數学分析参考书

第一卷 一分册

数学分析参考书，

第1卷．分析引论，导数，积分．

在参考书中叙述了解基本类型的问题与例题的方法，每一章的内容有必需的理论材料，问题与例题的详尽解答，也有供自己练习的题目。

本书是供工程技术工作者和从事于用分析解决应用问题的专门家，高等院校的教师，学生参考使用，也适用于自修分析的人们之用。

作　者　的　话

这本参考书是以作者1974年出版的《数学分析的例题与问题》卷 1 作为基础编写出来的。

各种不同职业的读者寄给作者和编辑许多的来信指出出版参考书的必要性，寄信给我们的不仅是学生，而且有更广泛的读者，其中有自修分析的读者，也有在高等教育部门刚开始参加实际工作的青年教师。

现有的许多有关数学分析的教科书与教学参考书都没有关于解题实践的大量报导。

本参考书的目的是想用Б.Л.吉米多维奇，H.M. 恩杰尔与P.O.库兹明，Г.Н.别尔曼习题集中的问题稍微弥补已有的空白。

作者们向莫斯科大学讲师O. C. 伊凡塞夫——模萨多夫对《数学分析的例题与问题》卷 1 寄函提出宝贵意见表示真诚的感谢，这些意见准备在这一次出版的过程中已注意加以修改。

目　　录

第 I 章

分　析　引　论

第 II 章

单 变 量 函 数 的 微 分 学

第　一　章

分 析 引 论

§1. 实　　数

1°. 集合. 我们把元素集合的数学概念当作是直觉的.

记号$x\in E$表示：《x是集合E的元素》，而记号$x\notin E$表示：《x不是集合E的元素》.

若F中的每一个元素为E中的元素，则写为$F\subset E$或$E\supset F$.

2°. 数学归纳法. 假设确定了以下二点：1）包含自然数为变量的命题Q对于某个自然数a若是正确的就能推出它对相继于a的自然数也是正确的；2）至少存在一个自然数b，命题Q对于b是成立的.

则命题Q对大于或等于b的任意自然数都成立.

3°. 分割. 有理数的集合A称为一个分割，若：1）至少有一个有理数（但非任何有理数）属于集合A；2）对于$p\in A$与$q<p$（q—有理数）有$q\in A$；3）集合A中无最大数.

从分割的定义推知，若$p\in A$且$q\notin A$，则$p<q$.集合A的元素称为分割A的下类数，而不属于集合A的有理数称为分割A的上类数，所有上类数所成之集合用A'来表示.

若在集合A'中有最小数r，则分割A称为有理的并说它确定有理数r.

若在集合A'中无最小数，则说分割A确定无理数.

一切有理数与无理数所成之集合称为实数集合.

4°. 绝对值. 若x——实数，则由下列条件所确定的非负数称为x的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}x, & 若x\geqslant 0;\\ -x, & 若x<0.\end{cases}$$

对于任何实数x与y下面的不等式成立

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

5°. 上确界与下确界. 设$X=\{x\}$——实数的有界集合.数$m=\inf\{x\}$满足下列条件：1）每一个$x\in X$满足不等式$x\geqslant m$；2）对于任意的$\varepsilon>0$存在这样的$x'\in X$，使$x'<m+\varepsilon$，则称m为集合X的下确界.类似地，若数$M=\sup\{x\}$满足下列条件：1）每一个$x\in X$满足不等式$x\leqslant M$；2）对于任意的$\varepsilon>0$存在这样的$x''\in X$，使

$x'>M-\varepsilon$，则称M为集合X的上确界.

若集合X上方（下方）无界，则我们约定说成它的上（下）确界是$+\infty$（$-\infty$）：$\sup\{x\}=+\infty(\inf\{x\}=-\infty)$

6°. 定性词. 在数学的定理中常常使用语句《对于一切的…》与《存在这样的…，使…》.它们分别用$\forall$与$\exists$来表示且称为定性词

1. 求和

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

解. 使用数学归纳法.因为

$$S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

$$S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

$$S_3=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

因此可假定

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad(1)$$

但因 $$S_{n+1}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}}=\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}$$

且等式（1）当$n=1$时为真，所以根据归纳法它对一切n为真.

