外彈道學

下册

—修正理論與射表編制—

浦　發　編著

数学所

中国人民解放軍　总字一五〇部队

1964年10月

外弹道學講義

下　　册

——修正理論與射表編制——

目　　录

第一篇　修正理論

第二篇　射表編制

外弹道學講義

下 册

—修正理論與射表編制—

目 录

第一篇 修正理論

第一章 概 論

第二章 在非标准条件下彈丸質心运动方程組的組成与积分

第三章 修正微分方程組的組成与积分

第二篇　射表編制

附录二：

第一篇　修正理論

第一章　概　　論

§1　标准条件

射表的基本諸元是以"外彈道学基本問題"为基础来确定的。

外彈道学基本問題的解法，即彈丸質心运動問題解法，是在所謂外彈道学基本假設下建立的（上冊第三篇第一章§1）：

1.章動角$\delta=0$；

2.气象條件是标准的，无风；

3.地表面为平面；

4.重力加速度的大小（$g=9.80$米/秒^2）不变，方向沿直向下；

5.科氏加速度$j_c=0$。

但是火炮的实际射击條件，往往与上述基本假設不一致，这就會造成实际的彈道諸元与用基本假設为基础的彈道解法确定的射表基本諸元不一致。

关于章動角$\delta\neq0$時所产生的方向偏差的修正，已由中冊中的偏流計算解决了，这里不再研究。至于由于$\delta\neq0$時所造成的切向阻力的增加，一般将其包含在彈道系数（第二篇符合計算）中，故无須另行修正。

关于第二个假設，标准气象條件問題，已在上冊第二篇第一章中討論过了。它应包含气溫、气压的标准地面值及它們随高度分佈的标准定律，与縱、橫风为零等內容。

基本假設中的第3、4、5三个條件以及由全水平射程的定义（在炮口水平面上的落点到炮口的距离）所引起落点不在炮口水平面上的問題。而引出了标准地形、地球條件的概念。

不过，对于第3、4、5等條件，尤其是第3、4條件，就一般射程的火炮而言，实际情况与假設情况，差别不大。只有在較大射程（如50公里以上。而科氏加速度的影响，則需要在20公里左右）時才需要考慮。

射表基本諸元的确定，除符合上述的标准气象條件和标准地形、地球條件外，还需要与射表中所規定的初速（即表初速）、裝葯量、葯溫（$t_{ZN}=15°C$）及設計图紙規定的彈重一致，裝葯量、葯溫影响初速，而彈重不仅影响初速，而且影响彈道系数。彈丸的質量分佈和轉動慣量，也应符合图紙規定，关于它們的修正很困难，目前是从严格控制制造公差与半成品与成品檢驗来解决。至于炮耳軸是否水平，炮身軸綫与炮耳軸是否垂直，會影响到射向的改变。它們或与火炮的制造質量有关，或与地形有关。与地形的关系，可以在炮位的选擇与修筑上来解决；与火炮制造

质量的关系，可由出厂檢驗来解决。上述那些由射表规定的有关彈道、彈葯、火炮條件，總称之为标准射表條件（或标准彈道條件）。

标准條件，就是由标准气象條件、标准地形地球條件和标准射表條件所組成。射表的基本諸元就是以这种标准條件为依据确定的。

最后將諸标准條件，彙列于表Ⅰ.101中，以供查考。

标 准 條 件　　表Ⅰ.101

标 准 气 象 條 件	标 准 射 表 條 件	标准地形、地球條件
1.地面温度$t_{0N}=15°C$，空气湿度$e_{0N}=6.35$毫米汞柱，虚温随高度分佈遵守标准定律； 2.地面气压$h_{0N}=750$毫米汞柱；按高度分佈遵守标准定律； 3.无风雨。	1.初速等于射表上规定初速； 2.弹重符合图紙規定， 3.装葯量符合标准； 4.$t_{zN}=15°C$； 5.弹丸的質量分佈与轉動慣量，符合于图紙規定； 6.炮耳軸水平，炮耳軸与炮軸垂直。	1.落点在炮口水平面上； 2.地表面为平面； 3.科氏加速度为零； 4.重力加速度$g=9.80$米/秒；方向鉛直向下。

