m_3 m_1 x_2 + 2n_3 n_1 x_3 + (m_3 n_1 + m_1 n_3) x_4 + (n_3 l_1 + n_1 l_3) x_5 + (l_3 m_1 + l_1 m_3) x_6$$

$$x'_6 = 2l_1 l_2 x_1 + 2m_1 m_2 x_2 + 2n_1 n_2 x_3 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) x_4 + (n_1 l_2 + n_2 l_1) x_5 + (l_1 m_2 + m_1 l_2) x_6$$

其中 $l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ 各为 v', w' 在 X, Y, Z 坐标系中的方向余弦综合前面数式; 我们可得形变分量随坐标变换的矩阵方程式:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ x'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & m_1 n_1 & n_1 l_1 & l_1 m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 & l_2 m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & m_3 n_3 & n_3 l_3 & l_3 m_3 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & (m_2 n_3 + n_3 m_2) & (n_2 l_3 + l_2 n_3) & (l_2 m_3 + l_3 m_2) \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & (m_3 n_1 + m_1 n_3) & (n_3 l_1 + n_1 l_3) & (l_3 m_1 + m_3 l_1) \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & (m_1 n_2 + n_1 m_2) & (n_1 l_2 + n_2 l_1) & (l_1 m_2 + m_1 l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

(5.2.18)

(ii) 应力分量随坐标变换的关系:

若新旧坐标的转换关系式为:

应力在新坐标系中沿 x_1 轴的分量为 X' ; 而此应力在老坐标系中沿 x, y, z 轴的分量为 X_x, Y_x, Z_x 。若在老坐标系中应力分量为已知, 亦即 T_1, \dots, T_6 为已知量, 则根据(5.2.5)式可得