2. 利用数学归纳法证明，对于任意的自然数n以下的等式成立：

a) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

б) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证. a) 当$n=1$等式为真.假定对于n等式为真，我们来证明对$n+1$它也是真的事实上，

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

这就是所要证明的.

б) 当$n=1$等式显然为真.从假定它当n为真推出

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3=$$
$$=(1+2+\cdots+n)^2+2\frac{n(n+1)}{2}(n+1)+(n+1)^2.$$

注意等式 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n+(n+1))^2,$$

即是说，对$n+1$结论也真.

3. 证明牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\ a^{n-m}b^m\quad,$$

其中$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$（从n个元素取n个的组合数），$k!=1.2.\cdots k$，并假定$0!=1$.

证. 当$n=1$有

$$(a+b)=\sum_{m=0}^{1}C_1^m\ a^{1-m}b^m=\frac{1!}{0!1!}a+\frac{1!}{1!0!}b=a+b.$$

尚须证明，由假定命题对n为真推出

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m$$

事实上，

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{m=0}^{n}C_n^m\ a^{n-m}b^m=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\ a^{n+1-m}b^m+\sum_{m=0}^{n}C_n^m\ a^{n-m}b^{m+1}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\ a^{n+1-m}b^m+$$
$$+\sum_{m=1}^{n+1}C_n^{m-1}\ a^{n+1-m}b^m=a^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}\left(C_n^m+C_n^{m-1}\right)a^{n+1-m}b^m+b^{n+1}$$

利用关系式

$$C_n^m+C_u^{m-1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n+1-m)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}=C_{n+1}^m\quad,\qquad C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1\ ,$$

最后得

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}C_{n+1}^{m}a^{n+1-m}b^m+b^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^{m}a^{n+1-m}b^m.$$

4. 证明柏努里不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中x_1，x_2，…，x_n—符号相同且大于-1的数.

证. 当$n=1$，2不等式显然.设对于n不等式为真.我们来证明它对$n+1$也真.我们有（当$x_i>-1$）

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)\times(1+x_{n+1})$$
$$=1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}\geqslant1+x_1+x_2+\cdots$$
$+x_n+x_{n+1}$ 这里利用了对于相同符合的任何x_i都正确的不等式

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}\geqslant0$.

5．证明，若$x>-1$，则下面的不等式成立

$$(1+x)^n\geqslant1+nx(n>1)$$

并且仅当$x=0$等号成立.

证．所要证明的不等式从例题4中不等式当$x_1=x_2=\cdots=x_n=x$时直接推出.

6．证明不等式：

a) $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\qquad(1)$$

这里$x_i\geqslant0$（$i=1，2，\cdots，n$）（非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数）；

б) $$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}},$$

这里$x_i>0$（$i=1，2，\cdots n$）（正数的几何平均数不小于它们的调和平均数）；

B) $$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right),$$

这里x_i，y_i（$i=1，2，\cdots，n$）——任意的实数（柯西—布尼可夫斯基不等式）.

在什么情况下所述不等式中等号成立?

证．a）当$n=2$

$$\frac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}\geqslant0.$$

假定，不等式a）为真．则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}=\frac{n\cdot\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+x_{n+1}}{n+1}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+x_{n+1}}{n+1}.$$

设$x_1x_2\cdots x_n=a^{n(n+1)}$，$x_{n+1}=b^{n+1}$并利用最后这个不等式，得

$$\frac{x_1+x_2+\cdots x_n+x_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+x_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}=$$
$$=\frac{na^{n+1}+b^{n+1}}{n+1}-a^nb=\frac{na^{n+1}+b^{n+1}-na^nb-a^nb}{n+1}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(na^n(a-b)-b(a^n-b^n)\right)=\frac{a-b}{n+1}(na^n-ba^{n-1}-b^2a^{n-2}-\cdots-b^n)$$

$$=\frac{1}{n+1}(a^n-ba^{n-1}+a^n-b^2a^{n-2}+\cdots+a^n-b^n)$$

$$=\frac{(a-b)^2}{n+1}\Big(a^{n-1}+a^{n-2}(a+b)+a^{n-3}(a^2+ab+b^2)+$$

$$+\cdots+(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})\Big)\geqslant 0$$