§2　修正理論的实际意义

火炮实际射击時的射击條件与标准條件經常是不相同的。在实际射击條件下的彈道諸元与标准條件下的各相应的彈道諸元的差，叫修正諸元。修正諸元的大小，須由修正理論来解决。

修正理論是射表中計算修正諸元的理論依据，也是在編制射表時由射击條件下进行試射測得的实驗射程（或实驗彈道諸元）化为标准條件下的标准射程（或标准彈道諸元）的理論依据。由此可見，沒有較完整的修正理論，就不能編制准确性良好的射表，炮兵也就不能对敌方目标进行准确、有效的射击。因此修正理論与外彈道学中的基本問題解法，具有同样的重要性。

軍事技术越进步，武器的杀伤威力越强大和运動性能越良好，就越需要出敌不意的、突然而准确的猛烈射击，給敌人以致命的破坏与杀伤。这就需要炮兵能进行不經試射的、准确有效的精密射击（最好应用电子計算机）。为了保証精密法射击的准确有效，对外彈道学，尤其是对其中的修正理論，就提出了更高的要求。

§3　修正的对象与方法

由于射击條件与标准條件的不同，彈道上任意点（包括頂点和落点）的各彈道諸元，均将发生偏差。如果全部均加以修正是非常繁杂的。这就需要根据目标的不同而各选其重点。例如对于地面不動或运動緩慢的目标，最重要的是对全水平射程的修正；对于迅速运動的目标，还需要引进对飞行時間的修正；对于高射来說，需要在确定的飞行時間時，对彈道任意点座标(x,y)的修正$(\delta x,\delta y)$。因为不管对任何火炮来說，最重要的是要炮彈能夠准确地命中目标。

計算修正量的方法有二：求差法与微分法。

如以射程为例，在基本問題中，它是c、v_0、θ_0三个參量的函数。如果考虑到所有影响射程的其他因素（見§1），則可以写出如下的关系式

$$X = X(c, v_0, \theta_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n),$$

式中α_1、α_2、$\alpha_3 \cdots \cdots \alpha_n$，表示与射程有关的其他参量。

設确定射程的諸因素各有增量:

$$\delta c, \delta v_0, \delta\theta_0, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3 \cdots\cdots \delta\alpha_n.$$

則得对射程修正量的准确値为:

$$\delta X = X(c+\delta c, v_0+\delta v_0, \theta_0+\delta\theta_0, \alpha_1+\delta\alpha_1, \alpha_2+\delta\alpha_2, \alpha_3+\delta\alpha_3 \cdots \alpha_n+\delta\alpha_n) - \\ - X(c, v_0, \theta_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n)。 \qquad (\text{I}.101)$$

按公式(I.101)計算修正量的方法，就是所謂**求差法**。可見，求差法就是由射击條件确定的彈道諸元减去由标准條件确定的、相应的彈道諸元的方法。也就是考虑所有射击時的條件組成彈丸质心运動方程組进行准确的积分（如数值积分法）与仅考虑标准條件組成彈丸质心运動方程組进行准确的积分，由前者求得的彈道諸元减去后者的、相应的彈道諸元的方法。

用求差法求出的修正量不仅准确性高，而且不受任何條件的限制，但是計算量則很大。

由于在实际上，諸参量的增量一般不大，而且由于彈道諸元是諸参量c、v_0、θ_0、α_1、$\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$的連續函数，所以射程的增量，一般也是不大的。因此可以近似地用增量代替全微分公式中的微分，这样，得到**微分法**的修正公式为:

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c}\delta c + \frac{\partial X}{\partial v_0}\delta v_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0}\delta\theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \cdots \frac{\partial X}{\partial \alpha_n}\delta\alpha_n. \qquad (\text{I}.102)$$

微分法与用台劳級数展开，略去其各微量的、高于一次的各項的結果，完全相同（註）。

由于微分修正公式較簡单，而且當諸参量变化不大時，准确性一般也能符合要求，因此在炮兵实踐中經常应用。但是必須注意各参量的变化，一定要限制在較小的範圍內，否則将會产生不能允許的誤差。

偏导数$\frac{\partial X}{\partial c}$、$\frac{\partial X}{\partial v_0}$、$\frac{\partial X}{\partial \theta_0}$、$\frac{\partial X}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial X}{\partial \alpha_n}$，叫做全射程的修正系数。而其中$\frac{\partial X}{\partial c}$、$\frac{\partial X}{\partial v_0}$、$\frac{\partial X}{\partial \theta_0}$三个修正系数，叫做**主要修正系数**。因为只要知道了主要修正系数，其他修正系数均可由此求得（見以后各章）。