这样，不等式 a）得证．当而且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$等号成立．事实上，从最后这个不等式推知，当而且仅当$a=b$时，换言之，当$x_1x_2\cdots x_n=x_{n+1}^n$，等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}=\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}$$

才可能成立．类似地可得，$x_1x_2\cdots x_{n-1}=x_n^{n-1}$．从这些等式推知，$x_n=x_{n+1}$．用这样的方法可证明等式$x_1=x_2=\cdots=x_n$．

б）设$x_i>0$（$i=1，2，\cdots，n$）．于是，对于数$\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，…，$\frac{1}{x_n}$应用不等式a），得关系式

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n},$$

从它得不等式б）．仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立．

в）从显然的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2\geqslant 0$$

得出对一切值 t 为非负的二次三项式

$$t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\geqslant 0,$$

所以$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\leqslant 0$

等号当而且仅当 $x_it+y_i=0$（$i=1，2，\cdots，n$）时成立，即是说，当存在这样的数$\lambda\neq 0$，使 $y_i=\lambda x_i$（$i=1，2，\cdots，n$），或者当一切的x_i（$i=1，2，\cdots，n$）或一切的y_i（$i=1，2，\cdots，n$）等于零．

7．证明不等式：

a）$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$，$n>1$；　б）$(n!)^2<\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$，$n>1$；

в）$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证．不等式a）与б）分别为上题中不等式a）当$x_k=k$与$x_k=k^2$（$k=1，2，\cdots，n$）的推论．

我们用数学归纳法来证明不等式в）．当$n=1$不等式显然成立，假定它对于n成立，

我们来证明它对于$n+1$也成立.事实上,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}}<\frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

8. 证明不等式:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $(n\geqslant 2)$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^n$, $(n\geqslant 3)$;

в) $\left|\sin\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k$, $(0\leqslant x_k\leqslant\pi;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$;

г) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$, $(n>1)$.

证. а) 当$n\geqslant 2$有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

б) 当$n=3$不等式显然成立.假定它对于n成立,我们来证明它对于$n+1$也成立.即是说我们要证明

$$(n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1},\text{若}n^{n+1}>(n+1)^n.$$

把最后这个不等式的两端同乘以$\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$,有

$$(n+1)^{n+2}>\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}.$$

但因$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}=\left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)^{n+1}>(n+2)^{n+1}$,故得欲证的结果.

в) 当$n=1$不等式为真.

假定原来的不等式成立,我们来证明

$$\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k.$$

事实上,若$0\leqslant x_k\leqslant\pi$,则

$$\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right|=\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\cos x_{n+1}+\cos\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\sin x_{n+1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\cdot\left|\cos x_{n+1}\right|+\left|\cos\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\sin x_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant \left| \sin \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + \sin x_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k.$$

г）当$n=2$等式显然成立．从它对n为真，证明对$n+1$为真．事实上，

$$(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) <$$
$$< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2.$$

9． 确定数$\sqrt[3]{2}$的分割A用下面的方法来作出：下类的数集A包含合条件$a^3<2$的一切有理数a．于是分割的上类的数集A′包含其余的一切有理数．证明，在集A中无最大数，而在集A′中——最小数．

证． 我们来证明第一个结论．设$a\in A$，则有$a^3<2$．我们来指出，可选取这样的自然数n，使$a+\frac{1}{n}\in A$，换言之

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2$$

由此可知，$a^3+\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2$，　　$\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$.

若　　$$\frac{3a^2+3a+1}{n}<2-a^3$$

则上面最后那个不等式更要成立．

所以，未知的n应当满足不等式

$$n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$$

第二个结论可仿此证明．

10．证明一切正有理分数$\frac{m}{n}$所成之集无最小与最大元素，这里m与n——自然数且$0<m<n$．试求此集的下确界与上确界．

解． 设m与n（$0<m<n$）——任意的自然数．则从明显的不等式

$$\frac{m}{n}=\frac{2m}{2n}>\frac{2m-1}{2n}>0, \qquad \frac{m}{n}=\frac{2m}{2n}<\frac{2m+1}{2n}<1$$

可得出，一切正有理分数无最小与最大元素．

现证 $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}=0$，而$\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}=1$

对于任意的$\varepsilon>0$与自然数m可求得这样的自然数$n>m$，使$n>\frac{m}{\varepsilon}$．于是$\frac{m}{n}<\varepsilon$．由此再从不等式$\frac{m}{n}>0$得知$\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}=0$．同样，对于任意的$\varepsilon>0$与自然数p可求得这样的自然数m，使$m>\frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$．由此$\frac{m}{p+m}>1-\varepsilon$，换言之，当$n=p+m$时有$\frac{m}{n}>1-\varepsilon$，而这与不等式$\frac{m}{n}<1$意味着$\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}=1$．

11. 设$\{-x\}$——数$x\in\{x\}$的相反数所成的数集. 证明:

a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$;　　　　б) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证明:

a) 若集合$\{x\}$是上方有界, 则集合$\{-x\}$是下方有界的, 因为从$x\leqslant M$得出$-x\geqslant -M$. 因此, 从$\sup\{x\}$的存在得到$\inf\{-x\}$的存在.

设$\sup\{x\}=M^*$, 即是说$x\leqslant M^*$对任何的$x\in\{x\}$成立且对任何的$\varepsilon>0$存在这样的$x'\in\{x\}$, 使得$M^*-\varepsilon<x'\leqslant M^*$. 但是这时$-x\geqslant -M^*$且$-M^*\leqslant -x'<-M^*+\varepsilon$, 这里$-x'\in\{-x\}$, 由此即得

$$\inf\{-x\}=-M^*=-\sup\{x\}.$$

б) 也与情形a) 一样, 确定$\inf\{x\}$与$\sup\{-x\}$的存在. 设$\inf\{x\}=m^*$, 即是说$x\geqslant m^*$对于任意的$x\in\{x\}$都成立且对于任意的$\varepsilon>0$存在这样的$x'\in\{x\}$, 使$m^*\leqslant x'<m^*+\varepsilon$. 于是$-x\leqslant -m^*$且$-m^*-\varepsilon<-x'\leqslant -m^*$, $-x\in\{-x\}$. 所以,

$$\sup\{-x\}=-m^*=-\inf\{x\}$$

12. 设$\{x+y\}$是一切和$x+y$的集合, 这里$x\in\{x\}$又$y\in\{y\}$. 证明等式:

a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

б) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$;

证. 因为由$x\geqslant m$, $x\in\{x\}$与$y\geqslant m_1$, $y\in\{y\}$即得, $x+y\geqslant m+m_1$, $(x+y)\in\{x+y\}$, 所以$\inf\{x\}=m^*$与$\inf\{y\}=m_1^*$的存在蕴涵$\inf\{x+y\}$的存在. 显然, $x+y\geqslant m^*+m_1^*$. 再者, 对于任意的$\varepsilon>0$存在这样的元素$(x'+y')\in\{x+y\}$, 使得

$$m^*+m_1^*\leqslant x'+y'<m^*+m_1^*+\varepsilon,$$

因为存在这样的$x'\in\{x\}$与$y'\in\{y\}$, 使$m^*\leqslant x'<m^*+\frac{\varepsilon}{2}$与$m_1^*\leqslant y'<m_1^*+\frac{\varepsilon}{2}$.

所以,

$$\inf\{x+y\}=x'+y'=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

等式б) 可类似地证明.

13. 设$\{xy\}$是一切乘积xy的集合, 这里$x\in\{x\}$又$y\in\{y\}$, 并且$x\geqslant 0$和$y\geqslant 0$. 证明等式:

a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$;　　　　б) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

我们来证明等式б). 因为由$x\leqslant M$, $x\in\{x\}$与$y\leqslant M_1$, $y\in\{y\}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$即得$xy\leqslant MM_1$, 故由$\sup\{x\}=M^*$与$\sup\{y\}=M_1^*$存在推出$\sup\{xy\}$存在. 从不等式$M^*-\varepsilon_1<x\leqslant M^*$, $M_1^*-\varepsilon_2<y\leqslant M_1^*$得出$M^*M_1^*-(\varepsilon_1M_1^*+\varepsilon_2M^*-\varepsilon_1\varepsilon_2)<xy\leqslant M^*M_1^*$. 因为量$\varepsilon_1M_1^*+\varepsilon_2M^*-\varepsilon_1\varepsilon_2$可以任意小,

所以 $\sup\{xy\}=M^*M_1^*=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

等式 a) 可类似地证明.