参量的变化愈小，用增量代替微分的准确性愈高，因而用微分法計算修正量的准确性也愈高。

按微分法計算修正量時，由于沒有考虑到二級微量，因而也就沒有考虑到各参量变化的相互影响。

为了便于理解求差法与微分法的差别，我們举抛物綫彈道为例来加以說明。

因为抛物綫彈道射程公式为:

註: 多变量的台劳級数形式为:

$$X(c+\delta c, v_0+\delta v_0, \theta_0+\delta\theta_0, \alpha_1+\delta\alpha_1 \cdots \alpha_n+\delta\alpha_n) = X(c, v_0, \theta_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n) + \\ + \left(\frac{\partial X}{\partial c}\delta c + \frac{\partial X}{\partial v_0}\partial v_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0}\delta\theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \cdots \frac{\partial X}{\partial \alpha_n}\delta\alpha_n\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial c^2}\delta c^2 + \cdots\right) + \cdots$$

$$X=\frac{v_0{}^2\sin2\theta_0}{g}.$$

當参量v_0与θ_0有增量δv_0、$\delta\theta_0$時，按求差法公式求得的射程修正量为

$$\delta X_1=\frac{(v_0+\delta v_0)^2\sin2(\theta_0+\delta\theta_0)}{g}-\frac{v_0{}^2\sin2\theta_0}{g}=$$

$$=\frac{2v_0\sin2\theta_0}{g}\delta v_0+\frac{\sin2\theta_0}{g}(\delta v_0)^2+\frac{v_0{}^2\cos2\theta_0}{g}2\delta\theta_0+$$

$$+\frac{2v_0\cos2\theta_0}{g}\cdot2\delta\theta_0\delta v_0+\frac{\cos2\theta_0}{g}(\delta v_0)^2\cdot2\delta\theta_0.^{(\text{註})}$$

如果按微分法求得的射程修正量应为

$$\delta X_2=\frac{2v_0\sin2\theta_0}{g}\delta v_0+\frac{2v_0^2\cos2\theta_0}{g}\delta\theta_0\text{。}$$

二者之差为

$$\delta X_1-\delta X_2=\frac{\sin2\theta_0}{g}\cdot(\delta v_0)^2+\frac{2v_0\cos2\theta_0}{g}\cdot2\delta\theta_0\cdot\delta v_0+$$

$$+\frac{\cos2\theta_0}{g}(\delta v_0)^2\cdot2\delta\theta_0\text{ 。}$$

其中各項，均为二級与二級以上的微量。當$\delta\theta_0$和δv_0均小時，就可以略去不計。因此微分法只能在各参量变化較小時应用。

註：　$\cos2\delta\theta_0\approx1$；$\sin2\delta\theta_0\approx2\delta\theta_0$.

第二章 在非標准條件下彈丸質心運动方程組的組成与积分

§1 同时考虑射表条件与气象条件为非标准时的彈丸质心运动方程組的組成

首先來研究射表條件：當裝葯量和葯溫为非标准時，影响初速的变化；當彈重变化時則同時影响到初速的变化和彈道系数的变化。如果略去質量分佈和轉動慣量变化的影响不計，則射表條件为非标准時所产生的影响，可以通过初速和彈道系数的变化來考慮。如果将与射表條件不符合的、实际的彈道系数c_1、初速v_{01}和射角$\theta_{01}(=\theta_0)$，用來代替基本問題中的彈丸質心运動方程組內的c、v_0和θ_0，即得与射表條件不一致時的彈丸質心运動方程組如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&* \frac{du}{dt}=-E_1u;\\
&* \frac{dw}{dt}=-E_1w-g;\\
&* \frac{dy}{dt}=w;\\
&* \frac{dx}{dt}=u;
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}.201)
$$

式中： $E_1=c_1H_\tau(y)G(v_\tau)$； $v_\tau=v\sqrt{\dfrac{\tau_{ON}}{\tau}}=\sqrt{u^2+w^2}\sqrt{\dfrac{\tau_{ON}}{\tau}}$

起始條件为$t=0$時，$u=v_{01}\cos\theta_{01}$；$w=v_{01}\sin\theta_{01}$；$y=0$；$x=0$。

用不符合射表條件的c_1、v_{01}、θ_{01}与符合射表條件的c、v_0、θ_0，分别由彈道表查出各彈道諸元，它們的相应諸元的差，就是用求差法求得的修正量。