14. 证明不等式:

a) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$;

б) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$,

证. 不等式 a) 等价于不等式组

$$-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

已知, $|x+y| \geqslant |x|-|y|$ 与 $|-y|=|y|$. 用 $-y$ 代替 y, 得 $|x-y| \geqslant |x|-|-y|=|x|-|y|$. 再有, $|x-y|=|y-x| \geqslant |y|-|x|$, 由此 $-|x-y| \leqslant |x|-|y|$, 换言之, 不等式组中的二者得证.

不等式 б) 可同样证明.

15. 设 $X=\left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

证明, $\inf X=0$, $\sup X=1$.

证. 设 $\varepsilon>0$ ——任意的。于是由不等式

$$0<\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}<\varepsilon, \qquad 1-\varepsilon<\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}<1$$

对于一切的 $n>\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ 都成立, 得出 $\inf X=0$, $\sup X=1$.

§2. 序 列 理 论

1°. **无限大与无限小序列.** 若对任意的 $E>0$ 可指出这样的数 $N=N(E)$, 使当 $n>N$ 序列 $\{x_n\}$ 的一切元素 x_n 满足不等式 $|x_n|>E$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为无限大.

若对任意的 $\varepsilon>0$ 可指出这样的数 $N=N(\varepsilon)$, 使对一切的 $n>N$, 序列 $\{\alpha_n\}$ 的一切元素 α_n 满足不等式 $|\alpha_n|<\varepsilon$, 则称序列 $\{\alpha_n\}$ 为无限小.

2°. **序列的极限.** 对于序列 $\{x_n\}$, 若存在这样的数 a, 使得序列 $\{x_n-a\}$ 成为无限小, 换言之, $\forall \varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)$, 使对一切的 $n>N$ 该序列的元素 x_n 满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$, 则序列 $\{x_n\}$ 叫做收敛的, 并且数 a 称为序列 $\{x_n\}$ 的极限, 这可用记号表为: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 或当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to a$.

3°. **极限存在的判别法.**

1. 若 $\forall n>n_0$, $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

2. 单调且有界的序列有极限.

3. 柯西准则. 序列 $\{x_n\}$ 有极限存在的必要而且充分的条件是 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)$ 使对一切的 $n>N$ 与任意的 $p>0$, 有不等式

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

成立.

4° 在等式与不等式中的极限变化．设序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛，于是：

1）若 $x_n \leqslant y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

4）若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$，

5°．数e． 序列$\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}$有有限的极限，此极限称为数e：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$$

6°．无穷极限．记号$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$表示，无论任何的$E>0$，存在这样的数$N=N(\varepsilon)$，对于一切的$n>N$，有$|x_n|>E$．

7°．序列的极限点．无限时直线上的点a称为序列$\{x_n\}$的极限点，若从这个序列中能选出收敛于a的子序列．

任何有界序列至少有一个极限点存在．

有界序列的最大极限点$\overline{x}$称为该序列的上极限

$$\overline{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

而其最小的极限点$\underline{x}$——下极限

$$\underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

序列$\{x_n\}$为收敛的必要而且充分条件为它有界而且它的上、下极限$\overline{x}$与$\underline{x}$相重合．

若序列是上方（下方）无界，则它的最大(最小)极限点将理解为符号$+\infty(-\infty)$．

16．设 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$$(n=1,2,\cdots)$．对于每一个$\varepsilon>0$确定这样的数$N=N(\varepsilon)$，使得

$$若n>N(\varepsilon),\ |x_n-1|<\varepsilon$$

以证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$． 并填写下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					

证．根据极限定义，对于预先给定的$\varepsilon>0$，当 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon)$，有

$$\left|\frac{n}{n+1}-\ \right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
N	9	99	999	9999

17．证明，$x_n(n=1,2,\cdots)$ 是无限小（换言之，有极限为0），对于任何的$\varepsilon>0$指出这样的数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，$|x_n|<\varepsilon$．若：

a）$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　б）$x_n=\frac{2n}{n^3+1}$；

в）$x_n=\frac{1}{n!}$；　　г）$x_n=(-1)^n\cdot 0{,}999^n$．

对于上面每一种情况填写下表：

ε	0.1	0.001	0.0001	…
N				

证． a）显而易见，对于任何的$\varepsilon>0$

当 $n>\frac{1}{\varepsilon}=N(\varepsilon)$，　$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$．

б）类似地，当 $n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}=N(\varepsilon)$，　$\left|\frac{2n}{n^2+1}\right|<\frac{2n}{n^3}=\frac{2}{n^2}<\varepsilon$．

в）我们有

$$\left|\frac{1}{n!}\right|=\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\leqslant\frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdots2}=\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon.$$

解最后的不等式，得

$$n>1+\lg\frac{1}{\varepsilon}\cdot\lg^{-1}2=N(\varepsilon)$$

г）$|(-1)^n\cdot 0{,}999^n|=0{,}999^n<\varepsilon$． 由此$n\lg 0{,}999<\lg\varepsilon$且因$\lg 0{,}999<0$，所以

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0{,}999}\approx 2330\lg\frac{1}{\varepsilon}=N(\varepsilon).$$

表格建议读者填写．

18． 证明序列：

a）$x_n=(-1)^n\cdot n$；　б）$x_n=2^{\sqrt{n}}$；　в）$x_n=\lg(\lg n)(n>2)$ 当$n\to\infty$时有无穷极限（即为无限大），对于任意的E确定这样的数$N=N(E)$，使当$n>N$，有$|x_n|>E$．

对于上述每一种情况填写下表：

E	10	100	1000	10000
N				

证。 a）当$n>E=N(E)$不等式$|(-0)^n n|=n>E$成立，这里$E>0$——任意的。

б）类似地，解不等式$2^{\sqrt{n}}>E$，得

$$n>(\lg E)^2\cdot(\lg 2)^{-2}=N(\varepsilon).$$

B）解不等式$|\lg(\lg n)|=\lg(\lg n)>E\ (n>10)$，得$n>10^{10^E}=N(E)$。

表格建议读者填写

19. 证明 $x_n=n^{(-1)^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 无界，但当$n\to\infty$不为无限大。

解。 设 $E>0$——任意数。于是当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$

若 $k>\frac{E}{2}$，$|x_{2k}|=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k>E$.

换句话说，x_n无界．显然当$E>1$与 $n=2k-1\ (k=1,2,\cdots)$

$$|x_{2k-1}|=(2k-1)^{(-1)^{2k-1}}=\frac{1}{2k-1}<1\quad(k=1,2,\cdots)$$

就不能超过数$E>1$，即是说不为无限大．

20. 证明，当$|q|<1$时

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,$$

假定n取遍自然数列．

证．若 $q=0$，则等式显然． 设 $\varepsilon>0$——任意地且$0<|q|<1$．

于是（参阅例5）

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(1+\left(\frac{1}{|q|}-1\right)\right)^n>1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right)>n\left(\frac{1}{|q|}-1\right).$$

由此 $|q|^n=|q^n|<\frac{|q|}{n(1-|q|)}<\varepsilon\ \forall n>\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}$.

假定n取遍自然数列，求下列极限：

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解．置 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$.

于是 $$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+$$

$$+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2n}.$$

这样一来，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}3-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3$$

这里利用了对于任意的$\varepsilon>0$，若 $n>1+\frac{2}{\varepsilon}$,

$$\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}<\varepsilon.$$

即是说 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

解. 注意：

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$ 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

解. 因为 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=$

$$=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$$ 与当 $n>2$，$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>$

$$\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^n=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n+\cdots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

即是说，$0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\frac{2}{n}$，所以当$n\to\infty$，$2^{\frac{1}{2^n}}\to1$，且所给表达或的极限等于2.

证明下列等式：