其次，來研究气象條件。

如果當气象條件中的气溫和气压不是标准時，則在

$$H_\tau(y)=H(y)\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{ON}}}=\frac{h}{h_{ON}}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau}}$$

和

$$v_\tau=v\sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau}}$$

中的h和τ，應該取实际与y相应的值。當实际的τ(y)和h(y)曲綫已知時，可以預先編出与实际條

件相符合的$H_\tau(y)$和$\sqrt{\dfrac{\tau_{CN}}{\tau}}$的表来，以便积分時应用。

當有风存在時，彈丸相对于空气的相对运動速度发生变化。

由于空气阻力只与相对于空气的相对速度v_γ有关，因而$F(v_\tau)$中的v ，应該改用v_γ，即v_τ改用$v_{\gamma\tau}$。而

$$\bar{v}_\gamma = \bar{v} - \bar{W} \quad ,$$

因而

$$v_{\gamma x} = u - W_x;$$
$$v_{\gamma y} = w;$$
$$v_{\gamma z} = \dot{z} - W_z,$$

故

$$v_\gamma = \sqrt{(u-W_x)^2 + w^2 + (\dot{z}-W_z)^2} \quad ,$$

$$v_{\gamma\tau} = v_\gamma \sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau}} \quad 。$$

因此在考虑射表條件和气象條件均为非标准條件時的彈丸質心运動方程組应为

$$\left.\begin{aligned}
&* \ \frac{du}{dt} = -c_1 H_\tau(y) G(v_{\gamma\tau})(u - W_x) \quad \cdots\cdots (1)\\
&* \ \frac{dw}{dt} = -c_1 H_\tau(y) G(v_{\gamma\tau}) w - g \quad \cdots\cdots (2)\\
&* \ \frac{d\dot{z}}{dt} = -c_1 H_\tau(y) G(v_{\gamma\tau}) (\dot{z} - W_z) \quad \cdots\cdots (3)\\
&* \ \frac{dy}{dt} = w \quad \cdots\cdots (4)\\
&\ \ \ \frac{dx}{dt} = u \quad \cdots\cdots (5)
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{I}.202)$$

$$v_{\gamma\tau} = \sqrt{(u-W_x)^2 + w^2 + (\dot{z}-W_z)^2}\ \sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau}}.$$

$t=0$時：$u = v_{01}\cos\theta_{01}$，$w = v_{01}\sin\theta_{01}$，$\dot{z} = 0$，$x = y = z = 0$.

如果彈道系数与初速用射表條件時的数据，則方程組(Ⅰ.202)成为仅考虑非标准气象條件時的彈丸質心运動方程組；如$H_\tau(y)$及$\sqrt{\dfrac{\tau_{ON}}{\tau}}$也用标准气象 條 件 時的数値（見 彈道表册上的$H_\tau(y)$表和$\sqrt{\dfrac{\tau_{ON}}{\tau}}$表）時，則方程組（Ⅰ.202）即成为仅考虑风对質心运動影响的方程組。若

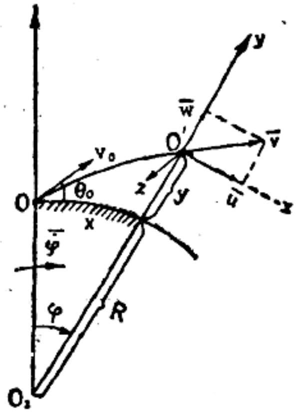
再令$W_z=0$，因而$\dot{z}=0$，$z=0$，則方程組(Ⅰ.202)中的(1)、(2)、(4)、(5)四式，成为仅考虑縱风影响時的运動方程組。由此可見，方程組(Ⅰ.202)为射表條件与气象條件均为非标准時或其个別因素为非标准時彈丸质心运動方程組的一般形式。

§2 考虑地球条件时的彈丸质心运动方程組的組成

當落点在或者不在炮口水平面上時，与彈丸质心运動方程組的形式及其实質均无关系。

对于射程不大的普通火炮来說，科氏加速度、地表为曲面和重力加速度的方向和大小改变所产生的影响不大，一般可以不加修正。尤其是后面两个條件，更是为此。

當考虑地球曲面的影响時，我們最好引进一个使彈道运動的動座标系$xo'y$（空間座标系为δ'—xyz，如图Ⅰ.201）。o'为彈丸自射出点o以初速v_0、射角θ_0射出、經t秒后飞达空中的一点o'。以此点o'为原点，自地心o_1至o'点的連綫为y軸，且規定向上为正向。$o'x$軸垂直于$o'y$軸。經t秒后，動座标系$o'xy$旋轉角度φ，而角速度为$\dot{\varphi}$，其方向沿z軸的負向。$\overline{w}$、$\overline{u}$为速度向量$\overline{v}$在動座标系中縱、横座标軸上的射影。



图Ⅰ.201

速度向量$\overline{v}$沿彈道对時間的变化率为

$$\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{\dot{\varphi}}\times\overline{v}。\qquad (Ⅰ.203)$$

式中：$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}$表示速度向量矢端对動座标系$xo'y$的相对速度；

$\overline{\dot{\varphi}}\times\overline{v}$表示牽連速度；

$\frac{d\overline{v}}{dt}$表示速度向量端点的絕对速度。

考虑地球旋轉对彈丸质心运動的影响時，彈丸质心运動的向量方程(上册第一篇第一章§2，Ⅰ.108)为

$$\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{J}+\overline{g}_y-\overline{j}_c。\qquad (Ⅰ.204)$$

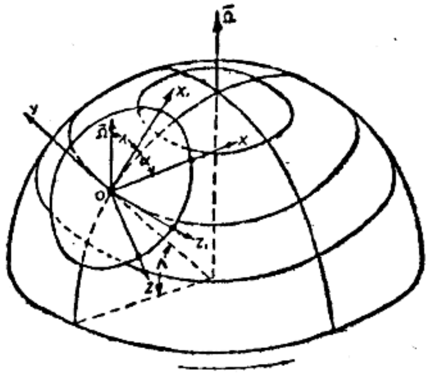
式中：$\overline{g}_y$为任意高度y处的重力加速度向量，方向指向地心，大小与距地心距离的平方成反比，即$g_y=g\frac{R^2}{(R+y)^2}=g[1+\frac{y}{R}]^{-2}$；

$\overline{J}$为阻力加速度向量，指向与速度$\overline{v}$相反，而大小为$J=cH_\tau(y)vG(v_\tau)$；

$\overline{j}_c$为科氏加速度向量，$\overline{j}_c=2\cdot\overline{\Omega}\times\overline{v}$；

Ω为地球自轉角速度（图Ⅰ.202）。

为了求得向量方程(Ⅰ.203)沿各座标軸上的投影方程，我們組成各向量对各軸的投影表，如表Ⅰ.201所示。



图Ⅰ.202

Λ＝地理緯度；　　α为正北向与射击面間的夹角。

投　影　表　　　　表Ⅰ.201

	x'	y'	z	备　註
$\bar{\dot{\varphi}}$ $\bar{v}$	0 u	0 w	$-\dot{\varphi}$ $\dot{z}$	
* $\bar{\dot{\varphi}}\times\bar{v}$	$w\dot{\varphi}$	$-u\dot{\varphi}$	0	
* $\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}$	$\dot{u}$	$\dot{w}$	$\ddot{z}$	
* $\bar{g}$	0	$-g(1+\frac{y}{R})^{-2}$	0	
$\bar{\Omega}$ $\bar{v}$	$\Omega_x=\Omega\cos\Lambda\cos\alpha$ u	$\Omega_y=\Omega\sin\Lambda$ w	$\Omega z=-\Omega\cos\Lambda\sin\alpha$ $\dot{z}$	图Ⅰ.202
* $-2\bar{\Omega}\times\bar{v}$	$-j_{cx}=$ $=-2(\Omega_y\dot{z}-\Omega_z w)$	$-j_{cy}=$ $-2(\Omega_z u-\Omega_x\cdot\dot{z})$	$-j_{cz}=$ $-2(\Omega_x w-\Omega_y u)$	(註)
$\bar{J}$	$-cH_\tau(y)G(v_\tau)u$	$-cH_\tau(y)G(v_\tau)w$	$-cH_\tau(y)G(v_\tau)\dot{z}$	

註：$$\bar{\Omega}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u & w & \dot{z} \end{vmatrix}=(\Omega_y\dot{z}-\Omega_z w)i+(\Omega_z u-\Omega_x\dot{z})j+(\Omega_x w-\Omega_y u)k.$$